د شمیرپوهنې بنسټونه

ډاکټر ماخان میرې شینواری

وینا

د وینا لاندې یوه ژبنیزه افاده یا وییِنه پوهیږو، چې د دې لاندې دوه رښتیا ارزښتونو ،، رښتیاَ،،(``wahr,,) w همداسې ،، نارښتیا،، یا ناتیک (``falsch,,) f څخه د یوه سره تنظیم کیدی شي.

ویناوې په لویو تورو A سره په نخښه کیږي : ، او کېدی شي د منطقي یا سم اندیزو عملیو سره وتړل شي. بنسټیزې شمېرپوهنیزې وېینې یا افادې ، چې له نورو افادو څخه منځ ته نه شي راتلی اکسیومونه بلل کیږي

لاندې بیلګه د دې شمیرپوهنې وینا روښانه کوي.

وینا

A : هر طبیعی عدد د لومړنیو عددونو ضرب دی. دا یوه رښتیا وینا ده.

وینا

B : هر لومړنی ګڼ یا عدد ناجوړه یا طاق دی. دا چې 2 جوړه یا حفت عدد او پریم دی، نو وینا نارښتیا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډیر د پریم اعدادو غبرګوني شته. دا یوه شمیرپوهنیزه وینا ده، ځکه چې دا یا رښتیا ده او یا نا رښتیا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرګوني څخه هغه لومړني ګاونډي ناجوړه عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بیلګې په توګه.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ldots\ .$$

دا تراوسه حورا لویه د لومړنیو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$$16869987339975\cdot 2^{171960}\pm 1$$

د کره کونې سره

D : د جمعې ۱۳ ـمه یوه د بدبختۍ روځ ده.

دا یوه وینا نه ده، څکه چې دا په یوه رښتیا ارزښت نه شي تنظیودی.

لیکونکې: هولیګ،هورنر

منطقي(سم اندیزې) تړنې(که غواړې: عملیی یا نښلونې)

منطقی یا سم اندیزې ویناوې کېدی شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عملیو سره و تړل شي.

یادونه : له کیڼ و ښي لور ته.

تیک هلته رښتیا، که	وییندود	لیکندود	نومونه	
A نارښتیا ده.	نه A	$\neg A$	نه والی	
	A او B رښتیا دي	(A او B)	$A \wedge B$	Konjunktion یا د او تړنه
	A یا B رښتیا ده.	(A یا B)	$A \vee B$	Disjunktion د یا تړنه
	A او B بیل رښتیا	(یا A یا B)	$A \not\equiv B$	Antivalenz نابرابر ارزښته

			ارزښتونه ري
Implikation ترې لاس ته راوړنه	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	له A څخه B له B څخه A	A نارښتي يا B رښتيا ده
Äquivalenz برابر ارزښته	$A \Leftrightarrow B$	(A و B ته برابر ارزښته دی) يا له A څخه B لاس ته راځي او برعکس	او B همغه يا برابر رښتيا ارزښتونه لري

د دې لپاره چې په منطقي افادو يا وييلو کې نوکان يا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ څخه کلک يا قوي نښلوي او دا بيا له $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ او همداسې له $\not\equiv$.

دا ايمپليکيشن په پام کې ونيسی، چې B تيک هلته رښتياه ده، چې A رښتيا وي. له ناتيکو نيونو(فرضيو) ، تيک يا رښتيا او يا هم نارښتيا پايلې را وپستل کيدی شي.

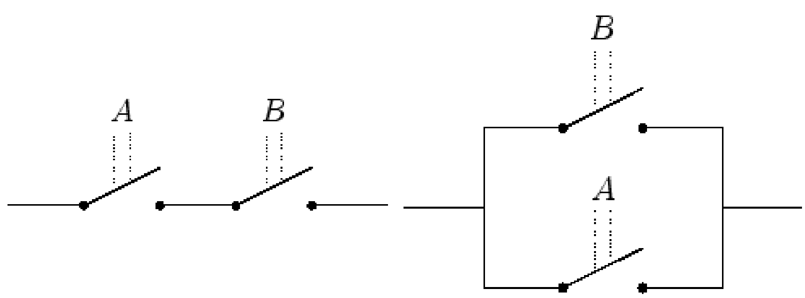
دا د يا ترړنې لپاره نخښه يوه دv په شان نخښه ده، چې د (vel (lat. oder (لاتين. يا) لپاره ځای په ځای شوې. د يا ترړنې لپاره کېدی شي چې سومبول ،، $+$ ،، وکارول شي او د او- ترړنې لپاره ،، $\cdot$ ،،. که سومبول 0 د ناتيک يا غلط لپاره وکارول شي او هر بل ارزښت د رښتيا په ځير و کارول شي، نو کيدی شي منطقي ترړنې د طبيعي عددونو شمېرنې له لارې هم پر مخ بوتلای شو يا استعمال کړای شو.

په شمیروني (کمپیوتر ژبه کې له انګریزي راغلي کلیمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (دیسجنکشن)، یا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بې له یا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی(NAND (negierte Konjunktion) (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی دیسجنکشن) او(NXOR (Äquivalenz (برابرارزښته) لپاره کارول شوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر، کیمرلې

که وینا د سویچ په څېر انځور کړو، چې تړلې وي، که وینا رښتیا وي، په همدې توګه واز ، که وینا نارښتیا وي، نو کېدی شي مسلسل سویچونه د یا – تړنې په څېر او غبرګ سویچونه د او-تړنې په څېر صورت ومومي .

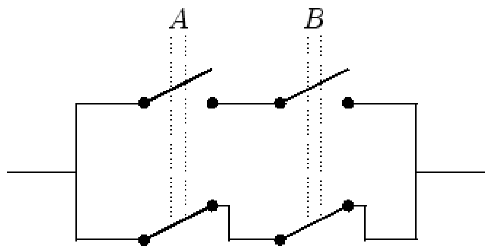
د او-تړنه   د یا-تړنه



یوه نه-شوې وینا یو سویچ دی، چې تړلی دی، که وینا نارښتیا وي. له دې سره کېدی شي سویچ ځېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ایمپلیکیشن لپاره ورکړل شي.

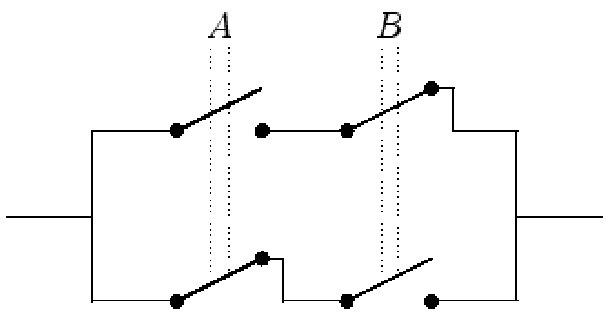
برابرارزښته : $A \Leftrightarrow B$ همداسې $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

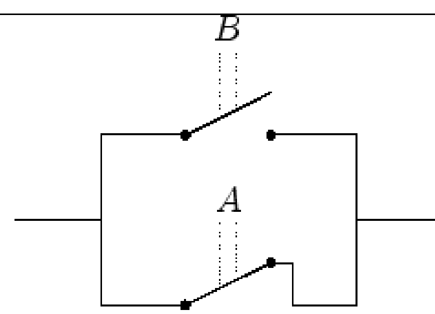
Äquivalenz:



نابرابرارزښته: $A \not\equiv B$ همداسي $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Antivalenz:



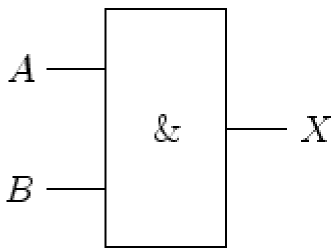
ایمپلیکېشن یا ترې لاس ته راتلنه: $A \Rightarrow B$ همداسي $\neg A \vee B$	

سویچونه کیدی د ترانزیستور له لارې منځ ته راشی یا صورت وموميِ، چې په جګ یا ټیټ ایښوول شوي شبانونګ جریان مومي یا تیریږي. د (1) ارزښت جګ شپانونګ دی ټیټ یا کم شپانونګ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونګ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړګوډیز(مستطیل) خخه جوړ دی، په کومو کې چې اړونده تړنې ورکړ شوې دي. یو نه- والی د یوې ګردی(دایرې) سره په نخښه شوی دی.

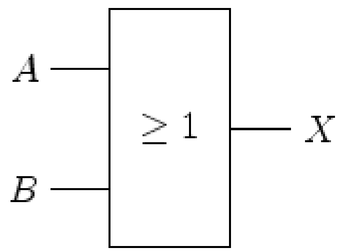
Konjunktion

کنجکشن



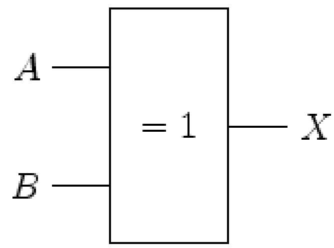
Disjunktion

دیسینکشن



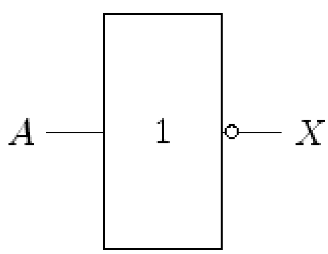
Antivalenz

نابرابرارزښته



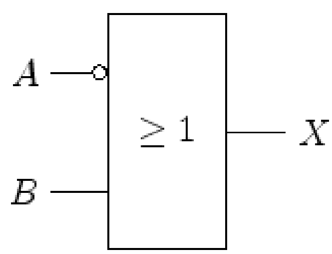
Negation

نه-والی



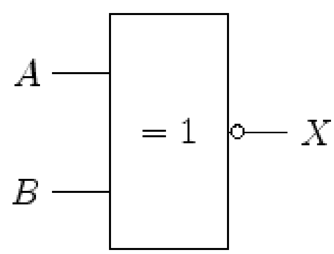
Implikation

ایمپلیکېشن



Äquivalenz

برابرارزښته



منطقي عمليو لپاره لاندې كتمتوالى Identitäten باوري دى.

Assoziativgesetze: اسوځياتيو قانون

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze: كموتاتيو يا بدلېدنقانون

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln: د دې مورګان قانو

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze: دیستریبوتیو قانون

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور :

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتیو یا بدیلیی انځورونه

ایمپلیکشن
Implikation: $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz: ا $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz: $A \not\equiv B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بديلې فرمولونه زيات وخت په ښوونو کې استعمال مومي.

يوه منطقي افاده يا وبينه ، چې د رامنځ ته شوې وينا رښتيا ارزښت خپلواکه تل رښتيا همداسې نارښتيا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونتراديکشن Kontradiktion بلل کيږي. داسې يوه افاده کړى شي د ښه بدلون سره   همداسې   د   سره بدله شي. په ځانګړې توګه دا کټمټوالى باور لري:

$$A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{f} = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.$$

همداسې

ليکونکي: هيوليګ،، هيورنر

د دې مورګان قانون او د ډېستريبوتيو قانو کېدی شي وښوول شي، داسې چې د وينا د رښتيا ارزښت لپاره ټول امکانات وځيړل شي. د دې مورګان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ايمپليکېشن، برابرارزښتوالي او نابرابرارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعريف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وينا

$$\underbrace{|x-1|>1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x<0) \vee (x>1)}_{B}$$

ښه دليري.

د د ېمورګان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x<0) \wedge \neg(x>1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1).$$

له دې سره سم ايمپليکېشن $A \Rightarrow B$ د وينا د

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 1\,.$$

سره برابرارزښته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکېشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلګې په توګه افاده یا ویېنه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایپلیکېشن پهڅای اینونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\,.$$

د دېتریبوتیو قانون له مخط دا وینا برابرارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پېژندل کیږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادي L د ازماېښت ته الترناتیو یا بدیلي کېدی شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا ا ستعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

f	f	w	f	w

له دې دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو،، شتون لري....،، . ،، د ټولو .... لپاره،، لپاره لندوني شتونکوانتور $\exists$
او ټول کوانتور $\forall$ استعماليږي.. دا کوانتورونه زيات وخت د $A(p)$ سره په تړاو کې
استعماليږي، چې د يوه پارامتر p چې د ډېرى يا سټ P توګى دى، په واک کې دي.

Bedeutung معنا	Schreibweise ليکندود
يو توکى p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ ربښتيا دي.	$\exists p \in P:\ \ A(p)$
د ټولو p لپاره چې له P دى $A(p)$ ربښتيا دى.	$\forall p \in P:\ \ A(p)$

د دواړو وينا ډولونو د نه٠والي سره کونتوونه هم بدليږي.

$$\neg(\exists p \in P:\ \ A(p)) = \forall p \in P:\ \ \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P:\ \ A(p)) = \exists p \in P:\ \ \neg A(p)$$

دا $\exists!$ ليکن ډول هم روښنى دى د فرمولولو لپاره، چې ،، ټيک يو ... شته،،

د کوانتورونو د شمېرنې ښوونې لپاره وينا

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کيږي. دا په دې معنا چې يوه لړی(ترادف)

$$a_1, a_2, \ldots$$

د 0 په لور يا0 ته هځيږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ا رزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند يا بنديز ε څخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړي وينا نه شي او کوانتورونه سره بدل شی،

$$\exists \leftrightarrow \forall.$$

د ايمپليکېشن يا لاس ته راوړنې يا – راتلنې اينوونه او د مورګبن قانون څخه لاس تهراځي

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) =$$

$$= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon.$$

له دې سره د نه شوې وينا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_\varepsilon\ \exists n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon.$$

دا په دې معنا چې پرلپسې(ترادف) (a_n) د 0 لورته نه هځيږي . دا په دې معنا چې يو لرزښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بيا اوړي يا تېرېږي.

ليکونی:ک. هيوليګ

سیده ښوونه

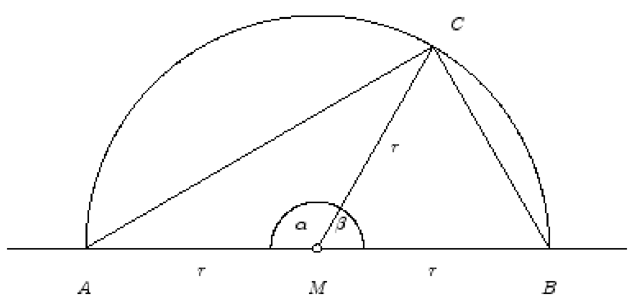
یوه غوښتنه ثبوت) B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له ربښتیا وینا A څخه را منځ ته شي او یا په داسې بېرته واړول شي.

$$A \Longrightarrow B\,.$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې(فرضیې) هم ولري، چې هغه دِ غوښتنې B لپاره اړیینې دي.

لیکونکی: هیولیګ

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم ګردی(نیم دایره) کې رابند درېګودی(مثلث) ولاړکوډیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده ښوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول : په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم : د یوه برابر پښیز (یا که غواړی: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه برابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(AMC)$ او $\Delta(CMB)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi-\alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi-\beta}{2}.$$

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له امله په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده ښوونه

د دې لپاره چې وښایو چې له یوې وړاندنیونې(فرضیې) V څخه غوښتنه(ثبوت) B لاس ته راځي یعنې ($V \implies B$) ، کېدی شي ونیسو ، چې وینا B د V د وړاندنیونې له امله ناربنتیا ده، دا مو یوه تضاد ته بیایي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د F سره یوه ناربنتیا وینا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ یا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نیونې نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیګ، کنش،اببربرینس

ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

د $\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$ سره برابرارزښته دي.

که ایمپلېکشن رښتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت) B رښتیا وي، ځکه چې $\neg V$ نارښتیا ده او F یا نارښتی او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د دې ناسیده ښوونې د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات یا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B:\ \sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه B نارښتیا ده. بس باور لري

د $p,q\in\mathbb{N},\quad \mathrm{ggT}(p,q)=1$. سره .

دلته ggT انګرېزي یې gcdخورا عټ کډپروېشونی (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیونې څخه د مربع کونې او د q^2 سره ضربونې له امله لاس ته راځي

$$2q^2=p^2\,,$$

دا یه دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو چوړه یا جفت عدد دی. په ځانګړې توګه یو $r\in\mathbb{N}$ شتون لري د $p=2r$ سره. د $q^2=2r^2$ له امله q هم یو چوړه عدد دی او له دې سره $\mathrm{ggT}(p,q)=2$. دا د نیونې نیونې جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\mathrm{ggT}(p,q)=1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B)\Longrightarrow B\,.$$

له دې امله یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

وينابنې د طبيعي پارامتر سره کېدی شي ډ پوره ايندکشن له لارې وښوول شي. که $A(n)$ يوه د $n \in \mathbb{N}$ په واک کې وينا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- يا و اخستل شي. .

لومړی : د ايندکشن پيل : ښايو چې $A(1)$ رښتيا دی.

دويم : اينوکشنپايونه يا ختم: ښايو چې د نيونې چې $A(n)$ رښتيا دی(دايندکشن هیپوتيزې)، لاسته زاځي، چې هم رښتيا دی، ياپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره ضدق کوي.

د يوه اندکشن ښوونې سره يو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه ځخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پيل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسيږي، نږ وينا بيا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع(څلوری) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n): \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کيدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پيل ($A(1)$):

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \implies A(n+1)):$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېرۍ(سټ)

یوه ډېرۍ A له توکو $a_1, a_2, \ldots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکترېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

A={a:د E خوی لري:a}

د دې لپاره سړی لاندې نخښې کاروي یا استعمالوي:

معنا	لیکندول

$a \in A$	a د A توکی دی .
$a \notin A$	a د A توکی دی .
$A \subseteq B$	B د A برخډېرۍ(برخسټ) ده
$A \subset B$	Bد A برخډېرۍ(برخسټ) ده
$\|A\|$	دتوکو ګڼون یا تعداد په... کې
$\emptyset$	تشډېرۍ یا تشسټ

که $|A| < \infty$ همداسي $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پای ډېرۍ همداسي ناپای ډېرۍ څخه غږېږو.

دوه یا څو ډېرۍ برابرزوریزۍ بلل کیږي، که د دوی د توکو ترمنځ یو بیجکتیو بلواک یا تابع یعنې برعکسکیدونکی بلواک شتون ولري ($|A| = |B|$ د پای ډېرۍ لپاره).

د A د ټول برخو ډېرۍ $\mathcal{P}(A)$ تواندېرۍ بلل کیږی، دا په دې معنا چي

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

لیکونکي: هیولیګ، کنش

د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ

د لاندې ګڼونو ډېرۍ لپاره معیاري نخښې استعمال مومي:

طبعي اعداد : $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

ټول اعداد: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$

راشنل یا هوښیار اعدا: $\mathbb{Q} = \{p/q : \ p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, \mathrm{ggT}(p,q) = 1\}$

ریل یا حقیقي(ریښتوني) اعداد: $\mathbb{R} = \{x : \ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\, q_n \in \mathbb{Q}\}$

کومپلکس اعداد: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : \ x, y \in \mathbb{R},\, \mathrm{i}^2 = -1\}$

په همدې توګه لاندلیکنډول هم کارول کیږي:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ او $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ او دې ته ورته یا په همدې ډول

$\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

لیکونکي: کړ.هیولیګ

په ډېریو کې عملیې

د دوه ډېریو A او B لپاره لاندې علمیې تعریف دي:

ټولنه (اتحاد)

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \ \vee \ x \in B\},$$

غوڅی(قطاع):

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \ \wedge \ x \in B\},$$

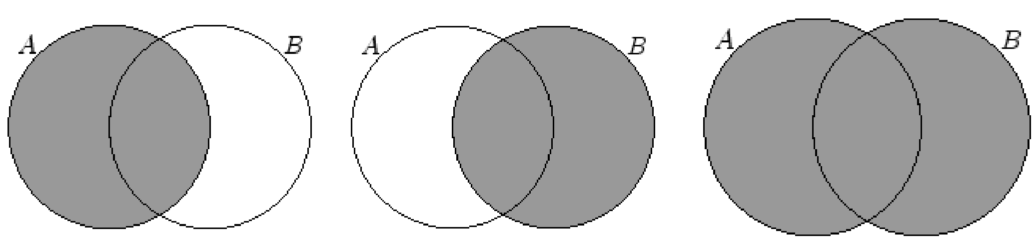
کمښت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکې ډېری،

$$A \setminus B = \{x : \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\},$$

سیوتریکې کمښت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

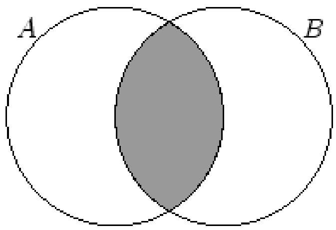
په لاندې ځېرو کې د ډېریو عللیې داسې په نامه ون-دیاګرام Venn-Diagramme سره ښوول شوي دي.



تولنه

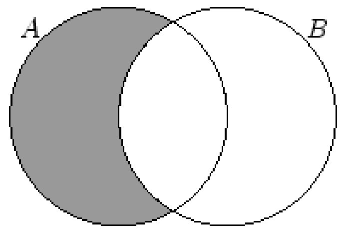
A B

$A \cup B$ Vereinigung:



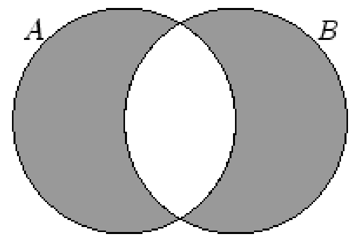
غوځی

$A \cap B$ Schnitt:



کمبنت

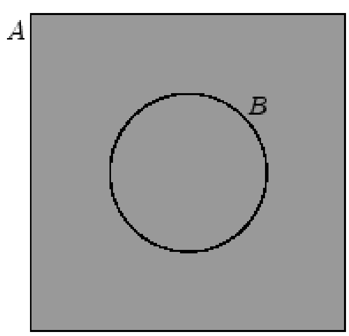
$A \setminus B$ Differenz:



سیومتریکي کمبنت

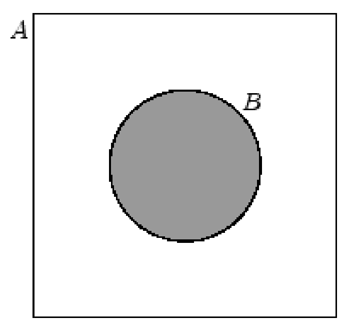
symmetrische $A \Delta B$ Differenz:

که $B \subset A$ وي، نو یوځو دیاګرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



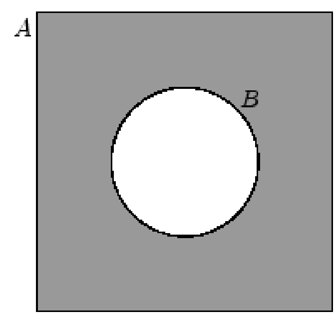
تولنه

Vereinigung: $A = A \cup B$



غوځی

$B = A \cap B$ Schnitt:



پوره کېدنکي ډېری

Komplementärmenge : $A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکي: هولیک،هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېرقوانین:

اسوځیاتیو:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموتاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Morgansche Regeln:
- د مورګان قانون یا قاعده

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

- دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cup, \cap$ عملیو په ځای $\wedge, \vee$ کیږدړ او $C\setminus$ په ځای $\neg$ کیږدو.

لیکونکي:هیولیګ،هیونر

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C\backslash(A \cap B) \Leftrightarrow \qquad x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د ډیستریبوتیو قاونو له مخې اخرنی افاده یا ویینه د لاندې سره برابرارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C\backslash A \cup C\backslash B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کتمتوالی ښوول شوې.

لیکړنکی:ک. هیولیګ

د دې مورګان قاعدې له مخې د بیلګې په توګه لاس ته راځي

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = \qquad (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د ډیستریبوتیو قانون د بېلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B \quad = \qquad (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، ځکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارتېزي ضرب (ځل)

د دوه ډېریو A او B کاتېزي ضرب دواړو ډیریو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a,b) : \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

باور لري:

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow (a = a' \land b = b').$$

داپه دې معنا چې د ډېرې برابروالي ($\{a,b\} = \{b,a\}$) په عکس یا په ځېږ د لړې پرلپسې غوره ده

په ورته تو ګه n - واره یا ځله کارتېزي ضرب تعریفوو

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1, \ldots, a_n)$ د $a_i \in A_i$ سره . که ډېرې برابرې وي، نولیکو:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

لیکونکي:هیولیک،هیورنر

اړیکې Relation

که د ډېرې A توکي د ډېرې B له توکو سره په اړیکو کې قرار ولري یا ولاړې وي، نو کېدی شي دا د یوې اړیکې سره افاده یا وویل شي. دا د توکو له منظمو جوړو (a,b) جوړه ده، چې دا د اړیکو له لارې سره تړلي دي. نو یوه اړیکه R د A او B د کارتېزي ضرب برخډېرې ده. وایو چې a د b سره په اړیکو کې ده او د دې لپاره لیکو $a\,\mathrm{R}\,b$:

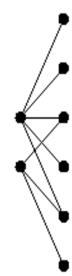
$$a\,\mathrm{R}\,b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B.$$

لیکونکي:ژ. هیورنر

د اړیکو د داتا بانک Relationale Datenbank

یوه نمونه یي بېلګه د اړیکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلګې په توګه یو د درسونو (لکچرونو) جدول او یو د زده کړو جدول ورکول شوي چې یو له بل سره په اړیکو کې راغلي. دا په لاندي ځېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کېڼ لور ته نومونه دي

درس	کوټه		
لوړه شمیرپوهنه ۱ د زده کوونکو...	V57.01 V47.02		

Mtr.-Nr.	Name
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth

دا هم دلته روښانه شوي چې د یوې ډېرۍ توکي د بلې ډېرۍ د توکو سره په اړیکو کې راځي یا که غواړئ :قرار لري.

لیکونکي: بوسلر، هیورنر

د اړیکو خویونه

په یوه ډېرۍ A کې یوه اړیکه $R \subseteq A^2$ په لاندې توګه بلل یا نمول کیږي:

رفلکسیو reflexiv ، که هر توکی د خپل ځان سره په اړیکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

سیومتري symmetrisch ، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

$$(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$$

انتی سیمتري antisymmetrisch ، که که له سیمتري څخه کټمټوالی لاس ته راشي:

$$(a,b)\in R \land (b,a)\in R \Rightarrow a=b$$

ترانزتیوtransitiv ، که له یوه زنځی څخه منځنی توکی لرې کېدی شي:

$$(a,b)\in R \land (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$$

ټوټالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a,b\in A : (a,b)\in R \lor (b,a)\in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ،،ورته اړیکې،، (برابرارزښته اړیکې) بلل کیږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a \mathrm{R} b$ په ځای لیکل کیږي. یو ورتهاړیکي ډېرۍ A په توکي پردیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر ارزښته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډیرۍ دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې دریږي(برابرارزښته دي). په داسې حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډریو څخه داسي حالت نه لري.
که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره $a \leq b$ د $a \mathrm{R} b$ په ځای لیکل کیږی. که یو نیم نظم د دې برسېره(سربېره) توتالي وي، نو دا (توتال) نظم بللکیږي او A د $\leq$ سره منظمه ده.

لیکونکی:ژ هیورنر

د یوې ډېرۍ M پوتنځډېرۍ $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېرۍ خوندیونه یا په کې ځایېدنه $\subseteq$ نیم نظم دی، څکهچې باور لري:

$A \subseteq A$ رفلکسیو انتیترانزیتیو $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ او
ترانزیتیو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانین. که M له یوه زیات توکي ولري،
نو خوندیونه نظم نه ی، څکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوټالي منظمه نه ده.

اړیکي ،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای ډېرۍ M په تواندېرۍ کې
$\mathcal{P}(M)$ برابرارزښته ده څکهچز باور لري : $|A| = |A|$ (رفلکسیو)،
$|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (سیومتري)،
$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (ترنزیتیو)

لیکونکی:ژ هیورنر

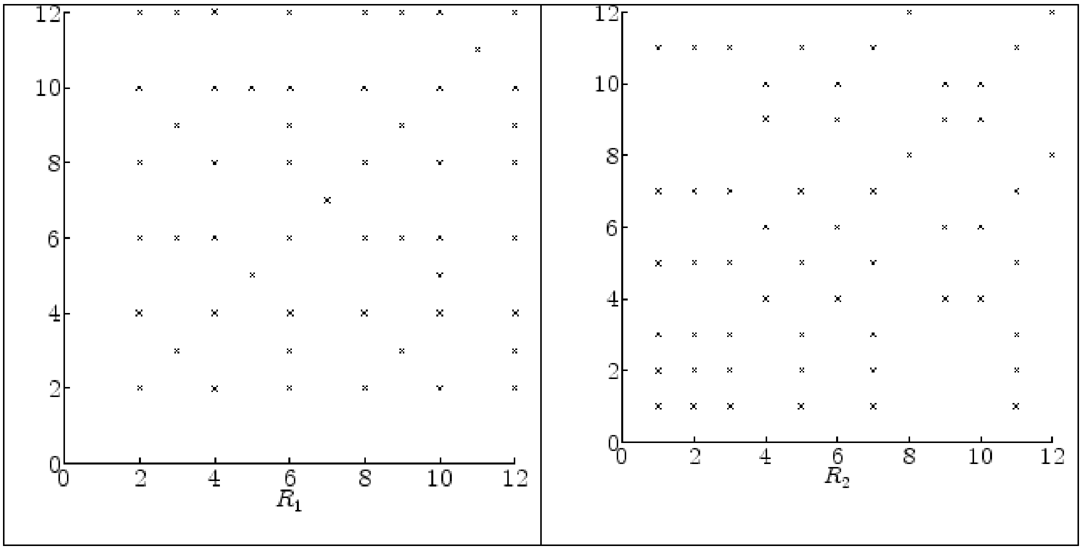
په یوې ډېرۍ باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول پرابرارزښته – اړیکي د توکو
د خویونو له لارط تعریفیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

$$M = \{1, 2, \ldots, 12\}$$

کې ترځېرني لاندې نیسو:

لومړی $x\ R_1\ y$: x او y یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) $\neq 1$
لري .

دویم $x\ R_2\ y$: x او y برابرډېر پروېشوني لري



ځيرونه يا يا تابع(بلواک) د $M \times M$ برخدېريو په ځير د اړيکو ګراف ښايي .
اړيکې R_1 سيومتريک او رفلکسيو دي، مګر نه ترانزيتيو. د بيلګې په توګه $x = 4$ او $y = 6$ ګډ پروېشونی 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ ګډپروېشونی 3 لري، مګر $x = 4$ او $z = 9$ ګډ پروېشونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړيکې برابرارزښت –اړيکې دي. رفلکسيويتي، سيومتري او ترادزيتيويتي په ځرګنده توګه پوره دي. برابرارزښته –ټولګې

دي د يوه، دوه، درې ځلور او شپږ پروېشونو سره.

ليکونکي: هيليګ،کرايخ

فنکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فنکشن f لاندې له يوې ډېرى A په يوه ډېرى B باندې يوه قانونمندي پوهيږو، چې هر $a \in A$ توکی په يواځني ډول يو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظيم کړي.

$$f : A \longrightarrow B .$$

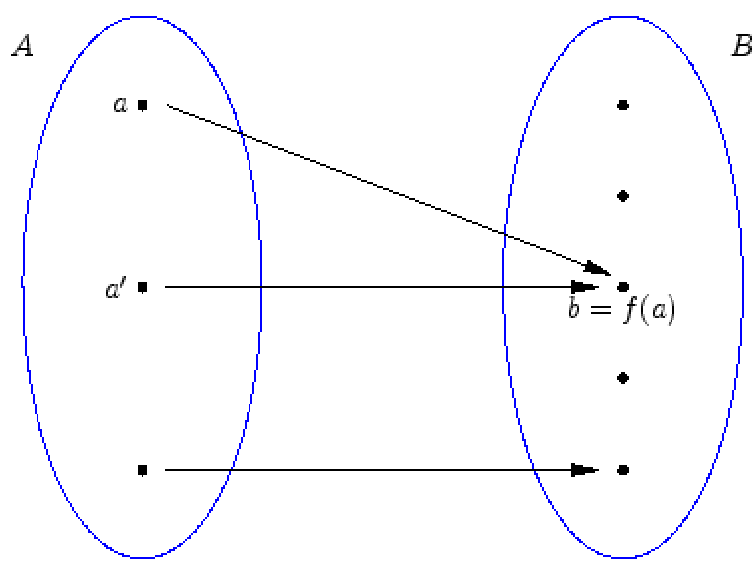
د توکو- نظم لپاره لاندې ليکندود استعماليږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a ځېږي يا ارزښت په حيث بلل کيږي او همداسې a د b (د پخوا ځېږي)د تعريف توکي په ځېږ بلل کيږي.

لکه د لاندې ځيرې ځخه چې کتل کيږي، بايد د B توکي د A د يوه توکي د ځېږي توکي په توګه رامنځ ته شي او د B يو توکی کېدی شي د A د ډېرو توکو ځبره يا نظم وي. په هر حالت بايد د A د هرتوکی لپاره په يواځني توګه يوه ځېره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر a ځخه بايد يو غشی وتلی وي.

پيژندل کيږي چې ځيره زيات تعريفتوکي يا د ځيرې پخوانی يا نوره هم ښه مخکني لري(دا په دې معنا چې ځيره کېدونکی دی)، دلته د بيلګې په توګه a او a'. د ځيرونی لپاره کليمه فنکشن هو کارول کيږي، په ځانګړې توګه په ريل ا حقيقي او کمپلکس اناليوزې کې.



ليکونکي: هيوليک،هيورنر،کيمرلي

د تابع یا خیروني یا بلواک(تابع) خویونه

د دوه ډېریو A او B ترمنځ یوه تابع

$$f : A \longrightarrow B$$

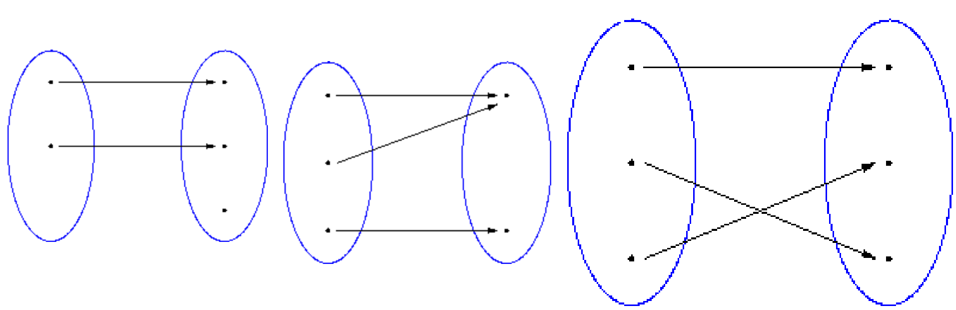
داسې یا په لاندې تکه بلل کیږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر $b \in B$ لپاره یو $a \in A$ شتون ولري د $f(a) = b$ سره.

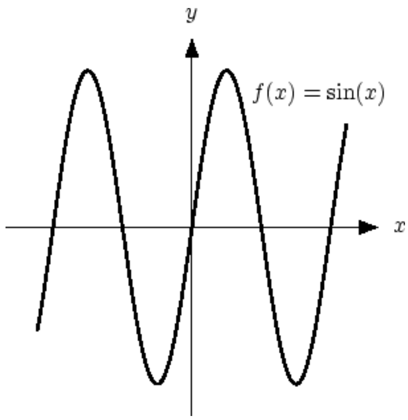
په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کې او په باندې وي.

دا کلیمې کېدی شي د ډېرۍ دیاګرام له لارې روښانه شي.



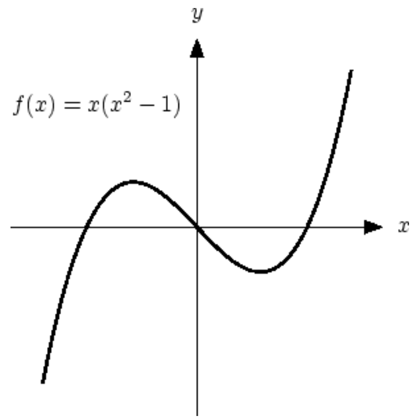
injektivپه کې surjektivپه باندې bijektivپه

د یو څو بلواکو(توابعو) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ خویونه ورکړ شوي دي



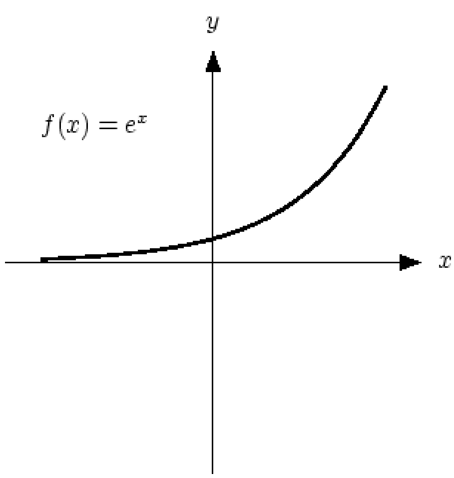
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



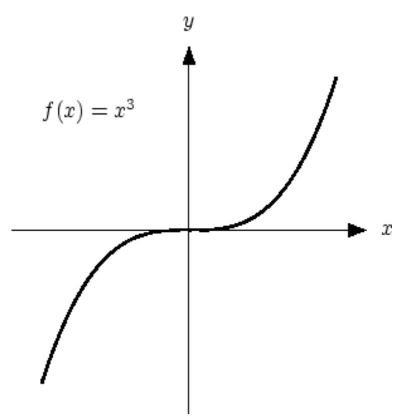
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مګر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مګر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې

د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) تړنه یا عملیې

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو $f : A \to B$ او $g : B \to C$ تړنه یا کمبوزیشن (زنځیرونه یا سره ګډ ایښونه) د

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاګرام کې لیدوړ ګرځېدلی.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې $\circ$ تړنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مګر په ځرګند ډول کموتاتیو نه ده. .

لیکونکی: هیولیک، کنش

په څټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع)Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع $f : A \to B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې   په څټ فنکشن یا برعکس تابع $f^{-1} : B \to A$ تعریف ده.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

په ځانګړې توګه $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کټمټ یا ورته تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

فاکولتې یا فکتوریل Fakultät

د لومړیو n طبیعي اعدادو یا ګڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

سره په نخښه کیږی. (لوستل یې : n فاکولتې). له دې سره کلک تړلی یا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

ګڼ یاعدد $n!$ د n مختلو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب یا نظم ګڼون یا تعداد ر ښایي

د لوی n لپاره د $n!$ اسیپتوتیکي حالت د سترلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

د بینوم ضریبونه (ځلووني) Binomialkoeffizient

د $n, k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بينوم ضريبونه تعريفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بينومي ضريب $\binom{n}{k}$ د n توکو سره يوې ډېرۍ د k - توکيزو برخډېريو ګڼون يا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی(مثلث) Pascalsches Dreieck

د بينوم ضريبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د لاندې رېکورزيون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په يوه درېګډيزې شيما يا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې يا له لارې وشمېرو.

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & 1 & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\binom{3}{k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\binom{4}{k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow \\
\binom{5}{k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

دا د ښوولو کټمټوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د $n!$ سره وېشنې او $(n-k+1)!\,k!$ سره ضربوني له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

سره برابرارزښته دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

د بینوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

د بینوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو یا اووښتونو د زیاتون یا جمعې توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

په ځانګړي توګه د $n = 2, 3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بینوم جمله کیدی شي د پوره ایدکشن له لارې وښول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کټمټوالی د

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^0b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a + b$$

له امله د په خوښه د a او b لپاره ربښتیا یا ټیک دی.

نیسو چې د n لپاره صدق کوي. نو دی:

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$=$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

د بینوم ضریبونو لپاره کتمتوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

د بينوم ضريبونو لپاره لاندې کتوتوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

لومړي دواړه کتمتوالي تړلي د بينوم د درسي څخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسې $a = -b = 1$ سره .

دريم کتوتوالی د ريکورزين فرمول په بيا بيا استعمال له لارې لاس ته راځي.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}
$$

په دې مساواتو کې د په ځای اینولو یا سبستیچیشن Substitution
$(n-k) \leftrightarrow k$
له لارې څلورم کتمتوالی لاس ته راخي.

دا اخرني دواړه کتوتوالي کېدی شي په پاشکال درېګودي کې جمعه کوني لخ لارې انخور شي.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

د ډېريو يا سټونوکمبيناتوريک Kombinatorik von Mengen

(د کمبيناتوريک د نورې زياتې کتنې لپاره دې زما دشميرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون يا تعداد وړکوي، چې د يوې د n مختلفو توکو سره ډېرۍ څخه k توکي ټاکلی شو، د کوم سره چې بايد توپير شي، چې ايا د لړۍ پرلپسې يو رول لري (ترتيبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم(د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتيب	nicht sortiert نا منتظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

ليکونکي: هيوليک،کنش

لومړی : نا ترتيب يا نا منظم ټاکنه بې له تکرار څخه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونيو لې، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري، $(n-1)$ امکانات د دويم لپاره ، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k-م توکي لپاره، نو په ټوليزه توګه

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا بايد د ګڼون يا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتيشن (د توکو ځاى بدلون : لنډ: ځاى بدلون) دى.

دویم : ناتتیب شوي انتخاب د تکرار سره

یو برابرارزښته پرابلم دادی، چې $n-1$ په نځښه شوې (نشاني شوي) د $n+k$ ټکو تر منځ ځای په ځای شي.

● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ●

△ △ △ △

د $(i-1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د i –م توکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نخښه کیدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

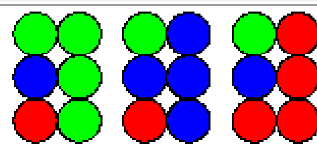
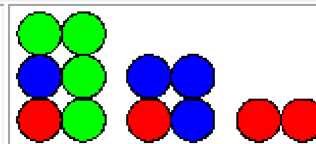
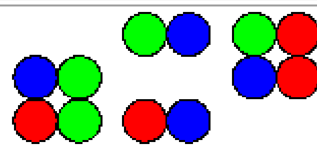
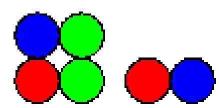
کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

دریم : د تتیب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې تړلی لاس ته راځي.

لیکونکي:هیولیک، کنش

په یوه مرتبان کې یو سور یو شین او یو اسماني توپونه (غونډوسکي) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کیږي ($k=2,\ n=3$) .

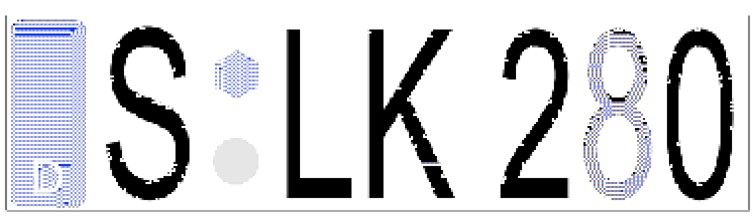
ناترتیب شوي یا نامنظم	ترتیب شوي	
$\binom{n+k-1}{k}$	n^k	د تکرار سره (دبېرته وراچوني سره)

		
	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بې د تکرار سره (نه دبېرته وراچوني سره)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
		
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

لیکونکي:هیولیک، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د یوه الماني موټر نمره د ایالت یا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمبینېشن ، د ≤ 2 نورو تورو او تر یوه څلورځایز عدد څخه د بېلګي په توګه :



له n تورو څخه 26^n کمبينېشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26+26^2+26^3)\cdot(26+26^2)\cdot 9999 = 1.28\cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار يا ايالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نيول شي

ليکونکي:هيوليګ، کنش

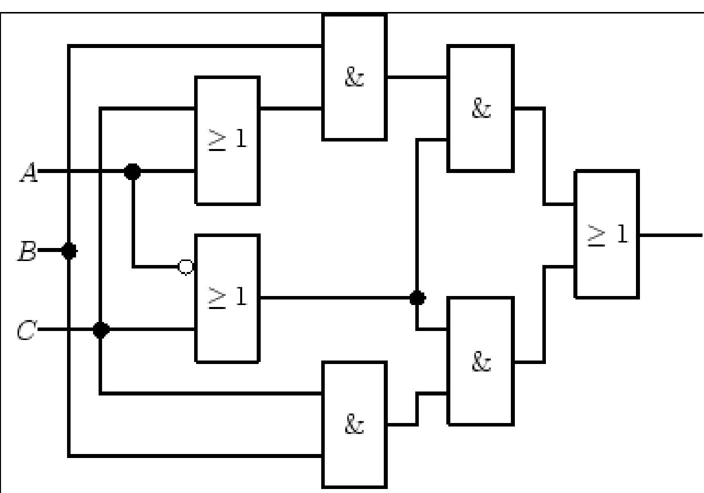
پوښتنې

- د ښه بدلون او همداسې د رښتيا جدول سره و و زاميى، چې ايا افادې يا ويېنې تل ټيک دي يعنې Tautologien دي:

$$(A\vee B)\Rightarrow\left((\neg A\vee B)\wedge(A\Rightarrow\neg A)\right)$$

$$(A\Rightarrow(B\Rightarrow C))\Leftrightarrow((A\wedge B)\Rightarrow C)$$ پای.

- اړيکې $\Diamond, \Box$ د ډېرې پوهنې څخه د منطقي عليو $\{\wedge,\vee,\Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:

	- محامخ سويچونه(شالتونګونه) ساده کړئ:

- ډېرى $A, B \neq \emptyset$ ، يوه تابع $f : A \to B$ همداسې برخډېرى $U, V \subset A$ او $X, Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړيکو رښتياوالى همداسې نارښتياوالى د يوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښايئ:

الف- $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ب - $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

پ - $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ت - $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- د يوه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې ويناوې په فورمال ليکندود افاده کړئ:

الف - fپه باندې نه دی ب - f په کې نه دی

پ – f په نه دی ت – fنه په کې او نه په باندې دی

ليکونکی: کريستيا اپيينس

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايئ:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
a)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$
b)

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايئ:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونی دی.

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ یو طبیعي عدد دی.

- په یوه میلمستیا کې 25 کسان سره یوځای کیږي. څومره لاسونه سره ورکول کیږي، که هر میلمه هر بل مېلمه ته لاس ورکړي. .

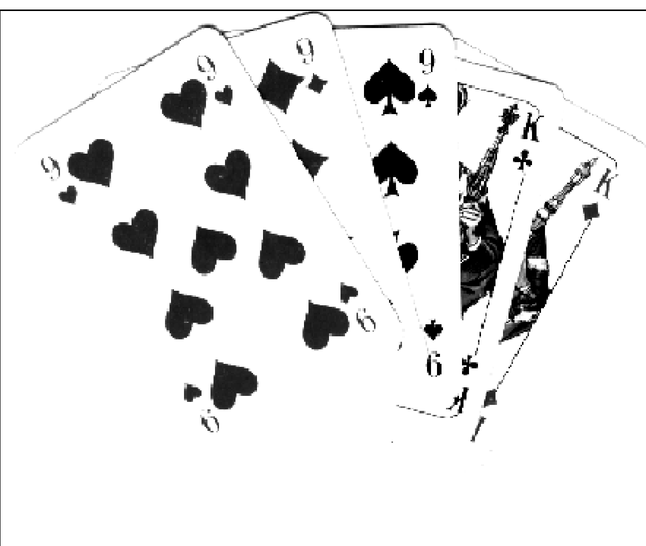
د شمیرپوهني له لومړني کورس څخه

- و ښایی:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$ **a)**

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$ **b)**

لاس ته راونې یې په پاسکال درېګوډي کې انځور کړی. لیکونکی: کلاوس هیولیګ

	- په یوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده(8 ارزښتونه 4 رنګونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابرارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟ د دې لپاره څومره امکانات شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره یو پوکر(څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟

ازماېښت Test

لومړی پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتیا ارزښت پیدا کړی

$$D: \ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ویناو A, B, C د رښتیا ارزښتونو تابع یا په واک کې وي.

هر ځل یا'w' او یا 'f' ورکړی.

دویمه پوښتنه:

ډېرې $A = \{1,2,3,4,5\}$ او $B = \{4,5,6,7\}$ ورکړی.

په ګوته کړی، چې ایا لاندې ویناوې رامنځ ته کیږي که نه(J د هو لپاره او N د نه لپاره)

دریمه پوښتنه:

د دوه هره یوه د درې توکیزه ډېریو A او B ترمنځ څومره اړیکې شتون لري؟

له ې څخه څومره بلواک یا تابع دي او څومره بلواک یې په باندې(سورجکتیو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېړی چې ایا لاندې توابع یا بلواک $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\textbf{a)} \quad f(x) = x \sin x \qquad \textbf{b)} \quad f(x) = \exp\left(-x^3 + 1\right)$$

$$\textbf{c)} \quad f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

پنځمه پوښتنه:

څومره پنځه ځایزه ګنونه یا عددونه شتون لري د لاندې سره

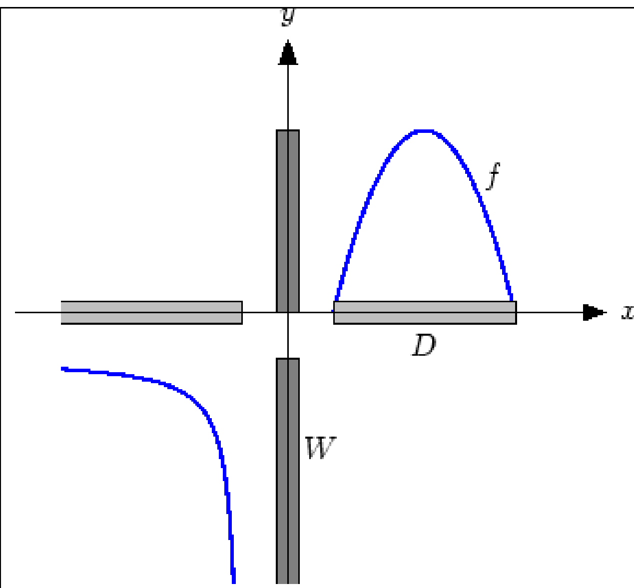
الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

څومره امکلنات شتون لري، چې ناه کسان په درېیز ګروپ ووېشو؟

تابع یا فنکشن یا بلواکFunktion



یو فنکشن

$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$

هر د تعریفورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x په یوه د ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ په یوه توکي $f(x)$ باندې تنظیموي..

د فنکشن یا بلوتک f ګراف له تکو (x,y) جوړ دی د $y = f(x)$ سره.

لکه د تابع څخه چې لیدل کیږي، د تعیف ورشو (روڼ شین) او د ارزښت ورشو(تیاره خړ) د x – محو ر همداسې د y -محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، باید په ساده تابع رامنځ ته شوي بندیزونه په پام کې ونیسو. د لوګاریتم ارګومنت باید مثبت(زیاتیز) وي:

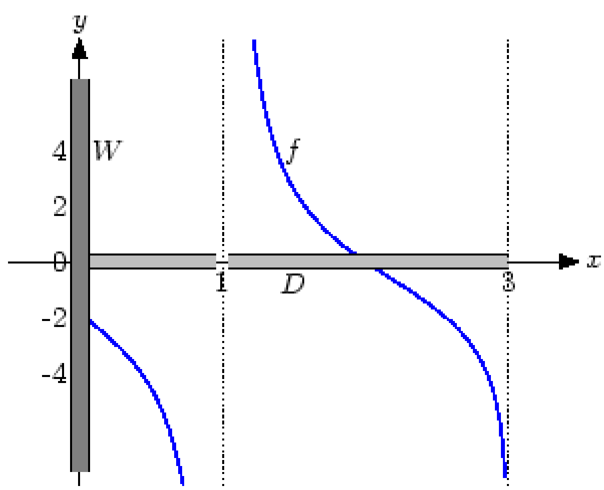
یعني $3-x>0$ او $x\geq 0.$

په هر حالت مخرـ(ماتلاندې) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې $x\neq 1$.

په ټولیزه توګه لاس ته راځي:

$$\mathrm{D}=[0,3)\backslash\{1\}=[0,1)\cup(1,3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه یا واضح کیږي.



دا چې f د $x\in(1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي یا اخلي، نو باور لري. $W=\mathbb{R}$

لیکونکي:هیولیک،هیورنر،کنش

لاندې جدول د څو بنسټیزو بلواک یا توابعو د تعریف - او ارزښت ورشو بنایي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\ :\ x=(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

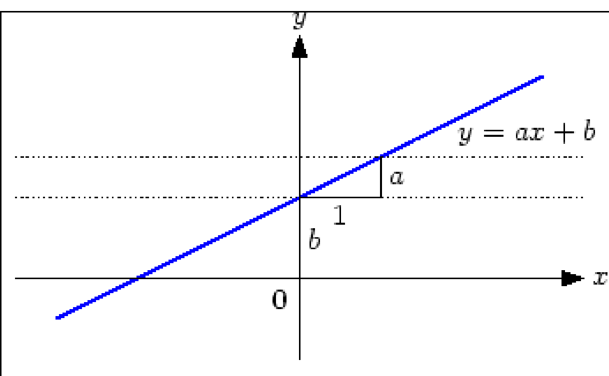
لیکونکي:هیولیک،هیورنر،کنش

کربنیز فنکشنونه Lineare Funktion

د یوه کربنیز فنکشن

$$f(x)=ax+b$$

ګراف یوه کرښه ده د a جګېدنې سره او د y -محورغوڅې b سره.



الترناتیو یا بدیلي انځورونې یې تکي-جګیدنې-بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

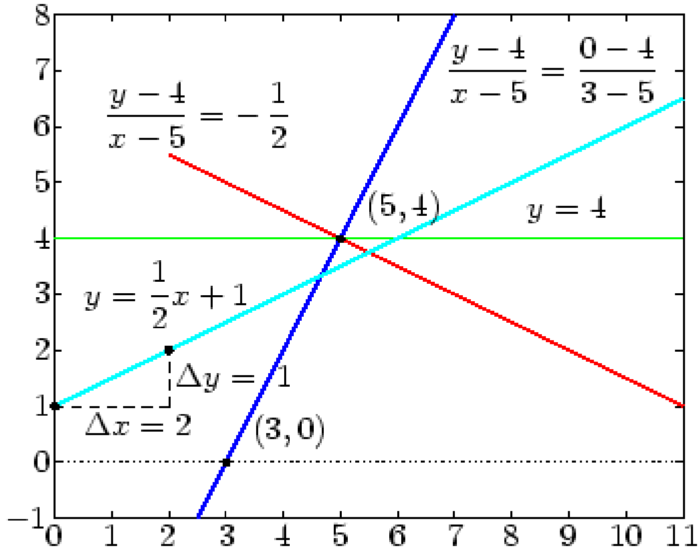
او د دوه ـټکوـبڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

دي ، د کوم سره چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه ټکي دي.

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نخښه کوي.



مربعيز فنکشنونه Quadratische Funktion

د يوه مربعيز تابع گراف

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

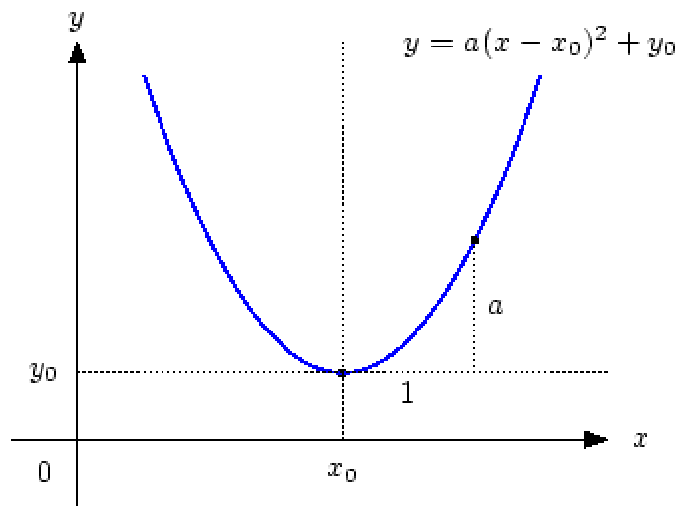
يو د

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بنې پارابول دی د ککرې

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) .$$

سره.



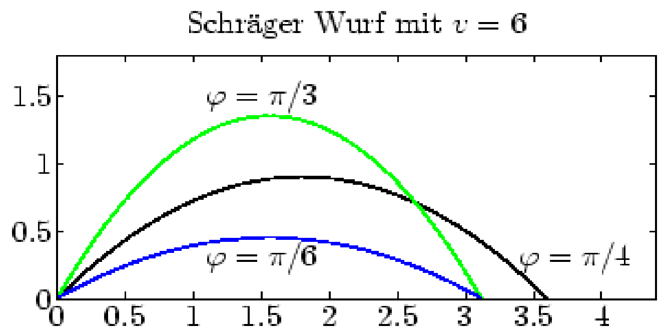
مایل ګوزار یا – غورځونه Schräger Wurf

که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2\varphi} x^2$$

ښايي ، چېرته   چې g د ځمکې بیړه(تعجیل) ده.

مایله ګوزارونه یا –غورځونه د   v=6 سره.



مساوات د برابردولیز خوزښت ښخه لاس ته راځي د پیل چټکتیا v سره په x - او y -کمپوننتونو یا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځوني بیره ییز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی:

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \,\widehat{=}\, 45°$ لپاره ماکسیمال کیږي.

لیکونکي: هیورنر،هیولیک،کنش

پولینوم Polynom

يو د n-م دجي پولينوم p په لاندې بنه ليکل کيږي:

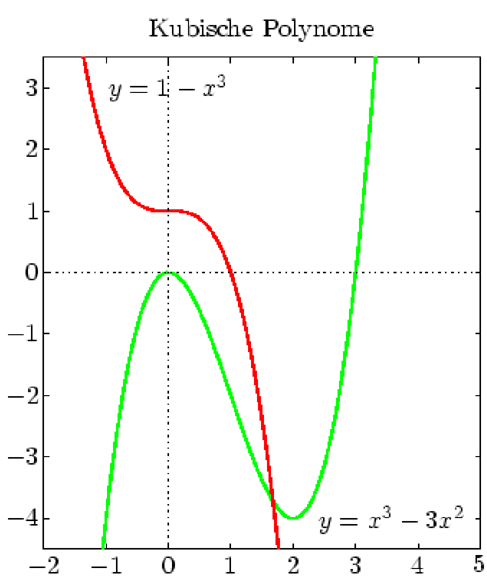
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

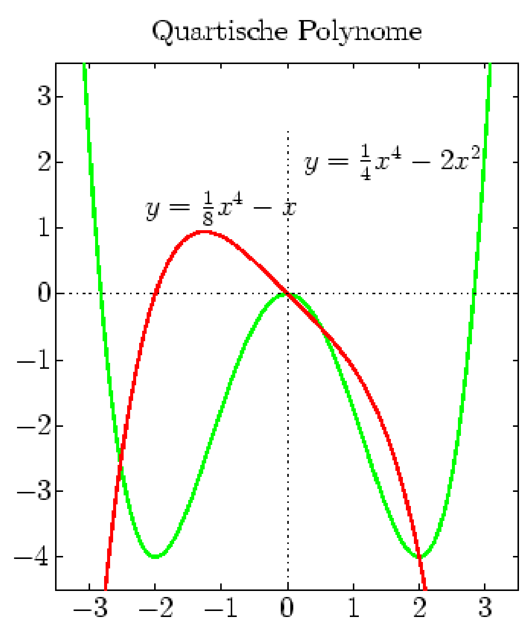
د $a_n \neq 0$ سره .

اووښتوني يا متحوله x او ضريبونه a_k کېدی شي ريښتونی (حقيقی) يا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقيقی همداسې کمپلکس پولينومونو غږيږو.

ليکونکي:هيوليک،هيرنر

لاندې توابع مکعبي $n = 3$ او مربعيز $n = 4$ پولينومونه په ګوته کوي، د خرنګوالي (کواليتي) مختلف تابع ګراف سره





ليکونکي: هيورنر،هيوليک،کنش

راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) Rationale Funktion

یو نسبتي تابع د صورت(ماتباندي) درجې m او مخرج(ماتلاندي) درجې n سره یو د دوه پولینومونو وېش دی.

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

دا انځورونه ناوېشوړ irreduzibel بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کربنيز ضريب ونه لري.

د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشياوې دي او د پول ځايونو په نامه ياديږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی دی.

د اووښتوني يا متحولي x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقيقي يا کمپلکس رېښتوني فنکشن څخه غږېږو.

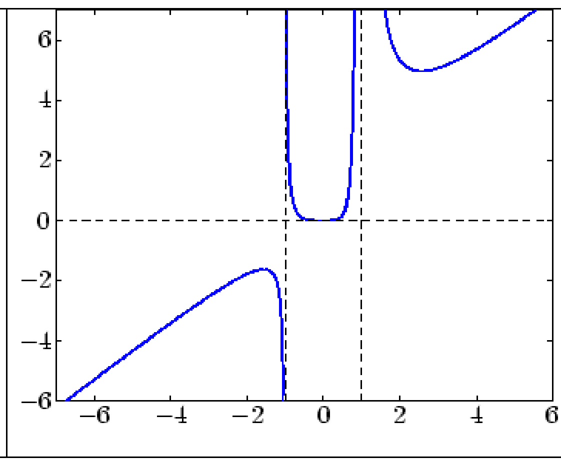
ليکونکي:هيوليک، اپپ

فنکشن

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

په $x = -1$ کي يو ساده قطب لري او

په $x = 1$ کي دبل قطب لري



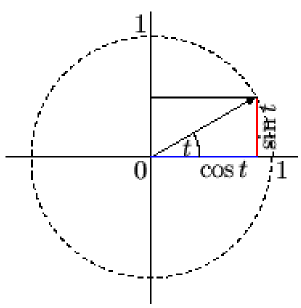
د تابع څخه پژندل کيږي، چې f په يوه ساده قطب کې مخنخښه بدلوي او په دبل قطب کې مخنخښه نه تغيروي. ليکونکي:هيوليک، اپپ

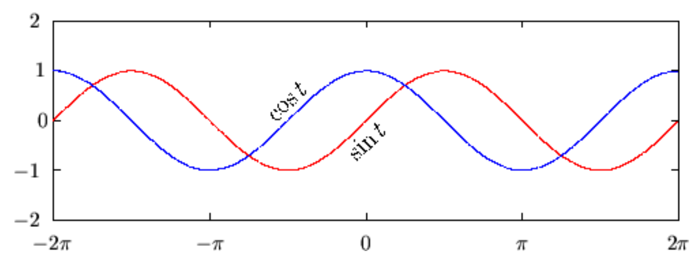
ساین او کوساین Sinus und Kosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواودينات چې په سرچينه کې په کونج t ځرخول شوی تکی $(1,0)$ په نخښنه کيږي.





دواړه د ګردی یا دايرې توابع کوسان او ساین 2π - پريوديکي (تل بېرته راګرځېدونې) دي او باور لري

- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنخښې پوري د دايرې تابع د ولاړکوډيز درېګوډي(قايمالزايه مثلث) د قطر (نيمي) سره چې ا وړدوالی يې 1 دی دو لاړو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښايي. يو ځو ځانګړي ارزښتونه يې دي:

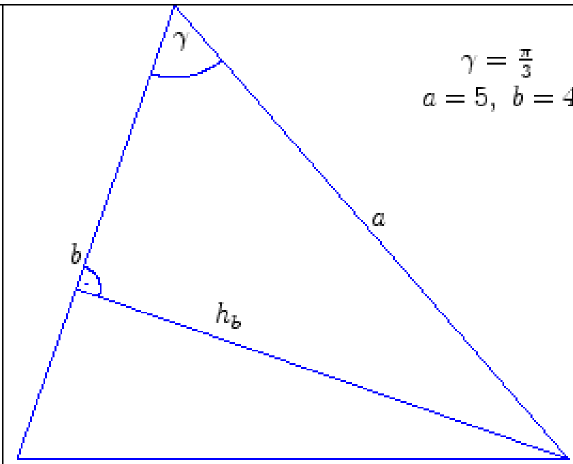
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د دې لپاره چې د ښېره شوي درېګوډي
د سطحه وټاکلی شو، لومړی جګوالی h_b
شمېرو:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma\,.$$

له دې سره لاس ته راځي:

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$$



د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس تخ راځي:

$$F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعي جمله(قضیه)

د داېرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې صدق کوي:

- $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

لیکونکی.ژ.هیورنر

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

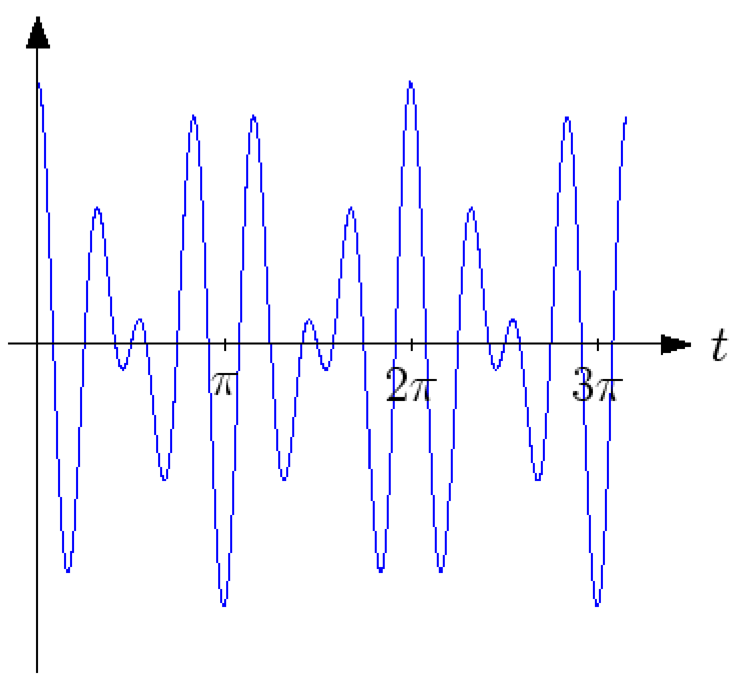
اړیکي د دوه لړزېدنو يو ځای رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضيې په مرسته کېدی شي انځورونه ساده شي. د $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ او $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ سره له

$$\cos(\overline{w} - \Delta w t) = \cos(\overline{w} t)\cos(\Delta w t) + \sin(\overline{w} t)\sin(\Delta w t)$$

$$\cos(\overline{w} + \Delta w t) = \cos(\overline{w} t)\cos(\Delta w t) - \sin(\overline{w} t)\sin(\Delta w t)$$

ځخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2\cos(\overline{w} t)\cos(\Delta w t)\,.$$



بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لړځېدنه ښايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6$. , او $\Delta w = 1$

$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t\,.$$

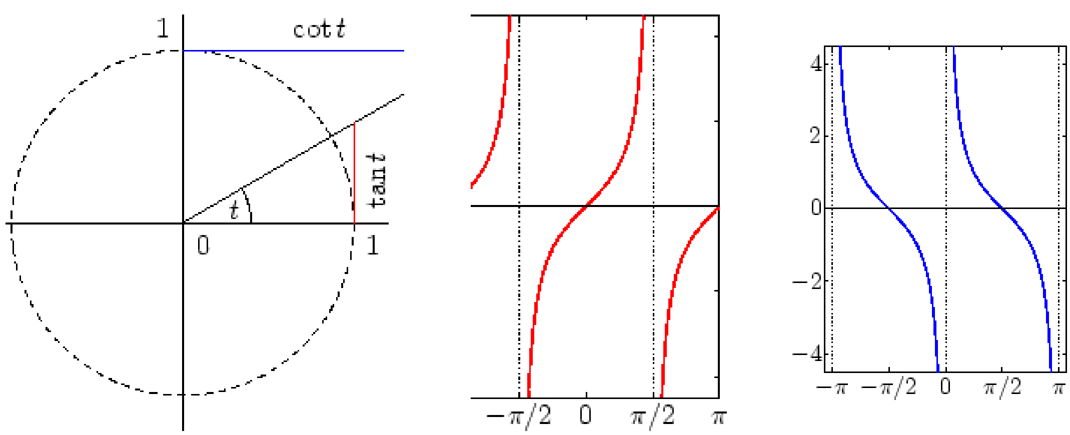
ليکونکي:هيوليک،کرايخ

تانجنت او کوتانجنت

توابع تانجنت او کوتانجنت د

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړکوډيز درېکوډي (قايوم الزاويه مثلث) کې د تر مخنښې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي

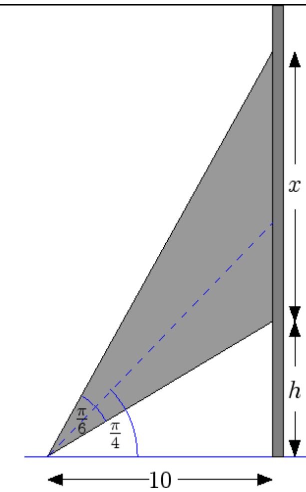


Tangens Kotangens

يو څو ځانګړي ارزښتونې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخې يو د برېښنا مخروط ،
چې په يوه ولاړ دېوال پرېوځي ښايي



د دې لپاره چې خورا لوي يا ماکسيمال پوسېده د ټاکلی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دويم مساوات کې ځايه ځاى کړوو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

يعني $x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

اکسپوننشل توابع(بلواک)

توان تابع

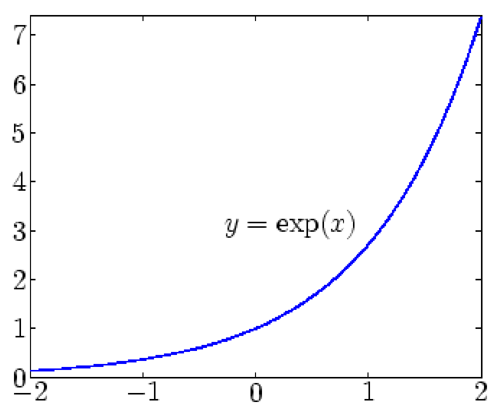
$$y = e^x = \exp(x)$$

د اویلرEulerschen عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کیږي. دا د تولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره مثبت(زاتیز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y\,.$$

پوره کوي.

په ځانګړې توګه دی $e^{-x} = 1/e^x$.



لیکونکي:هیولیک،هیورنر

اکسپوننشل تابع د ډېرو بیولوژیکي پروسو زیاتوالی روښانه یا تشریح کوي.

د بیلګې په توګه د یوه ساده نفوس مودل متناسب دی د اوسنیو نفوس تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t))\,.$$

د $\Delta t \to 0$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کیږي.

لاندې جدول د نړی نفوس ښايي د کلني ډېرېدنې سره.(اټکل ارزښت)

Jahr کال	Bevölkerungszahl د نفوسو تعداد	اټکل ارزښت Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

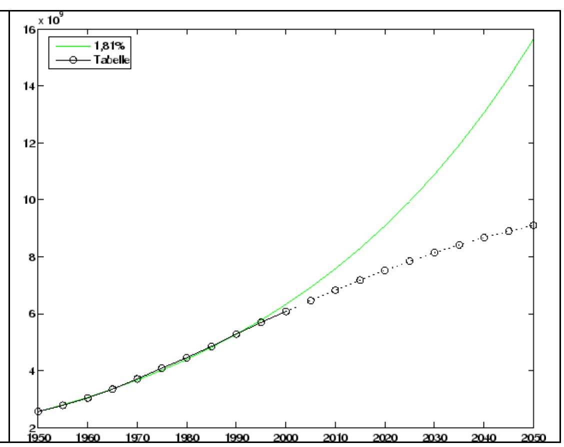
2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې % 1.81 وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050کال کې 16 میلیارده ته جګ شي(ټکي ټکي شوې کرښه (منحني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمېدو څخه مخ ته ځي

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر



د ګټې ګټه Zinseszins

یوه پیلبډایي x د n -واره وکونو همداسي اخستنو د یوې Rate r ($r < 0$ bzwهړداسي . $r > 0$) د یوې ګنې ضریب $(1+p)$ له کبله لاندې پیل پای بدآيي ورکوي :

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \,.$$

له دې سره $p = 1$ یوه 100% د ګټې د یوې ربحې د کلنۍ اېښوونه په ګوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ ګټوني څخه شمېرې کيږي د یوې p_m ربحې (ګټې سره)

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

بنستيز ه سرمايه په لومړني ربحېريود کې په پام کې نيول کيږي، اينبوونه او همداسي اخستنه يا راوستنه په لومړي څل د هر ورپسي کال. دا د ا لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad y = x(1+p) + r, \\ n = 2: &\quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټوليزه توګه صدق کوي:

$$y = \Big(\cdots\big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r\Big)\cdots\Big)$$

$$= x(1+p)^n + \left(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\right)r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کیدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واړول شي او سړی دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

یو د 100000 یورو پور(قرضه) په کلني ګټونه او یوې ګټونې یا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سړی د

$$y = 0\,,\ n = 10\,,\ p = 0.05\,,\ x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د میاشتنی د $\frac{5}{12}\%$ په ګټونې یا په ګټه اېښوونې سره دا راکوي

$$n = 120\,,\ p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{(\frac{241}{240})^{120} - 1}$$

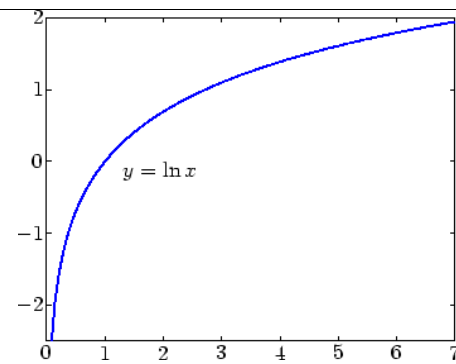
$$= 1060.66$$

د میاشتنی ګټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د ګټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12}-1}{\frac{1}{300}}-12\right)\cdot 1060.66 = 235.96\,.$$

لیکونکي : هیولیک، کرایخ

لوګاریتم Logarithmus



د لوګاریتم تابع د اکسپوننشل تابع برعکس (په ځت) تابع ده:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$

دا $(0,\infty)$ په $\mathbb{R}$ کره مونوتون(یوغږیز) کره جګېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په خانګړې توګه لرو: $\ln(1/x) = -\ln x$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

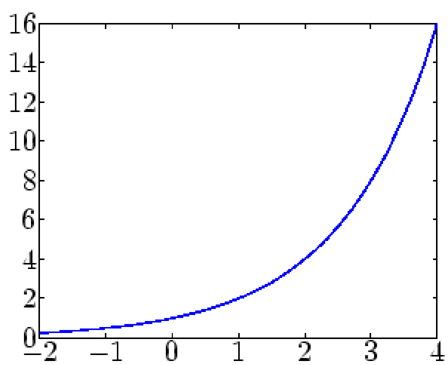
تولیز په توان تابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو :

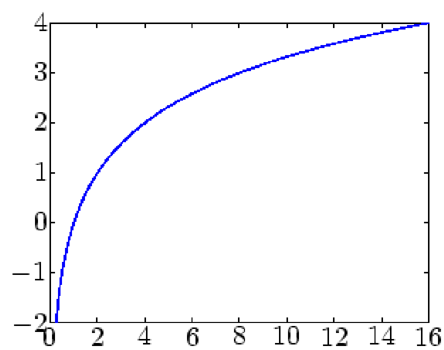
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع(بلواک) $x = \log_a y, \quad y > 0.$ سره

په ځانګړي توګه د 10 په بنسټ لوګاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوه ګوني یا دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

لیکونکی: هیولیک،کویف

د توان او لوګاریتم لپاره شمېرقوانین

له تعریفونو او تابعمساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوګاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

$$\begin{array}{rclcrcl} a^{s+t} & = & a^s\, a^t, & & \log_a x + \log_a y & = & \log_a(xy), \\ a^{s-t} & = & a^s / a^t, & & \log_a x - \log_a y & = & \log_a(x/y), \\ (a^s)^t & = & a^{st} & & \log_a x^t & = & t \log_a x \,. \end{array}$$

برسیره (سربېره) پر دې د مختلفو بنستونو ترمنځ شمېربدلون لپاره اړیکي باور لري:

$$\log_b x = \log_b a \, \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

لاندې بېلګې د شمېرقاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

ld

لیکونکی: هیولیک،کوپف

د لوګاریتم شمېرونی

په لوګاریتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبلخ کېدی شي دوه سکالا یا کچړېرنې یو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.

د پورته څېرې څخه د بېلګې په توګه لاس ته راړو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کیږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب نتیجه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

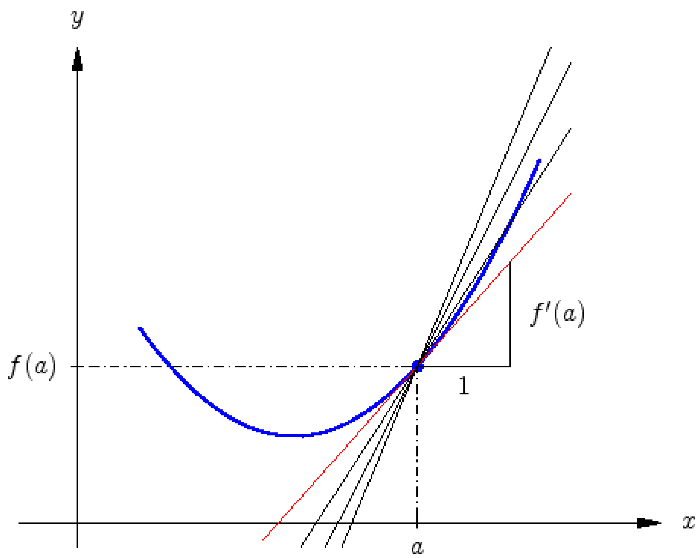
لیکونکي،هیولیګ.کوپف، ویپر

مشتق یا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع f په یوه ټکي a کې مشتقوړ دی، که دا د رابېلېدنې یا مشتق په څېر نیوله شوې پوله(لیمیټ)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري



هندسي مشتقوړوالی په دې معنا دی، چې د غ،خوون(قطاعو) جګېدنه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جګوالي په لور وهڅېږي یا کورګنت شي.

د دې لپاره $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ هم لیکو او جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ او همداسي د $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره ښایو. یو فنکشن f په یوه ډېری D مشتقوړ بلل کیږي، که $f'(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

لیکونکی:هیولیګ،کویف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ يو ثابت دی.

د يوه په خوبنه مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره ، بينوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په ګوته کوي.

ليکونکی:هيوليک،کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعي قضيې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمښتړيش لاس ته راکوي:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h} =$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

له

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

امله بنى اړخ د $h \to 0$ لپاره د $\cos x$ په لور هځيږي.

غوره (مهم) مشتقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي: :

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r , $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x+1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د مشتق کرښيزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کرښيز دی دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ضرب يا ځل قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

تولیز د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره صدق کوي:

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ضرب د قانو سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضريب په حيث ورزيات کړي، نو بيا د ضرب قانو ن استعمال لاس ته راځي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2\ln x + 1)).$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته ارېِ راوړي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2).$$

ليکونکي: هيوليک، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} = \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يي بديل لاس تهراخي

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}.$$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

زنځيري قانون

د توابعو دزنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z,\ \ g(x) = y,\ \ h(x) = z$ سره دا هم ليکل کيږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

)ليکونکي:هيوليک، کوپف

د زنځير قانون

$$h(x) = \sin\left(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\right)$$

د روښانه ونې لپاره تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځيري قانو له مخې صورت نيسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

بدیلي کېدی شي مشتقيزه ليکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي:هيوليک، کوپف

ايمپليخيت مشتقوږ توابع

د بيلګې په توګه د

$$E:\ \ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسي (هګئ يا بيضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

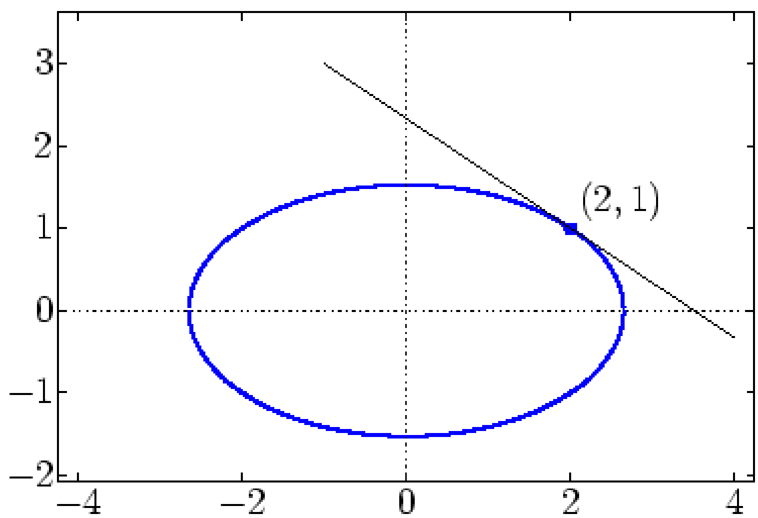
$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

.

سره د تانجنت جګوالی $y \neq 0$ باندې په یوه ټکي د E له دې سره کیدی شي په
لپاره لاس ته راځي $(2,1)$ وټاکل شي. د بیلګې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}$$
.

ټاکلي $y'(x)$ د يوه ټکي د کواوردينات اينوولو او همدا اوس د E بيرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

ليمړنکي:هيوليګ،کنپف

لوګاريتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د بڼې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نيوني ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\left(h(x)\ln g(x)\right) .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x\frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1) .$$

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي

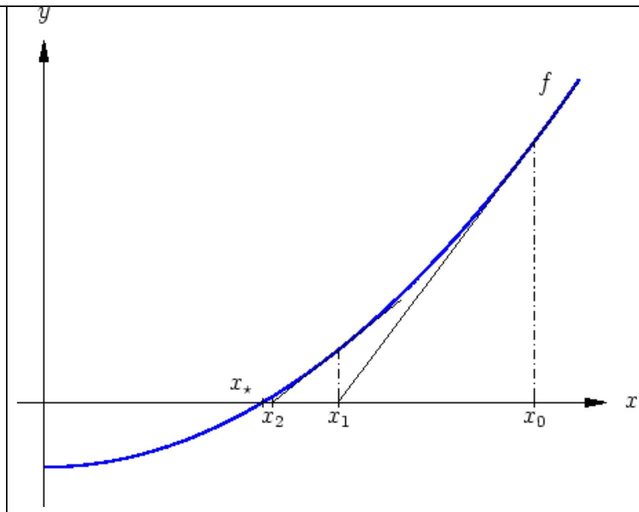
$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

نیوټن تلنلاړ یا قانون Newton-Verfahren

د نیوټن قانون سره د یوه تابع f صفرځای کېدی شي و ټاکل شي. د $x_0, x_1 \ldots$ پرلپسي یا ترادف نږدې ارزښتشمېرني یا Approximation د کرښیزوالی له لارې وګټل شي. نږدېونه x_{l+1} د تانجنتِ غوښتکی دی په $(x_l, f(x_l))$ ټکي کې د x - محور سره.

$$x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$$



د یوه ساده صفرځای $x_\star$ ($f'(x_\star) \neq 0$) لپاره د نیوټن –ایتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعیز پولې ته هځېري (کونورګنت) ، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_\star| \leq c\ |x_l - x_\star|^2$$

د پیلټکي x_0 لباره د $x_\star$ په یوه پوره کوجني چاپیریال کې.

د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه

داد بابلیانو څخه کارول شوی ایتراشن(لاتین : تکرار Iteration)

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه مثبت عدد a دریښي شمېرلو لپاره د تیکي کتني څخه د نیوټن -تګلار په څېر د $f(x) = x^2 - a$ لپاره ځان راباسي

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنې (Approximationen) لاس ته راځي.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039215 7

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

پولې ته تلنه خورا ګړندۍ ده. د هر پل سره د تیک شوو ځایونوتعداد په نږدې توګه (د کرښې سره په نخښه شوی) دوه واره کیږي. مربعیز پولې ته تلنه کېدی شي په دې بېلګه کې د ساده بڼه بدلون سره وښوول شي:

$$x_{l+1}-\sqrt{a}=(x_l+a/x_l)/2-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_l}(x_l-\sqrt{a})^2.$$

$x_0 \neq 0$

د نیوټون تلنلار هندسي روښانه ونې ځخه لاس ته راځي، چې د ټولو لپاره تکرار پولې ته ځي.

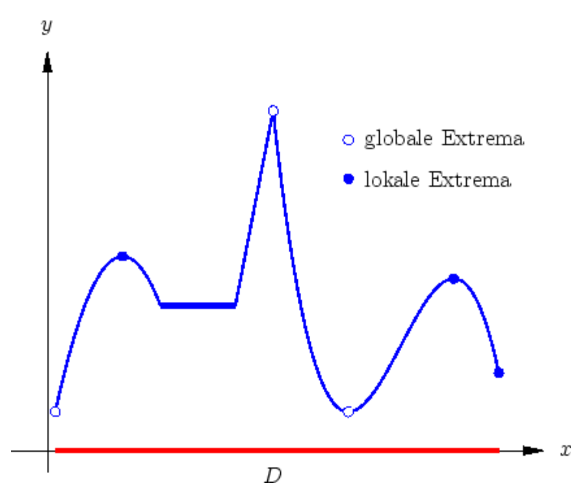
افراطيت Extrema

يو تابع f په a کې په ډېرى D يو ځاى اړوند مينيموم لري، كه وي:

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

د ځاى اړونده مينيموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په يوه خورا كوچني چاپېريال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ كې مينيموم دى.

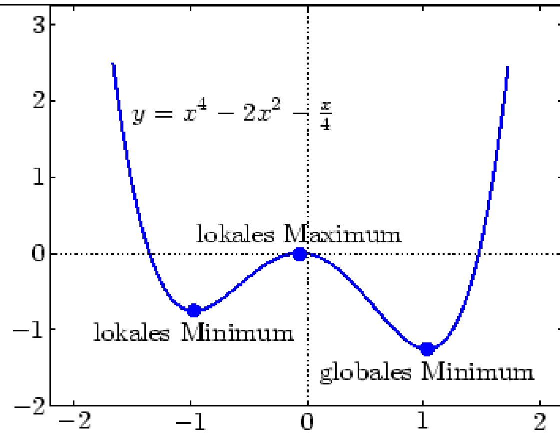
ګلوبال او لوكال (مطلق او ځاى اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماكسيموم) په ورته توګه تعريف دي.



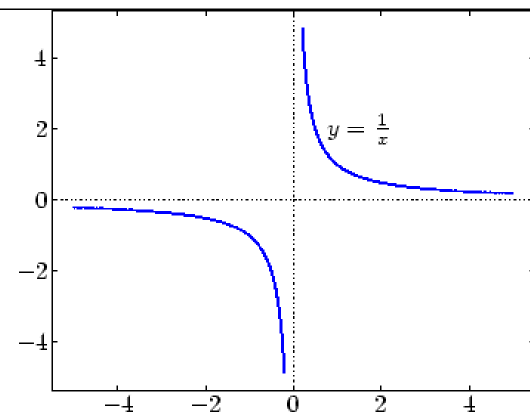
په يوه بند انټروال په ټوټه ډول نابرېكېدونى او مشتقوړ تابع كېدى شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفرځايونو، پرېكېدځايونو يا ژى ټكو كې رامنځ ته شي. دا ډول تيوپ كېدى شي د ځګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله كوني له لارې پيدا كړاى شي. ليكونكي:هيورنر،هيوليګ

په لاندې کې به یو څو تیوپیکي حالتونه تر بحث لاندې راښي یا و څېړل شي.

تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مینیما لري او یو ماکسیما. مینیمومو د خورا کوچني تابع ارزښت سره مطلقه دی. یو مطلق ماکسیما شتون نه لري، ځکه چې د $x \to \pm\infty$ لپاره $f(x) \to \infty$.

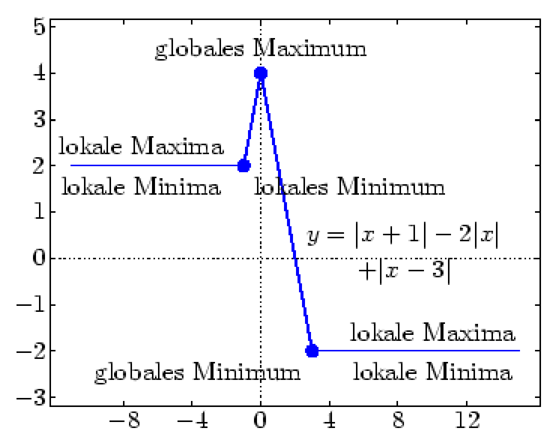


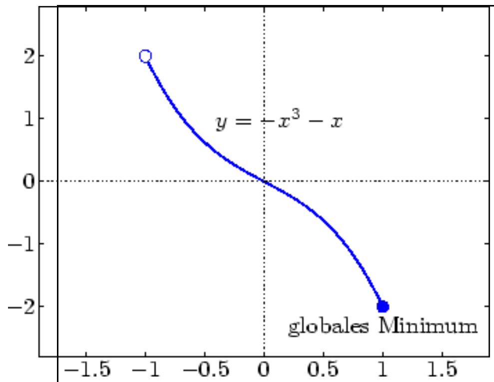
تابع د $f(x) = 1/x$ د $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره کوم افراطي ارزښت نه لري.



که یو تابع په واز انټروال کې ثابت وي، نو دا ځایونه (ځاییز (ځای اړونده) یا لوکال) ماکسیمال او هم (ځایز) مینیمال دي،

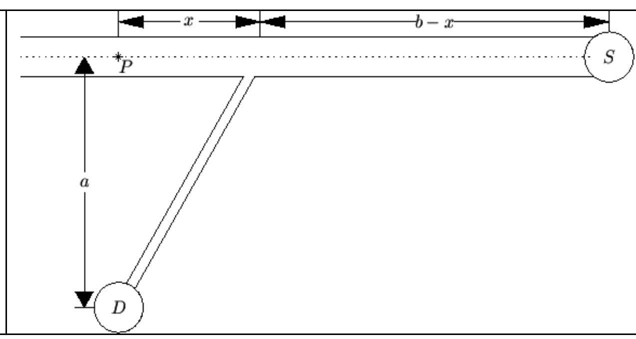
د یوه کره یوغږیز تابع سره افراطي ارزښتونه د ژۍ ټکو سره نیول کیږي، که دا دد تعریفورشو پوري اړه ولري.





لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

له یوه کلي D څخه یوه ښار S ته یو سرک جوړیږي. کلي ته په واټن a همدا اوس ښار ته یوه شاه لار (ګړندۍ لار) جوړه ده. د ښار څخه د P ټکي پورې ، چې کلي ته نږدې ګړندۍ لار پرته ده، اوږدوالی b لري.



سیده کرښیزه توټه لار جوړیږي.له کومې چې ښا رته زر رسېدل تظمینوي، که په ګړندۍ لار له $v_a = 120$ km/hمنځنۍ چټکتیا(سرعت) او $v_n = 60$ km/h په دنوې څنګیزه توټه لار لاړ شي.

واټن $x \geq 0$ د P او فرعي توټه سرک ترمنځ په ګړندي د واټن $x \geq 0$ شمېرنه د اړیین وخت د مینیمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

ښار ته د رسیدو لپاره .

د مشتق صفر اینوونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوې لار وخت د انتروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دې لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,.$$

دا اخرني نامساوات تل پوره کیږي، او له دې سره x_m اوپټیمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کې x_m په انتروال $[0, b]$ کې نه دی پروت او په ژی ټکي b پروت مینیموم ته ، یعنې ښار ته په سیده ټرنلار، رسېدی شي.

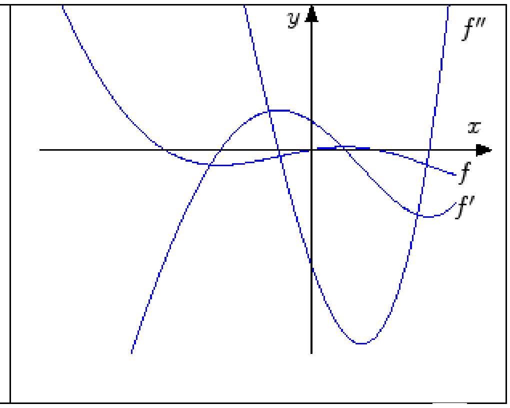
لیکونکي:هیورنر، هیولیګ

افراطي ارزښتونو ازمايښت Extremwerttest

د افراطي ارزښتونو ډول يا تيوپ باندې کيدی د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي که f دوه واره ناپرېکېدونکی او مشتقوړ وي او

$$f'(a)=0\,, \qquad f''(a)>0$$

$$(f''(a)<0)\,,$$



نو f په a کې يو ځای اړونده مينيموم(ماکسيموم) لري. که دويم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو بايد جګ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي يا راوړل شي. که باور ولري:

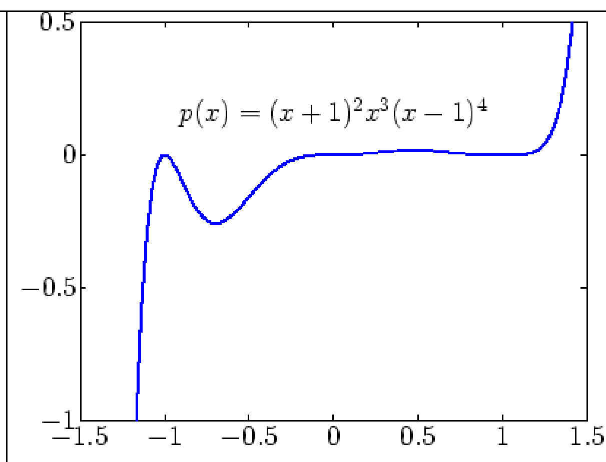
$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0 \qquad \text{او} \qquad f^{(n)}(a)\neq 0\,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالتکې f په a کې يو ځای اړونده خورا جګ – يا همداشي خورا ټيټ ټکی لري، که $f^{(n)}(a)<0$ همداسي $f^{(n)}(a)>0$ وي.

پولينوم

$$p(x)=(x+1)^2x^3(x-1)^4$$

په $x=-1$ کې يو ډبل، په $x=0$ کې يو درېواره او په $x=1$ کې يو څلورواره صفرځای لري.



صدق كوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x=-1$ كې p يو مينيموم لري. په $x=1$ كې p يو ماكس لري، ځكه چې

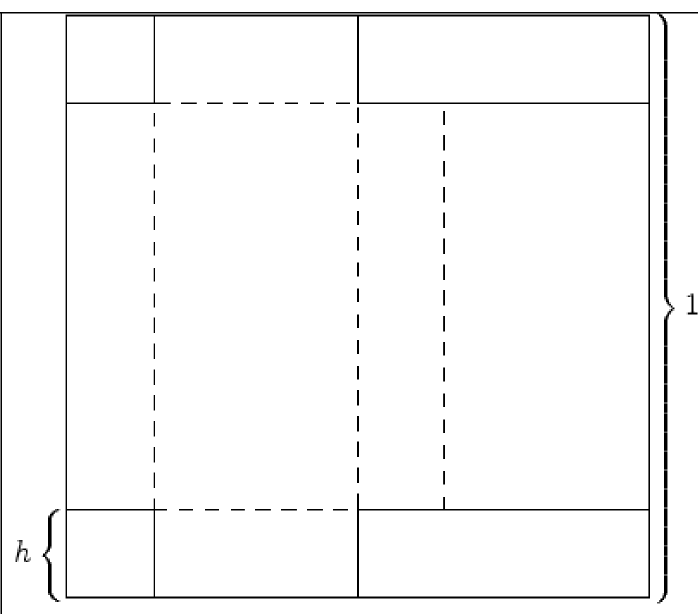
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$

بالاخره د p

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او يو مخنخښه بدلون په $x=0$ كې په سرچينه كې افراطي ځای نه شته.

كوتۍ Schachtel

د دې وركړ شوي غوڅ نمونې په مرسته دې د يوه مربع ډوله كارتوني كاغذ څخه خورا لوي كوتی جوړشي، چې خورا لوي حجم (ډكی) لري.	

حجم یا ډکی دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوال

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

ترې

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

د ممکنه ځای اړونده افراطي ځایونه لاس ته راځي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور

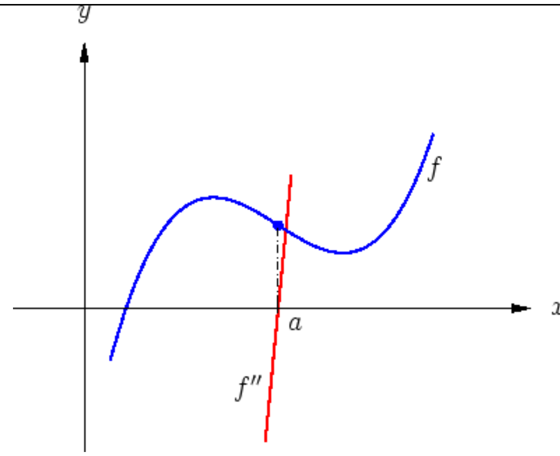
$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

دی او .

دا چې د ژۍ ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره حجم یا ډکی دی، نو کوتی د $h = 1/6$ لپاره خورا لوي حجم لري.

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

اوړونټکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)

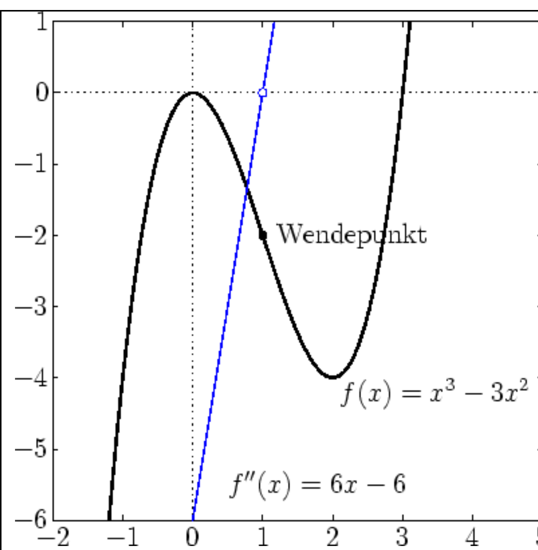
<table>
<tr>
<td>د یو تابع f په یوه اوړونټکي a کې دویم مشتق مخنخښنه بدلوي (یعني په دې ټکي کې تابع خپله لور بل لور ته اړوي) .</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې $f''(a) = 0$ او پوره دی، چې $f'''(a) \neq 0$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

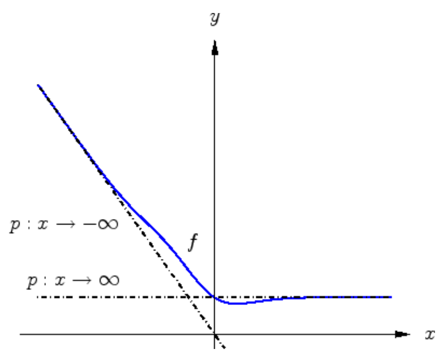
<table>
<tr>
<td>تابع یو مکعبي پولینوم ښايي.

دا چې دویم مشتق کرښیز دی، نو ټیک یو اوړونټکی(د انعطاف ټکی) شتون لري

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

ګاونډې یا لنډ: ګاونډ (مجاورتها Asymptoten)

یو تابع د یوه تابع f اسیمپتوت دی ، که $f(x)-p(x)\to 0$ وي د $x\to\infty$ یا د $x\to-\infty.$ لپاره.



په ورسره بلد ډول p د f په څېر یوه ساده بڼه لري او د دې په چوپېرکې ، چې د $f(x)$ د څرنګوالي حالت د لوی x لپاره وڅېړي.

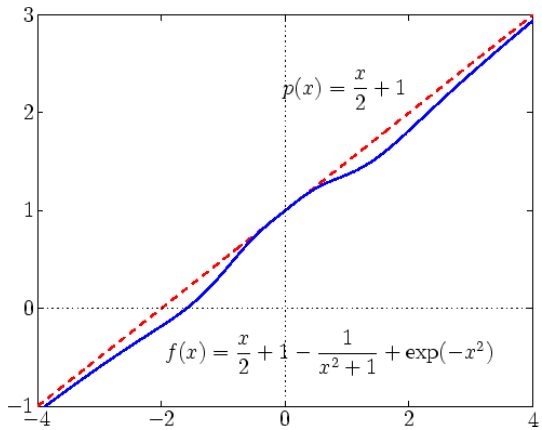
د ځانګړو معناو کرښيز اسیمپتوتونه $p(x)=ax+b$ دي. دوي د نورو ترڅنګ د منحني یا کږو بحث کې یو رول لوبوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوه څېره شوي یا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x|\to\infty$ لپاره تناسب د کرښيزو ترمونو له خوا ټاکل کیږي، څکه چې

$$\lim_{|x|\to\infty}\exp(-x^2)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\,.$$

له دې لاس ته راړنې سره کرښه $p(x)=x/2+1$ اسیمپتوت ده.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپټوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

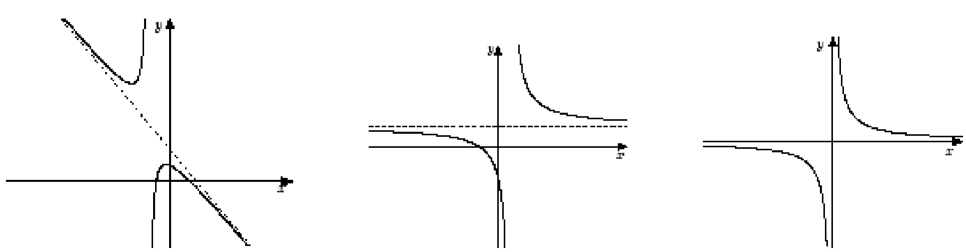
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کرښیز اسیمپټوت لري که $q+1$ له ګراد یادرجي $p \leq$ وي.

د $\text{Grad}\ p < \text{Grad}\ q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

داپه دې معنا چې د x -محور اسیمپټوت دی.



د $q+1$ Grad $p \leq$ Grad $q \leq$ Grad e لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د پولینوموېش له خوا:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د Grad $\tilde{p} <$ Grad q سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده $(a = 0)$ ، که Grad $p =$ Grad. q وي.

که د صورا درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي پولینوم لري د ≥ 2 درجې

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1} \quad \text{او} \quad r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

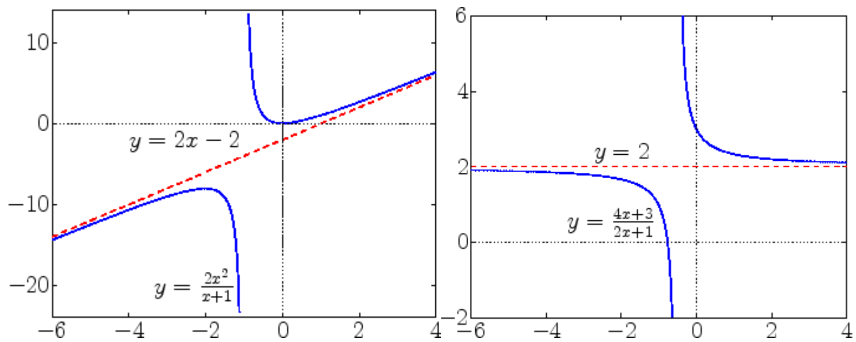
او

$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

اسیمپتوت یا ګاونډ

$y_1 = 2$ او $y_2 = 2x - 2$.

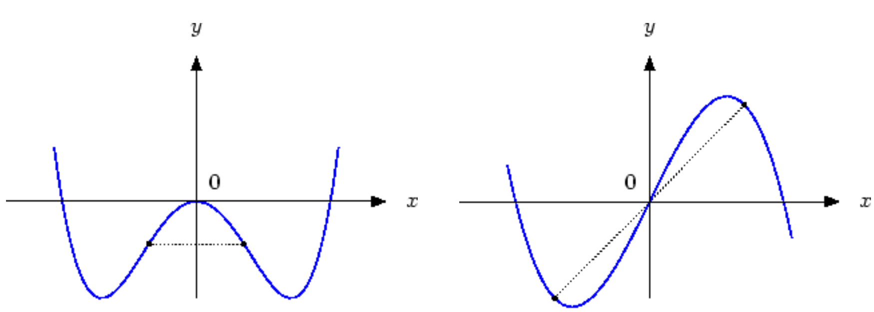
دا دوه ببلګې په لاندې ځېرو کې روښانه شوې دي.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

سیومتري Symmetrie

یو تابع f جوړه(جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که ګراف د y-محور ته سیومتري وي. د یوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف و سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

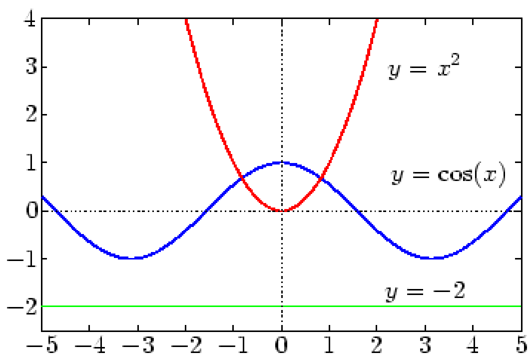


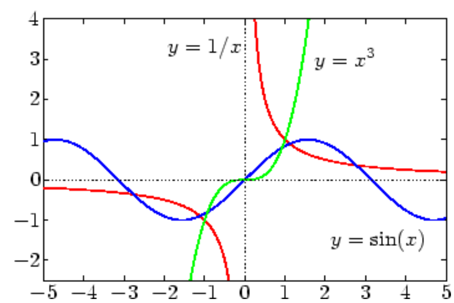
gerade Funktion   ungerade Funktion

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د يوه جوړه او يوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه يا طاق دی. د جمعې او تفريق جوړولو سره ډول ساتلی پټيږي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

دا لاندې ځېره ښي لور ته يوځو جوړه او کيڼ لور ته يو څو ناجوړه توابع ښايي.





د مناسبو کمبينېشنونو جوړولو سره نورې بېلګې لاس ته راځي. نو   توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x)\sin x - g(x)x^3$$

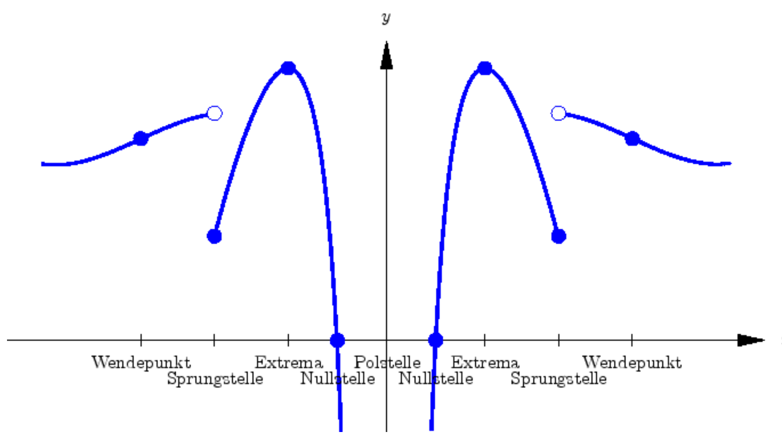
ناجوړه دي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

د کږو يا منحنيو خبرې اترې(بحث)

د يوې تابع د ځرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

- سیومترSymmetrien
- تل بېرته راګرځېدنوالی Periodizität
- پرېکېدنځایونهUnstetigkeitsstellen
- (Nullstellen ⟶ Vorzeichen مختښنه (صفرځایونه
- (Extrema ⟶ Monotoniebereiche همغږیزوالي وشوګاني) افراپیت
- (Wendepunkte ⟶ Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو) اوړونټکی د انعطافنقطه
- قطبځایونهPolstellen
- اسمپتوتي یا ګاوندیتوبونهAsymptoten



د توابعو داسې یو تحلیل د ګړو خبرې اترې یا د منحنیو بحث بلل کیږي

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کړو بحث ښوول یا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

خیړو .

سیمتري: دا چې $\sin x = -\sin(-x)$ ناجوړه تابع دی..

تل ببرته راګرځېدنه يا پريوديځيتي: تابع پخپله لکه د ساين تابع پخپله 2π - پريودي ده او په راتلونکي کې فقط په انټروال $[-\pi,\pi]$ ترڅېړنې راځي.

د پرېکېدنې ځايونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړهشوې او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري.

صفرځايونه: د جمعې(زياتون) قضيې سره $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

دی:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کې صفرځايونه لري..

افراطيت: تابع

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ يا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکيږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف او پريوديکي ده، ژيتکي ترڅېړنې نه راځي.

د دويم مشتق د مخنخښې يعنې

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\ \sin x$$

مخنخښې او تابع ارزښتونو د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی(نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \overset{!}{=} 0$$

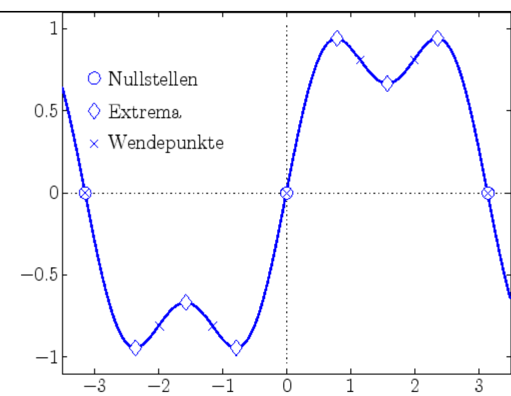
د $\sin x = 0$ یا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

په دې ځای کې درېم مشتق صفر نه دی. نو تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې اوړونټکي لري، همداسي په $(-1.99,-0.81)$ ، $(-1.15,-0.81)$ ، $(1.15,0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې نږدې ازښتونه لري.

قطبونه : ناپرېکېدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپتوتونه: تابع پریودیکي او نا ثابت دی، نو اسیومپتوتونه نه لري.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

بېلګه :

د يوه کړې بحث د ښوونې لپاره يو تابع

$$f(x)=\frac{5x^3+4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترڅېړنې لاندې نيول کيږی.

سيومتري: صورت ناجوړه(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوړه دی، داپه دې معنا چې سرچينې ته ټکی سيومتريک دی.

پريوديوالی يا تل بېرته راګرځېدنوالی: تابع پريوديکي نه دی.

د پرېکېدنې ځايونه: صفرځايونه ± 1 د صورت صفرځايونه نه دي . له دې سره f په $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ باندې ناپرېکېدونکی دی.

صفرځايونه: صورت د $x=0$ لپاره ورکيږی.

افراطيت:

$$f'(x)=\frac{5x^4-19x^2-4}{20(x^2-1)^2}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$$

دا چې تابع ساده صفځايونه لري، نو افراطيت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2,-4/5)$ ځای اړوند خورا جګ ټکی ، $(2,4/5)$ ځای اړوند خورا ټيټ ټکی.

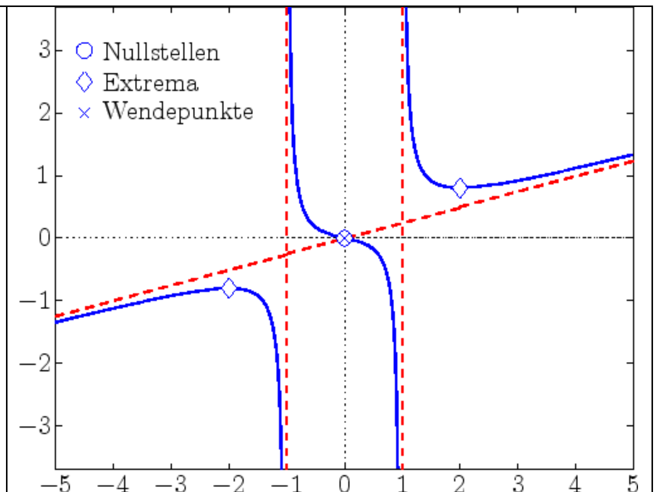
له دې سره کېدی شي، چې د f ډول يا ټيپ د کواليتاتيو حالت ښخه. دا چې $f(x)\to-\infty$ د $x\to-\infty$ او $x\to-1$ لپاره ، بايد په انتروال

$(-\infty,-1)$ کې يو ځای اړونده مينيموم ولري. په ورته توګه په $(1,\infty)$ کې لږ تر لږه يو ځای اړونده خورا ټيټ ارزښت.

اوړونتکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

په دې ځای کې دريم مشتق صفر نه دی.

قطبځايونه: تابع په $x=\pm1$ کې ساده صفرځايونه لري، اسيمپتوتونه: ديوه پولينوم وېش څخه $p(x)=5x/20+0=x/4$ د اسيمپتوت په توګه لرو. ليکونکي:هيوليک،هيورنر	

بېلګه:

د کړې يا منحني بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نيسو:

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

سيومتر:

داچې x^2 او $|x|$ جوړه دې تابع جوړه دی، داپه دې معنا چې سيومتريک و y-محور ته.

پريوديوالی: تابع پريوديک نه ده.

پرېکېدنځايونه: تابع د ناپرېکېدنتوابعو څخه مرکبه (يوځای اينبول) شوې ده او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهپه صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځايونه: اکسپوننشل تابع تل مثبتّ(زاتيزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځايونه نه شته.

افراطيت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\operatorname{sign}(x) \overset{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

سربېره پردې دې کريتيکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره f لږ ترلږه يو مطلق مينيموم لري، مګر هيڅ مطلق ماسيموم. پرتله د y - ارزښت کريتيکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

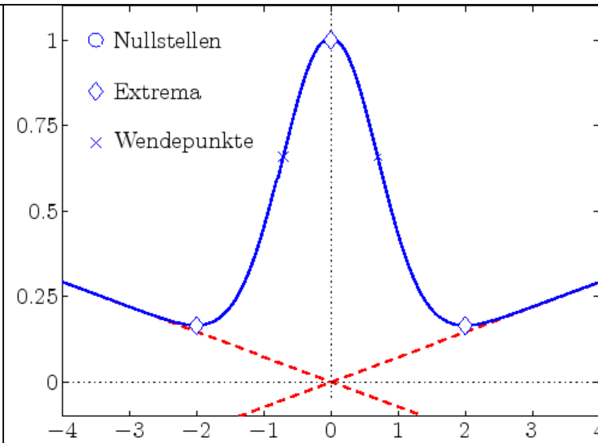
ښايي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مينيموم نيولکيږي. داچې f په انتروال $[-2,2]$ يو مينيموم او هم يو ماکسيموم لري، لاس ته راځي چې $(0,1)$ يو ځای اړونده مينيموم دی.

اوړونټکي :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دې ځای کې $\neq 0$ دی.

	قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري. اسیمپتوتونه: دا چې e^{-x^2} له $\lvert x\rvert$ څخه د $x \to \infty$ لپاره ګرندی د صفر په لور درومي، تابع اسیمپتوت $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او ی: لیکونکي هیورنر، هیولیګ

د ریمن انتیګرال Riemann-Integral

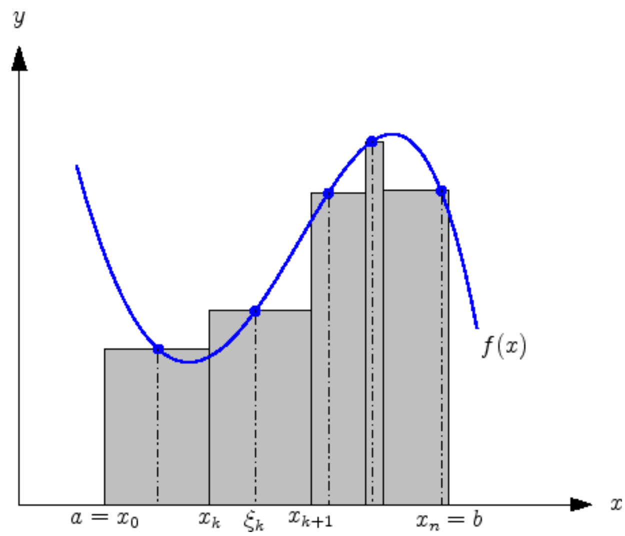
دیوه توته دوله (په توته توته کې) ناپرېکېدونکی تابع f تاکلی انتیګرال د

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له خوا یا سره تعریف دی. دلته $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ د $[a,b]$ توته ونه بنايي،

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,,\qquad |\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$ د انتروال ماکسیمال اوږدوالی دی او

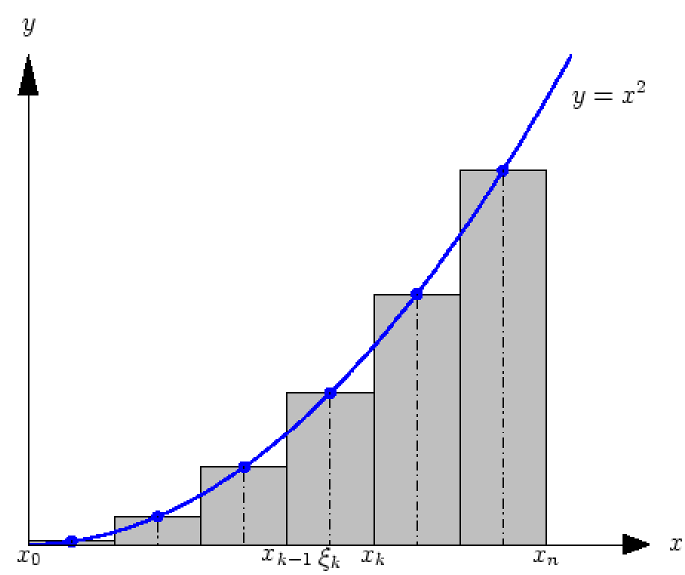
ξ_k په خوښه ټکی دی په k -م انتروال کې. د انتیګرال تعریف په بنې لور جمعي د ریمن – جمعو په نامه یادیږی.



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د سطحې مساحت دی د f د ګراف لاندې.

ليکونکي: هيوليک، هيورنرو ويپر

د $\int_0^1 x^2\,dx$ د ريمن انتيګرال په حيث راوړنې سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې(ترادف)



$$\Delta_n : x_i = i/n \, , \, i = 0, \dots , n \, ,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځايونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n) \, , \, i = 1, \dots , n \, ,$$

سره د n -مې توته ونې لپاره.

د تعريف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n \to \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

.

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره ليکو

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c$$

د ټول بنسټيزو توابعو ډېرئ يا سټ د ی ، چې د f ناټاکلی انتيګرال بلل کيږي. د انتيګرېشن ثابته په خوښه ده. د بېلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره يو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټيزو توابعو داسې اکسپليځيت ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بيلګه ده: $f(x) = \exp\left(x^2\right)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2\,, \quad F_2(x) = x^3\,, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2\,.$$

يو بنسټيز تابع دی.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $c > 0$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

يو بنسټيز تابع دی.

ليکونکي: هيوليک،کرايخ

د انتيګرال شمېرنې اصلي جمله

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټيزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

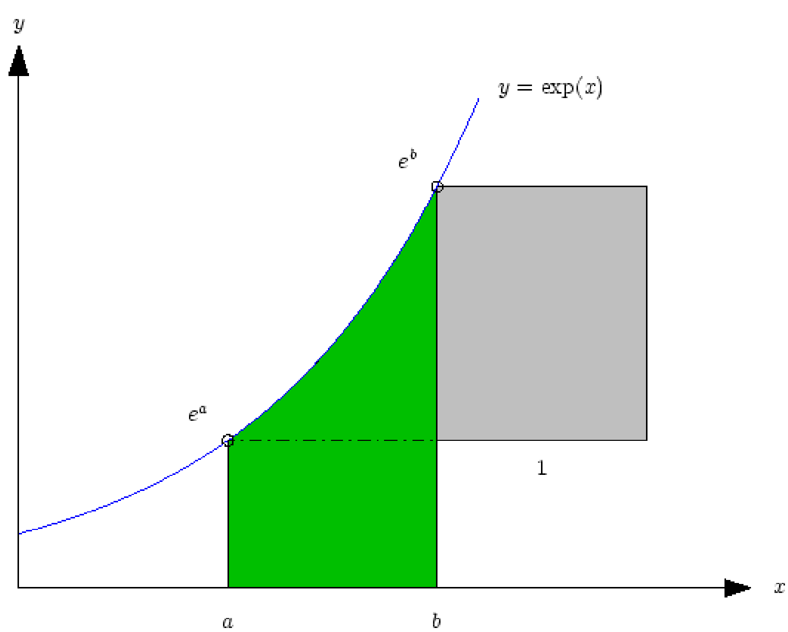
همداسې په لنډ ليکډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

يو ټاکلی انتيګرال کېدی شي د بنسټيزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:



$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

د a او b ترمنځ دګراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو دجګوالي واټن څخه جوړ ولاړګوډیز (مستطیل).

د لوګاریتمي تابع $F(x)=\ln(x)$ مشتق $F'(x)=1/x\,,\ x\in\mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b)-\ln(a)\,,\quad a,b\in\mathbb{R}^+\,.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ یو بنسټیز تابع $F(x)=\arctan x$ دی . په تعقیب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1)-\arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x)=\tan x$ بنسټیز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پایله ده:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

يو پلانېټ د M کتلې سره يو د ګراويتيشن (راکښنې ورشو) ورشو توليدوي، چې په يوه تن يا بدن د m کتلې سره يوه قوه $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. د لته د γ ګراويتيشن ثابته ده او x د درووند ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره بنسټيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو بدن د a څخه و b ته په واټن يوسي، بايد کار

$$\int_a^b F(x)\, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\left[\gamma m M/x\right]_a^b$$

$$= \gamma m M(1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي .

د a لپاره مساوي د پلانت وړانګه او $b \to \infty$ کېدی شي د کينېتيکي انرږي سره د مساوي اينسوني له امله داسي په نامه د تېښتي چټکتيا يا سرعت v و ټاکل شي،داپه دې معنا چې چټکتيا ، چې اړيينه ده، د يوه پلانېټ ګراويتېشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2$km/s. لرو.

ليکونکي: هيورنر، هيوليګ

غوره – یا راوتلي بنسټيز توابع

لاندې جدول د زيات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټيزو توابعو $F(x)$ جدول ښايي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\|x\|$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

ټوټه انتيګرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)' = f'g + fg'$ له مخې د ناټاکيو انتيګرالولپاره يو ورته فرمول لرو:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژۍ ترمونه $[fg]_a^b$ ورکیږي، که یو له دې دواړو توابعو په انتروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیکي توابعو لپارهم ورکیږي ، د پریودې اوږدوالي $(b-a)$ سره.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توګه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sqrt{1-x}}_{v'}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \qquad 0-\left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د اووښتونو (واريابلو) بدلونVariablensubstitution

د زنځيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنسټتوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

که په انتيګراند کې دنننی مشتق پېژندوړ وي، لکه د بېلګې په تګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلګه کې ږدو

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2\,g'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په ښت بدلون له لارې لاس تهراځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

په تيپيک ډول د بدلون له لارې سړی هڅيږي چې انتيګرال ساده کړي.دبېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره په نږدې توګه ږدو

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتیګرال راکوي.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ په څېر یا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د مرکاتور پرپوستون Mercator-Projektion

بنسټتابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

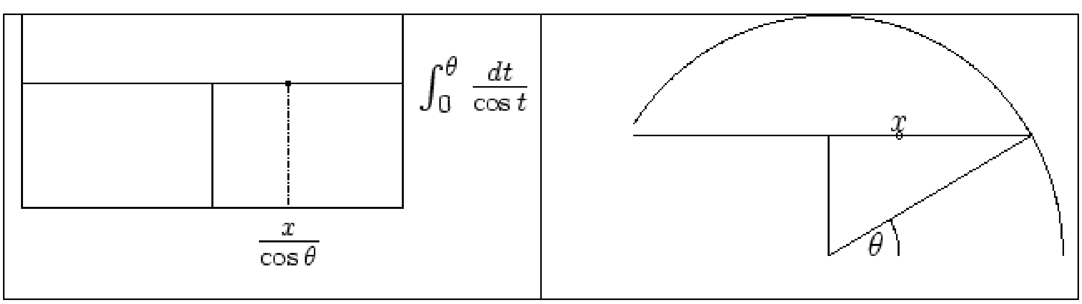
کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

سره وشمېرل شي.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکي پوښ سطحه کرنجساتونکي یا کرنجيښتوني په یوه سطحه پریوځي یا پری ایستلی شي.



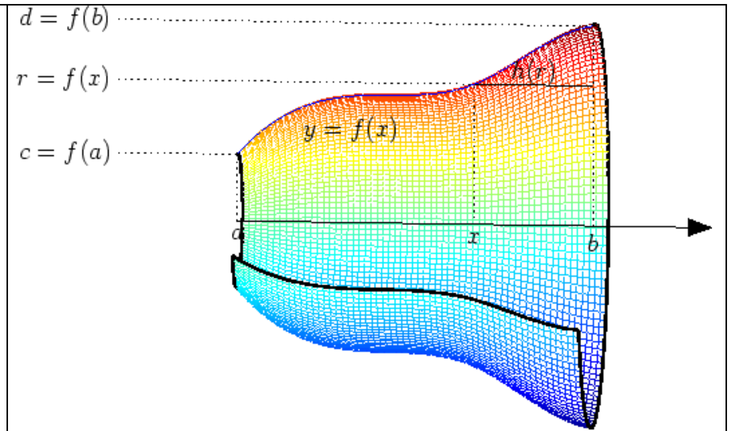
دلته سور درجه یا عرض البلد په اړيکو $1/\cos\theta$ غزول شوی.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د څرخېدونکو بدنونو ډکی(حجم) Volumen von Rotationskörpern

په x -محور د تابع $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ د څرخېدنې له امله جوړ شوی بدن V ډکی(حجم) کېدی شي د ګردی ډوله(دایره ډوله) پروټِ غوڅیو انتیګرال له لارې و شمیرل شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$



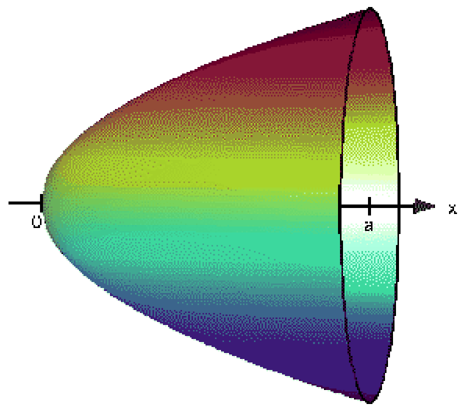
په بدیلي ډول کېدی شي توتې(استوانې) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

$$V = \pi c^2 (b-a) + 2\pi \int_c^d r\, h(r) \, dr \, ,$$

د کوم سره چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیمال وړانګې r دي او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتې پوښ تول جګوالی دي د وړانګې r سره. دا بدیل د تولو له مخه د همغږیز وړانګې تابع f لپاره موخه ور دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

دا جوړ یا څېره شوی پارابولوید د x – محور باندې د کرې $y = \sqrt{x}$ څرخون سره منځ ته اځي



د ځرخون بدن د فرمول سره سم ډکی)حجم) دی:

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

په بدیلې توګه د توتې پوښ باندې انتیګرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Diss . Uni. Wien Algebren .

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

<u>Bonn (Germany): 2003</u>

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

<u>1997 Bonn (Germany):</u>

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په الما ن کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل اناليز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوی په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولې.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځې (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځې له لومړې ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکترې په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبرورې تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

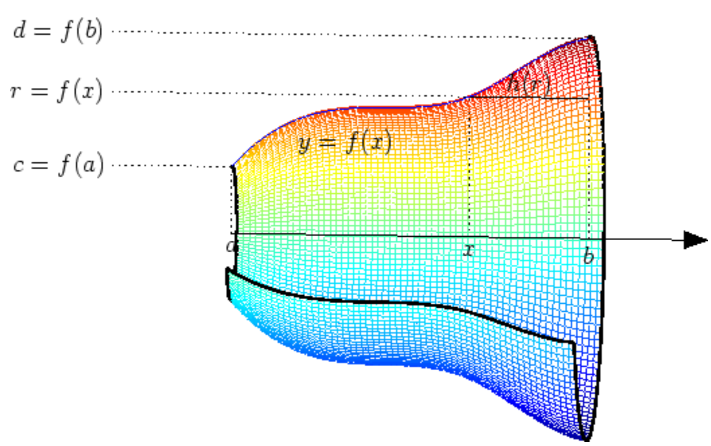
له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې. ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو لیکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.

د شميرپوهنې بنسټونه



ليكونكي: پروفيسور هيوليګ او ډله يې

له مات. ن ج څخه

ژباړي : ډاکتر ماخان میرې شینوالری