

# د شميرپوهنې بنسټونه

ډاکټر ماخان ميري شينواری

[Ketabton.com](http://Ketabton.com)

وینا

د وینا لاندې یوه ژبنیزه افاده یا وینه پوهیږو، چې د دې لاندې دوه رښتیا ارزښتونو ،، رښتیا، (wahr) ،، همداسې ،، نارښتیا، یا ناتیګ (falsch) ،، څخه د یوه سره تنظیم کیدی شي.

ویناوې په لویو تورو  $A$  سره په نڅښه کيږي : ، او کېدی شي د منطقي یا سم اندیزو عملیو سره وتړل شي. بنسټیزې شمېرپوهنیزې وینې یا افادې ، چې له نورو افادو څخه منځ ته نه شي راتلی اکسیومونه بلل کيږي

لاندې بیلګه د دې شمیرپوهنې وینا روښانه کوي.

وینا

$A$  : هر طبیعي عدد د لومړنیو عددونو ضرب دی. دا یوه رښتیا وینا ده.

وینا

$B$  : هر لومړنی ګڼ یا عدد ناجوره یا طاق دی. دا چې 2 جوړه یا حفت عدد او پریم دی، نو وینا نارښتیا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

$C$  : ناپای ډیر د پریم اعدادو څېرګوني شته. دا یوه شمیرپوهنیزه وینا ده، ځکه چې دا یا رښتیا ده او یا نارښتیا. دلته موخه د لومړني عدد د څېرګوني څخه هغه لومړني ګاونډي ناجوره عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بیلګې په توګه.

(3, 5), (5, 7), (11, 13), ... .

دا تراوسه حورا لویه د لومړنیو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$1 \pm 2^{171960} \cdot 16869987339975$

د کره کونې سره

$D$  : د جمعي ۱۳ مه يوه د بدبختی روح ده.

دا يوه وينا نه ده، ځکه چې دا په يوه رښتيا ارزښت نه شي تنظيمولی.

ليکونکي: هولېگ، هورنر

### منطقي (سم انديزې) ترنې (که غواړې: عملي يا نېلوني)

منطقي يا سم انديزې ويناوې کېدې شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عمليو سره و تړل شي.

يادونه : له کين و بني لور ته.

نومونه	ليکنود	ويينود	ټيک هلته رښتيا، که
	$\neg A$	نه $A$	$A$ نارښتيا ده.
Konjunktion يا د او ترنه	$A \wedge B$	$A$ او $B$ ) (	$A$ او $B$ رښتيا دي
Disjunktion د يا ترنه	$A \vee B$	$A$ يا $B$ ) (	$A$ يا $B$ رښتيا ده.
Antivalenz نابرابر ارزښته	$A \neq B$	$A$ يا $B$ ) (	$A$ او $B$ بيل رښتيا

			ارزښتونه ري
Implikation ترې لاس ته راورنه	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	له $A$ څخه $B$ له $B$ څخه $A$	$A$ نارښتي يا $B$ رښتيا ده
Äquivalenz برابر ارزښته	$A \Leftrightarrow B$	( $A$ و $B$ ته برابر ارزښته دی ( يا له $A$ څخه $B$ لاس ته راځي او برعکس	او $B$ همغه يا برابر رښتيا ارزښتونه لري

د دې لپاره چې په منطقي افادو يا وینو کې نوکان يا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې  
 $\neg$  له  $\wedge$  او  $\vee$  څخه کلک يا قوي نښلوي او دا بيا له  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$  او همداسې له  $\neq$ .

دا ایمپليکیشن په پام کې ونیسئ، چې  $B$  ټیک هلته رښتيا ده، چې  $A$  رښتيا وي. له  
 ناتيکو نیونو (فرضیو) ، ټیک يا رښتيا او يا هم نارښتيا پایلې را وپسندل کیدی شي.

دا د یا ترني لپاره نڅښه یوه  $\vee$  په شان نڅښه ده، چې د (vel (lat. oder) (یا)  
 لپاره ځای په ځای شوي. د یا ترني لپاره کېدی شي چې سومبول ، ، + ، وکارول شي  
 او د او- ترني لپاره ، ، - ، . ، که سومبول 0 د ناتيک يا غلط لپاره وکارول شي او  
 هر بل ارزښت د رښتيا په څیر و کارول شي، نو کېدی شي منطقي ترني د طبیعي  
 عددونو شمېرنې له لارې هم پر مخ بوتلای شو يا استعمال کړای شو.

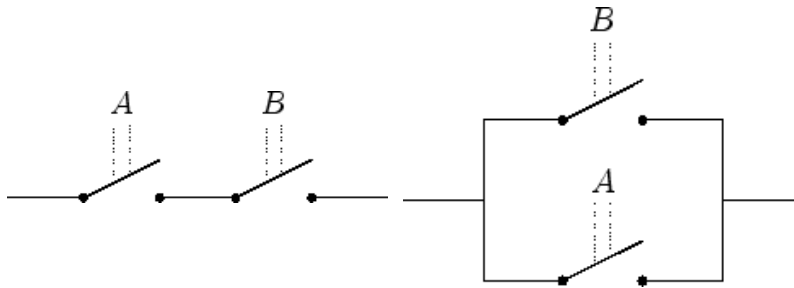
په شمېروني (کمپيوتر ژبه کې له انگرېزي راغلي کلیمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion) (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (دیسجکشن)، یا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بی له یا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی NAND (negierte Konjunktion) (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی دیسجکشن) او NXOR (Äquivalenz) (برابرابر ارزښته) لپاره کارول شوي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کیمرلي

که وینا د سویچ په څېر انځور کړو، چې تړلي وي، که وینا رښتیا وي، په همدې توګه واز ، که وینا نارښتیا وي، نو کېدی شي مسلسل سویچونه د یا – تړني په څېر او غبرګ سویچونه د او-تړني په څېر صورت ومومي .

د او-تړنه

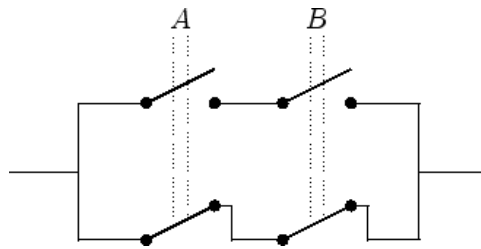
د یا-تړنه



یوه نه-شوي وینا یو سویچ دی، چې تړلی دی، که وینا نارښتیا وي. له دې سره کېدی شي سویچ څېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ایمپلیکیشن لپاره ورکړل شي.

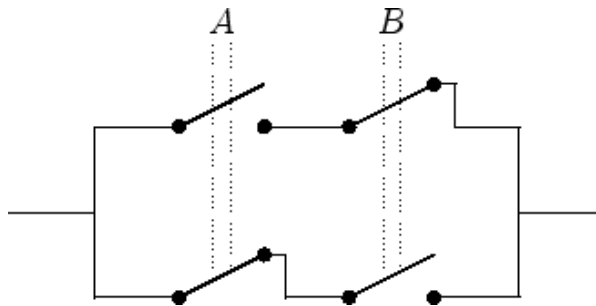
$$A \Leftrightarrow B : \text{همداسې } (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Äquivalenz:



$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$        $A \neq B$   
 همداسي      نابرابر ارزښته:

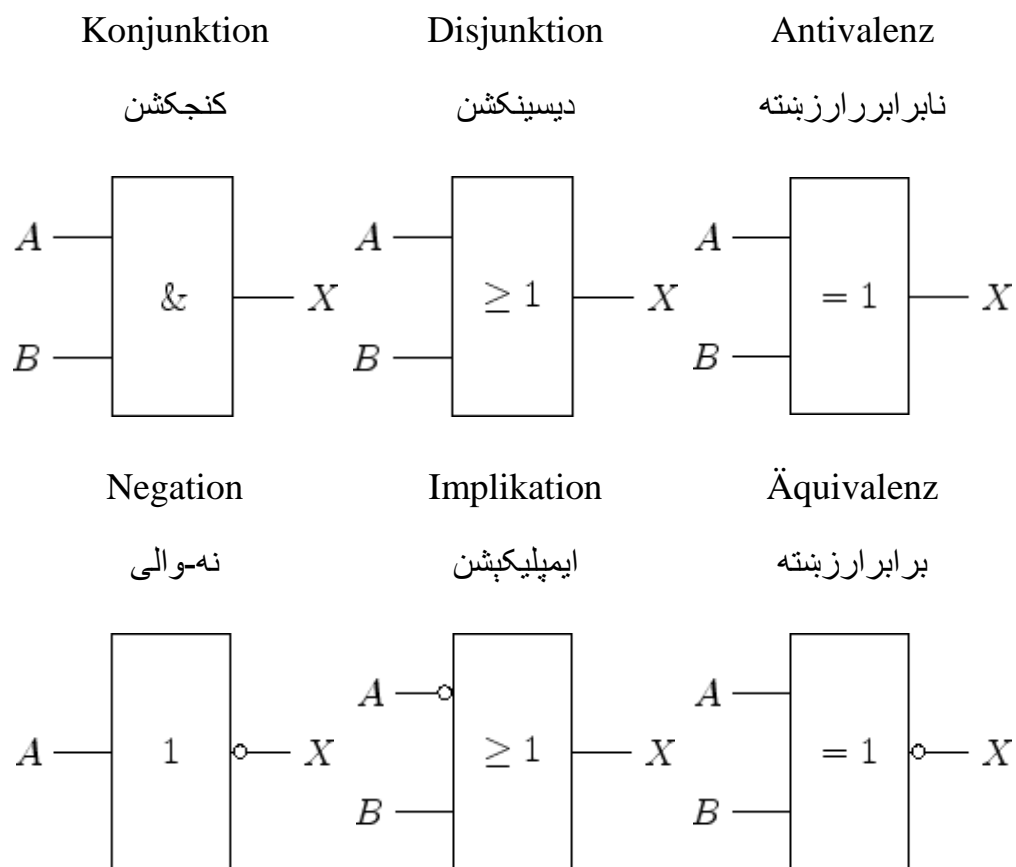
Antivalenz:



<p>ایمپلیکیشن یا تری لاس ته راتلنه:  <math>\neg A \vee B</math> همداسي <math>A \Rightarrow B</math></p>	
---	--

سویچونه کیدی د ترانزیستور له لاری منځ ته راشی یا صورت ومومي، چي په جگ یا ټیټ ایښول شوي شپانونگ جریان مومي یا تیریري. د (1) ارزښت جگ شپانونگ دی ټیټ یا کم شپانونگ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونگ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړگوډیز (مستطیل) خڅه جوړ دی، په کومو کې چي اړونده ټرني ورکړ شوي دي. یو نه-والی د یوي گردی (دایري) سره په نخښه شوی دی.



منطقی عملیو لپاره لاندی کتمتوالی Identitäten باوری دی.

اسوخیاتیو قانون: Assoziativgesetze:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

کموناتیو یا بدلیدنقانون: Kommutativgesetze:

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

د دې مورگان قانون: De Morgansche Regeln

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

دېسټریبوتیو قانون: Distributivgesetze

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور:

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتیو یا بدیلی انجورونه



ایمپلیکشن  
 Implikation:  $A \Rightarrow B = \neg A \vee B = \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz:  $A \Leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz:  $A \neq B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بدیلی فرمولونه زیات وخت په بنوونو کې استعمال مومي.

یوه منطقي افاده یا وینه ، چې درامنځ ته شوی وینا رښتیا ارزښت خپلواکه تل رښتیا همداسې نارښتیا وي، تاوتولوجي **Tautologie** همداسې کونترادیکشن **Kontradiktion** بلل کیږي. داسې یوه افاده کړی شي د بڼه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانگړې توگه دا کټموالی باور لري:

$A \vee \neg A = w$       bzw.       $A \wedge \neg A = f$  ,  
 همداسې

$A \vee w = w$       bzw.       $A \wedge w = A$  ,  
 همداسې

$A \vee f = A$       bzw.       $A \wedge f = f$  .  
 همداسې

لیکونکي: هیولیک،، هیورنر

د دې مورگان قانون او د دېسټریټیو قانون کېدی شي وېنول شي، داسې چې د وینا د رېنتیا ارزښت لپاره ټول امکانات وځیرل شي. د دې مورگان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

$A$	$B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$ , $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ایمپلیکېشن، برابر ارزښتوالي او نابرابر ارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعریف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وینا

$$\underbrace{|x - 1| > 1}_A \implies \underbrace{(x < 0) \vee (x > 1)}_B$$

بڼه دلیري.

د دې مورگان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x < 0) \wedge \neg(x > 1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1).$$

له دې سره سم ایمپلیکېشن  $A \implies B$  د وینا د

$$|x - 1| \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 1.$$

سره برابرازبنته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راڅي ، که ایمپلیکیشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x - 1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلگې په توگه افاده یا ویبڼه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایمپلیکیشن پهڅای ایښونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راڅي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B).$$

د دېتريپوتیو قانون له مخط دا وینا برابرازبنته ده د  $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$  سره.

پېژندل کیري، چ د  $B$  ارزښت بي اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او  $L = \neg A$ .

د منطقي افادې  $L$  د ازمایښت ته الترناتیو یا بدیلې کېدی شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا استعمال شي.

$A$	$B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	$L$
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

f	f	w	f	w
---	---	---	---	---

له دي دا هم لاس ته راځي:  $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو، شتون لري...،، .، د ټولو ... لپاره،، لپاره لنډونې شتونکوانتور  $\exists$  او ټول کوانتور  $\forall$  استعماليري.. دا کوانتورونه زيات وخت د  $A(p)$  سره په تړاو کې استعماليري، چې د يوه پارامتر  $p$  چې د ډېرې يا ست  $P$  توگې دی، په واک کې دي.

Schreibweise ليکندود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P : A(p)$	يو توگې $p$ له $P$ شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتيا دي.
$\forall p \in P : A(p)$	د ټولو $p$ لپاره چې له $P$ دی $A(p)$ رښتيا دی.

د دواړو وينا ډولونو د نه والي سره کونټوونه هم بدليري.

$$\neg(\exists p \in P : A(p)) = \forall p \in P : \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P : A(p)) = \exists p \in P : \neg A(p)$$

دا  $\exists!$  ليکن ډول هم روځنی دی د فرمولولو لپاره، چې،، ټيک يو ... شته،،

د کوانتورونو د شمېرنې بنوونې لپاره وینا

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n \in \mathbb{N} : n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon$$

راورل کيږي. دا په دې معنا چې یوه لړۍ (ترادف)

$$a_1, a_2, \dots$$

د 0 په لور یا 0 ته هڅيږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی  $n$  لپاره د  $a_n$  مطلق ارزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند یا بندیز  $\varepsilon$  څخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړې وینا نه شي او کوانتورونه سره بدل شي،

$$\exists \leftrightarrow \forall.$$

د ایمپلیکېشن یا لاس ته راوړنې یا – راتلنې ایښوونه او د مورگن قانون څخه لاس تهرځي

$$\begin{aligned} \neg(n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon) &= \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) = \\ &= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

له دې سره د نه شوي وینا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_\varepsilon \exists n \in \mathbb{N} : n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon.$$

دا په دې معنا چې پرلپسې (ترادف)  $(a_n)$  د 0 لورته نه هڅيږي. دا په دې معنا چې یو

لرښت  $\varepsilon > 0$  شتون لري، چې له هغه پرلپسې  $|a_n|$  تل بیا اوري یا تېرېږي.

لیکونی:ک. هیولیک

سیده بنوونه

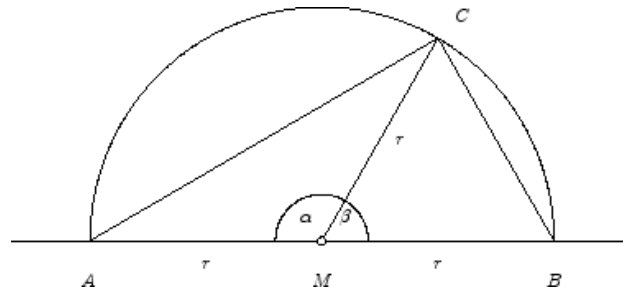
یوه غوښتنه ثبوت)  $B$  کېدی شي و بنوول شي، چې هغه له رښتیا وینا  $A$  څخه را منځ ته شي او یا په داسې بېرته وړول شي.

$$A \implies B .$$

ویناوې  $A$  کړی شي وړاندنیونې ( فرضیې ) هم ولري، چې هغه د غوښتنې  $B$  لپاره اړینی دي.

لیکونکی: هیولیک

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم گردی (نیم دایره) کې رابند درېګودی (مثلث) ولاړګوډیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده بنوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول: په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه  $\pi$  ده.

دویم: د یوه برابر پښیز (یا که غواری: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه برابر لوي دي.

که دا په مثلث  $\Delta(CMB)$  او  $\Delta(AMC)$  و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi - \alpha}{2}, \quad \sphericalangle MCB = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

$$\angle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

$$\alpha + \beta = \pi$$

او د له امله په  $\pi/2$  سره برابر.

### ناسیده بنوونه

د دې لپاره چې وښایو چې له یوې وړاندنیونې (فرضیې)  $V$  څخه غوښتنه (ثبوت)  $B$  لاس ته راځي یعنی  $(V \implies B)$  ، کېدی شي ونیسو ، چې وینا  $B$  د  $V$  د وړاندنیونې له امله نارښتیا ده، دا مو یوه تضاد ته بیایي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د  $F$  سره یوه نارښتیا وینا ده، په ځانګړې توګه  $F = \neg V$  یا  $F = B$  .

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \implies B),$$

که وړاند نیونې نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیک، کنش، اببرین

ایمپلیکېشن تری لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

$$\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$$

د سره برابر ارزښته دي.

که ایمپلېکشن رېنتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنيزو قوانينو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه (ثبوت)  $B$  رېنتیا وي، ځکه چې  $\neg V$  نارېنتیا ده او  $F$  يا نارېنتی او يا د  $B$  سره برابر دی.

ليکونکي: هیوليگ، هیورنر

د دې ناسیده بنووني د روښانه ونې لپاره بڼايو، چې  $\sqrt{2}$  ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات يا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه  $B$  نارېنتیا ده. بس باور لري

$$d. \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad \text{ggT}(p, q) = 1. \quad \text{سره .}$$

دلته  $\text{ggT}$  انگرېزي يې  $\text{gcd}$  خورا عت کډپروېشوني (ذوالضعاف الاقل) دی.

د نیوني څخه د مربع کوني او د  $q^2$  سره ضربوني له امله لاس ته راځي

$$2q^2 = p^2,$$

دا په دې معنا چې  $p^2$  او له دې سره  $p$  یو چوره يا جفت عدد دی. په ځانگړې توگه یو  $r \in \mathbb{N}$  شتون لري د  $p = 2r$  سره. د  $q^2 = 2r^2$  له امله  $q$  هم یو چوره عدد دی او له دې سره  $\text{ggT}(p, q) = 2$ . دا د نیوني نیوني جوړښت  $\neg B$  سره

په تضاد کې ده، چې  $\text{ggT}(p, q) = 1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B) \implies B.$$

له دې امله يا د دې په تعقيب باید غوښتنه  $B$  رېنتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې بنوونه



وینابڼې د طبیعي پارامتر سره کېدی شي د پوره ایندکشن له لارې وښوول شي. که  $A(n)$  یوه د  $n \in \mathbb{N}$  په واک کې وینا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- یا و اخستل شي. .

لومړی : د ایندکشن پیل : ښایو چې  $A(1)$  رښتیا دی.

دویم : اینوګشڼاپایونه یا ختم: ښایو چې د نیونې چې  $A(n)$  رښتیا دی (د ایندکشن هیپوټیزې)، لاسته زاڅي، چې هم رښتیا دی، یاپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې  $A(n)$  د ټولو  $n \in \mathbb{N}$  لپاره صدق کوي.

د یوه اندکشن ښوونې سره یو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه څخه لاس ته راڅي.

که د اندکشن پیل د  $n_0 = 1$  لپاره نه بلکه د  $n_0 > 1$  لپاره سرته ورسیري، نو وینا بیا فقط د  $n \geq n_0$  لپاره صدق کوي.

د مربع (ځلورې) عددونو د جمعي لپاره فرمول

$$A(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کیدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پیل  $A(1)$  : ( )

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$:A(n) \implies A(n+1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېری (سټ)

یوه ډېری  $A$  له توکو  $a_1, a_2, \dots$  جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکترېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

$$A = \{a: E \text{ خوی لري}\}$$

د دې لپاره سړی لاندې نڅښې کاروي یا استعمالوي:

لیکنډول	معنا
---------	------

$a \in A$	$a$ د $A$ توکی دی .
$a \notin A$	$a$ د $A$ توکی دی .
$A \subseteq B$	$A$ د $B$ برخدېری (برخست) ده
$A \subset B$	$A$ د $B$ برخدېری (برخست) ده
$ A $	دتوکو گنون یا تعداد په... کې
$\emptyset$	تشدېری یا تشست

که  $|A| < \infty$  همداسې  $A = \infty$  باور ولري، نو دلته د پای دېری همداسې ناپای دېری څخه غږیږو.

دوه یا څو دېری برابرزوریزی بلل کیږي، که د دوی د توکو ترمنځ یو بیجکتیو بلواک یا تابع یعنی برعکسکیدونکی بلواک شتون ولري ( $|A| = |B|$  د پای دېری لپاره).

د  $A$  د ټول برخو دېری  $\mathcal{P}(A)$  تواندېری بلل کیږی، دا په دې معنا چې

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ ,  $A \in \mathcal{P}(A)$  او  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

لیکونکي: هیولیک، کنش

## د گڼونو (اعدادو) ډېری

د لاندې گڼونو ډېری لپاره معیاري نڅبنې استعمال مومي:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

طبعي اعداد:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

ټول اعداد:

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ggT}(p, q) = 1\}$$

راشنل یا هوبنبار اعداد:

$$\mathbb{R} = \{x : x = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n, q_n \in \mathbb{Q}\}$$

ریل یا حقیقي (ریښتوني) اعداد:

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

کومپلکس اعداد:

په همدې توگه لاندلیکنډول هم کارول کیري:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

او دې ته ورته یا په همدې ډول

$$\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{Q}_0^-, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}_0^-, \mathbb{Z}^-$$

لیکونکي: کږه یولیک

## په ډېریو کې عملیې

د دوه ډېریو  $A$  او  $B$  لپاره لاندې علميې تعریف دي:

ټولنه (اتحاد)

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

غوځی (قطاع):

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$

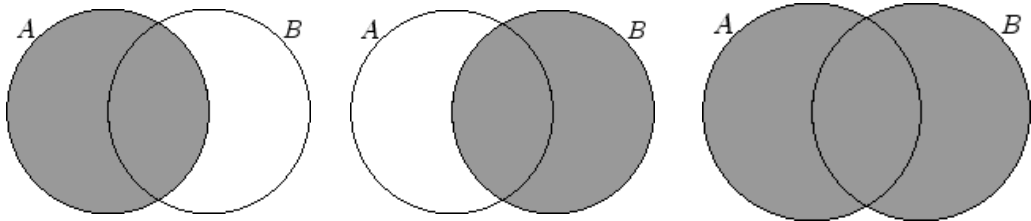
کمنبت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکې ډېرې،

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

سیوتريکي کمنبت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

په لاندې څېرو کې د ډېریو عللي داسې په نامه ون-ډیاگرام Venn-Diagramme سره بنوول شوي دي.

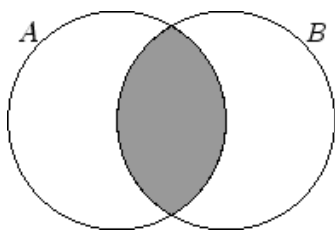


A

B

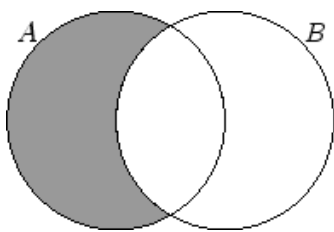
ټولنه

$A \cup B$  Vereinigung:



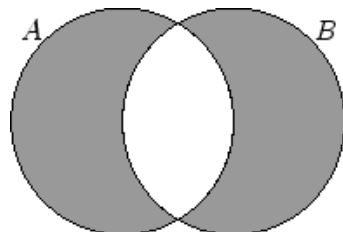
غوځی

$A \cap B$  Schnitt:



کمښت

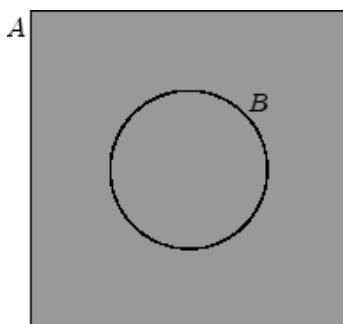
$A \setminus B$   
Differenz:



سیومتریکی کمښت

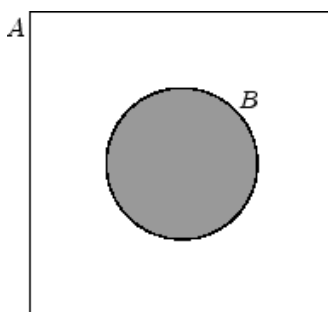
symmetrische  
 $A \Delta B$  Differenz:

که  $B \subset A$  وي، نو یوڅو دیاگرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



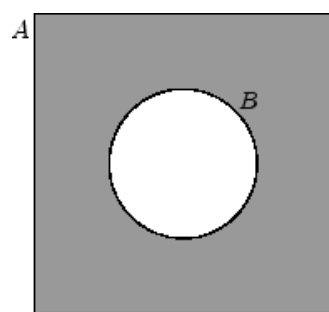
ټولنه

Vereinigung:  
 $A = A \cup B$



غوځی

$B = A \cap B$  Schnitt:



پوره کېدنکي ډېری

Komplementärmenge :  
 $A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکي: هولیگ، هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېر قوانین:

اسوځیاتيو:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموثاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Morgansche Regeln: •

• د مورگان قانون یا قاعده

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

• دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د  $\cup, \cap$  عملیو په ځای  $\wedge, \vee$  کېږدو او  $C \setminus$  په ځای  $\neg$  کېږدو.

لیکونکي: هیولیک، هیونر

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و بنوول شي. باور لري:

$$x \in C \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د دېستريپوتيو قانونو له مخې اخرنی افاده يا وپينه د لاندې سره برابرزبنته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C \setminus A \cup C \setminus B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کټمټوالی بنوول شوي.

ليکړنکی:ک. هیولیک

د دې مورګان قاعدې له مخې د بیلګې په توګه لاس ته راځي

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د دېستريپوتيو قانون د بیلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B = (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري  $(A \cap B) \cup B = B$  ، ځکه چې  $(A \cap B) \subseteq B$  دی

کارتېزي ضرب (حل)

د دوه ډېریو  $A$  او  $B$  کارتېزي ضرب دواړو ډېریو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$



باور لري:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b').$$

داپه دې معنا چې د ډېرې برابروالي ( $\{a, b\} = \{b, a\}$ ) په عکس يا په خت د لړۍ پرلپسې غوره ده

په ورته توگه  $n$ - واره يا ځله کارتېزي ضرب تعريفوو

$$A_1 \times \dots \times A_n$$

د ټولو منظمو  $n$ - گونونو  $(a_1, \dots, a_n)$  د  $a_i \in A_i$  سره . که ډېرې برابرې وي، نوليکو:

$$A^n = A \times \dots \times A$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

## اړيکي Relation

که د ډېرې  $A$  توکي د ډېرې  $B$  له توکو سره په اړيکو کې قرار ولري يا ولاړي وي، نو کېدی شي دا د يوې اړيکې سره افاده يا وويل شي. دا د توکو له منظمو جوړو

$(a, b)$

جوړه ده، چې دا د اړيکو له لاري سره تړلي دي. نو يوه اړيکه  $R$  د  $A$  او  $B$  د کارتېزي ضرب برخه ډېرې ده. وايو چې  $a$  د  $b$  سره په اړيکو کې ده او د دې لپاره ليکو  $a R b$  :

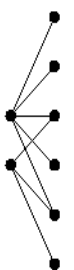
$$a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B.$$

ليکونکي: ژ. هيورنر

## د اړیکو د داتا بانک Relationale Datenbank

یوه نمونه یي بېلگه د اړیکو د ،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلگې په توگه یو د درسونو (لکچرونو) جدول او یو د زده کړو جدول ورکول شوي چې یو له بل سره په اړیکو کې راغلي. دا په لاندې څېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کین لور ته نومونه دي

Mtr.-Nr.	Name		کوټه	درس		
1000000	Anton Antonius		<table border="1"> <tr><td>V57.01</td></tr> <tr><td>V47.02</td></tr> </table>	V57.01	V47.02	لوره شمیرپوهنه ۱ د زده کوونکو...
V57.01						
V47.02						
1000001	Berta Bethel					
1000002	Cornelius Cornell					
1000003	Damian Damien					
1000004	Egon Ekel					
1000005	Frank Frankfurth					

دا هم دلته روښانه شوي چې د یوې ډېرې توکي د بلې ډېرې د توکو سره په اړیکو کې راځي یا که غواړی: قرار لري.

لیکونکي: بوسلر، هیورنر

### د اړیکو خویونه

په یوه ډېرې  $A$  کې یوه اړیکه  $R \subseteq A^2$  په لاندې توگه بلل یا نمول کېږي:

رفلکسیو reflexiv، که هر توکی د خپل ځان سره په اړیکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

سیومتری symmetrisch، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

انتی سیمتری antisymmetrisch ، که که له سیمتری خُخه کټمټوالی لاس ته راشي:

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزیتیو transitivity ، که له یوه زنجی خُخه منځنی توکی لري کېدی شي:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

توتالی total ، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتريک او ترانزیتیو وي، نو دا ، ورته اړیکي، (برابرازبسته اړیکي) بلل کيږي. دلته بیا زیات وخت  $a \sim b$  د  $a R b$  په ځای لیکل کيږي. یو ورتهاریکي ډېری  $A$  په توکي پرډیو برخډېریو ویشي ( ورته یا برابرازبسته ټولگیو)، د کوم سره چې د یوې برخډېری دوه توکي یو بل سره په اړیکو کې درپړي (برابرازبسته دي). په داسي حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډېریو خُخه داسي حالت نه لري.

که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتری او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره

د  $a R b$  په ځای لیکل کيږي. که یو نیم نظم د دې برسېره (سربېره) توتالی

وي، نو دا (توتال) نظم بللکيږي او  $A$  د  $\leq$  سره منظمه ده.

لیکونکی: ژ هیورنر

د یوې ډېری  $M$  پوتنځډېری  $\mathcal{P}(M)$  کې د ډېری خونډیونه یا په کې ځایبډنه  $\subseteq$  نیم نظم دی، ځکه چې باور لري:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B \quad \text{رفلکسیو} \quad A \subseteq A$$

او

انتیترانزیتیو

$$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

ترانزیتیو قوانین. که  $M$  له یوه زیات توکي ولري، نو خونديونه نظم نه ی، ځکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا توتالي منظمه نه ده.

اړیکي،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای دېری  $M$  په تواندېری کې

$$P(M) \quad |A| = |A| \quad \text{برابر ارزښته ده ځکه چې باور لري: (رفلکسیو)،}$$

$$|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A| \quad \text{(سیومتري)،}$$

$$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C| \quad \text{(ترنزیټیو)}$$

لیکونکی: ژ هیورنر

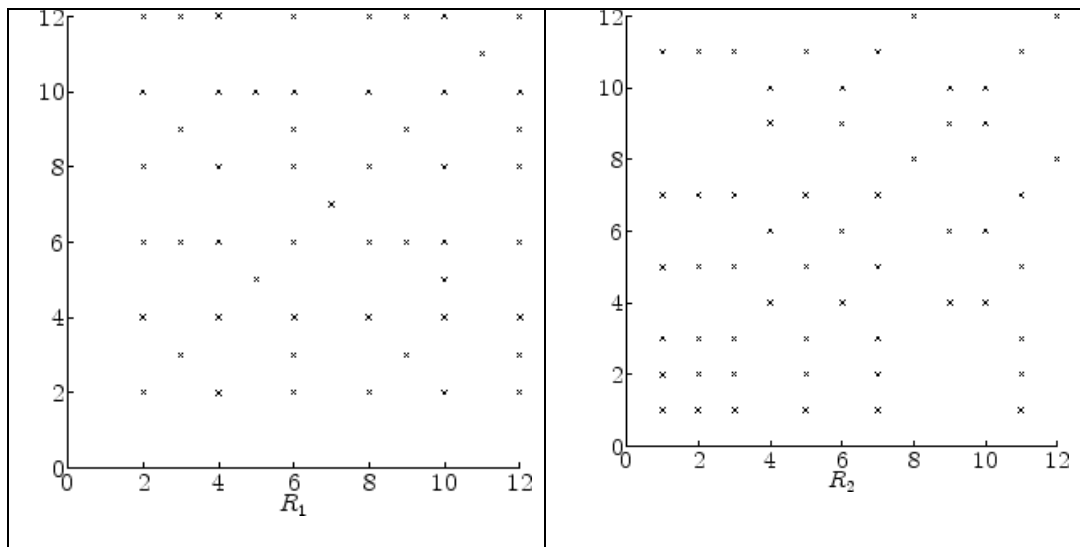
په یوې دېری باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول برابر ارزښته – اړیکي د توکو د خوینو له لارط تعریفیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

$$M = \{1, 2, \dots, 12\}$$

کې ترڅېړنې لاندې نیسو:

$$\neq 1 \quad x R_1 y \quad \text{لومړی یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) لري .}$$

$$x R_2 y \quad \text{دویم برابر دېر پروېشونی لري}$$



ځيرونه يا يا تابع (بلواک) د  $M \times M$  برخدېريو په څير د اړيکو گراف بنايي .  
 اړيکې  $R_1$  سيومتريک او رفلکسيو دي، مگر نه ترانزيتيو. د بيلگې په توگه  $x = 4$  او  $y = 6$  گډ پروېشونی 2 لري او  $y = 6$  او  $z = 9$  گډ پروېشونی 3 لري، مگر  $x = 4$  او  $z = 9$  گډ پروېشونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړيکې برابر ارزښت - اړيکې دي. رفلکسيوي، سيومتري او ترانزيتيوي په څرگنده توگه پوره دي. برابر ارزښت - ټولگي

دي د يوه، دوه، درې څلور او شپږ پروېشونو سره.

ليکونکي: هيلېگ، کرايخ

فونکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فونکشن  $f$  لاندې له يوې ډېرې  $A$  په يوه ډېرې  $B$  باندې يوه قانونمندی پوهيرو، چې هر  $a \in A$  توکی په يواځني ډول يو ټاکلي  $b = f(a) \in B$  باندې تنظيم کړي.

$$f : A \longrightarrow B .$$

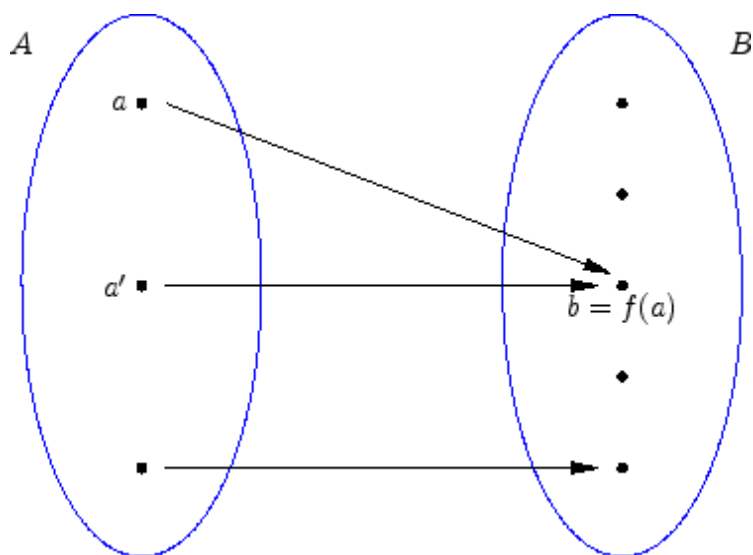
د توکو - نظم لپاره لاندې ليکنود استعماليري

$$a \mapsto b = f(a)$$

او  $b$  د  $a$  څېرې يا ارزښت په حيث بلل کيږي او همداسې  $a$  د  $b$  (د پخوا څېرې) د تعريف توکي په څېر بلل کيږي.

لکه د لاندې څېرې څخه چې کتل کيږي، بايد د  $B$  توکي د  $A$  د يوه توکي د څېرې توکي په توگه رامنځ ته شي او د  $B$  يو توکی کېدی شي د  $A$  د ډېرو توکو څېره يا نظم وي. په هر حالت بايد د  $A$  د هر توکی لپاره په يواځني توگه يوه څېره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر  $a$  څخه بايد يو غشی وتلی وي.

پېژندل کيږي چې څېره زيات تعريفتوکي يا د څېرې پخوانۍ يا نوره هم ښه مخکني لري (دا په دې معنا چې څېره کېدونکی دی)، دلته د بيلگي په توگه  $a$  او  $a'$  د څېرونۍ لپاره کلیمه فنکشن هو کارول کيږي، په ځانگړې توگه په ريل ا حقيقي او کمپلکس اناليوزي کې.



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر، کيمرلي

د تابع يا څيرونې يا بلواک (تابع) خويونه

د دوه ډبريو  $A$  او  $B$  ترمنځ يوه تابع

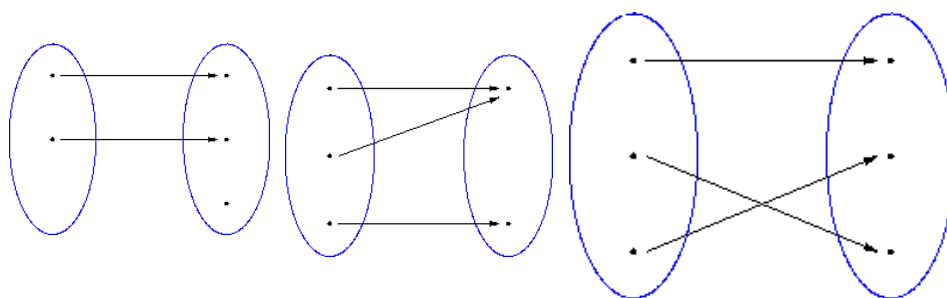
$$f : A \rightarrow B$$

داسې يا په لاندې تگه بلل کيږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر  $a, a' \in A$  لپاره د  $a \neq a'$  سره دا  $f(a) \neq f(a')$  صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر  $b \in B$  لپاره يو  $a \in A$  شتون ولري د  $f(a) = b$  سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع)  $f$  په کې او په باندې وي. دا کلیمې کېدې شي د ډبرې دیاگرام له لارې روښانه شي.

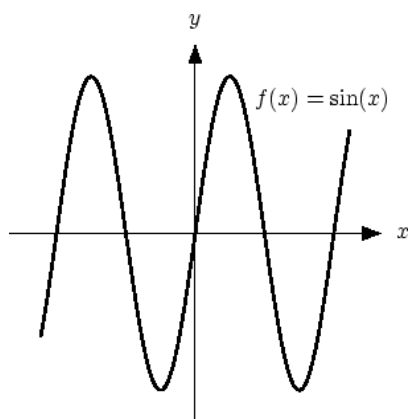


injectiv په کې

surjektiv په باندې

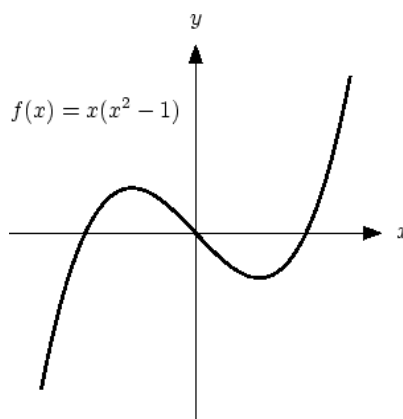
bijektiv په

د يو څو بلواکو (توابعو)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  خويونه ورکړ شوي دي



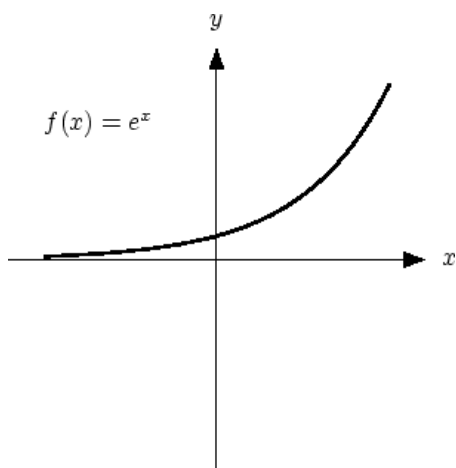
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



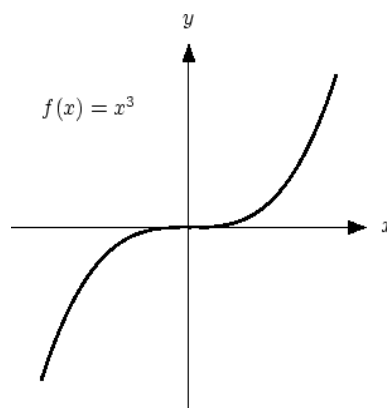
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مگر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مگر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې



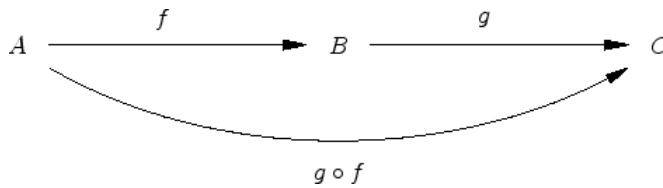
## د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) ترنه یا عمليي

### Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو سره گډ اېښونه) د  
 ترنه یا کمپوزیشن (زنځيرونه یا  
 $g : B \rightarrow C$  او  $f : A \rightarrow B$

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعريف شوی او په لاندې دياگرام کې ليدور گرځېدلی.



تابع اسوځياتيو ده، دا په دې معنا چې  $\circ$  ترنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مگر په څرگند ډول کموتاتيو نه ده.

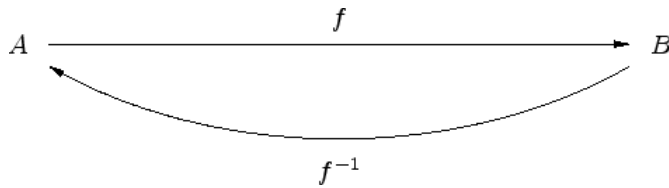
ليکونکی: هيوالیک، کنش

## په څټ يا برعکس فنکشن (بلواک يا تابع) Inverse Abbildung

د يوه په فنکشن يا تابع  
 $f : A \rightarrow B$   
 لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په څټ فنکشن يا برعکس تابع  $f^{-1} : B \rightarrow A$  تعريف ده.



په ځانگړې توگه ورته تابع دی.  $a = f^{-1}(f(a))$  دی، دا په دې معنا چې  $f^{-1} \circ f$  کټمټ يا

ليکونکي: هيوليگ، کنش

### فاکولتي يا فکتوريل Fakultät

د لومړيو  $n$  طبيعي اعدادو يا گڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

سره په نڅښه کيږي. (لوسټل يې:  $n$  فاکولتي). له دې سره کلک ترلی يا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو:  $0! = 1$ .

گڼ يا عدد  $n!$  د  $n$  مختلفو شیانو دمخلفو امکاناتو د ترتیب يا نظم گڼون يا تعداد ر بنایي

د لوی  $n$  لپاره د  $n!$  اسپیتوتیکي حالت دسترلینگ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(1/n)).$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د بېنوم ضریبونه (خلووني) Binomialkoeffizient

د  $n, k \in \mathbb{N}_0$  لپاره د  $n \geq k$  سره د بېنوم ضریبونه تعریفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د  $0! = 1$  له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بېنومي ضریب  $\binom{n}{k}$  د  $n$  توکوسره یوې ډېرې  $k$  - توکیزو برخدېریو ګڼون یا تعداد ورکوي.

### د پاسکال درېګودی (مثلت) Pascalsches Dreieck

د بېنوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

د لاندې رېګورزیون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په یوه درېګدیزې شیمیا یا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې یا له لارې وشمېرو.

$\binom{0}{k}$				1						
$\binom{1}{k}$			1		1					
$\binom{2}{k}$			1		2		1			
$\binom{3}{k}$			1		3		3	1		
$\binom{4}{k}$		1		4		6		4		1
$\binom{5}{k}$	1	↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘	1
			5	10	10	5				
			⋮	⋮	⋮	⋮				

ليكونكي: هيوليگ، کنش

داد بنوولو کتمتوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

د  $n!$  سره وپشنې او  $(n-k+1)!k!$  سره ضربونې له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k).$$

سره برابرازبنته دی.

ليكونكي: هيوليگ، کنش

د بينوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

د بینوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو یا اوونبتونو د زیاتون یا جمعې توان وشمېرل شي.

د ټولو  $n \in \mathbb{N}_0$  لپاره صدق کوي:

$$(a + b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

په ځانګړي توګه د  $n = 2, 3$  لپاره:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بینوم جمله کېدی شي د پوره ایدګشن له لارې وپنول شي.

د  $n = 0$  او  $n = 1$  لپاره کتمتوالی د

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a + b$$

له امله د په خوښه  $a$  او  $b$  لپاره رښتیا یا ټیک دی.

نیسو چي د  $n$  لپاره صدق کوي. نو دی:

$$\begin{aligned}
 & (a+b)^{n+1} \\
 &= \\
 & (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
 &= \\
 & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
 &= \\
 & a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
 &= \\
 & a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
 &= \\
 & a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
 &= \\
 & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

د بی نوم ضربونو لپاره کټمټوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

د بینوم ضربونو لپاره لاندې کټوتوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

لومړي دواړه کټوتوالی تړلي د بینوم د درسي څخه لاس ته راځي،

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو  $a = b = 1$  همداسې  $a = -b = 1$  سره .

دریم کټوتوالی د ریکورزین فرمول په بیا بیا استعمال له لارې لاس ته راځي.

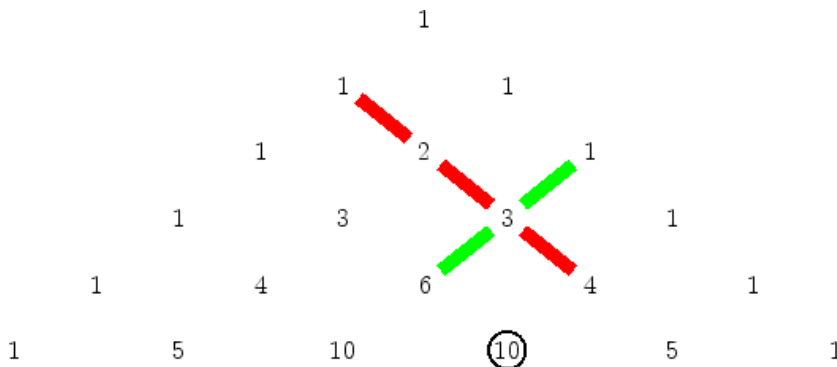
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}$$

په دې مساواتو کې د په ځای ایښولو یا سبستیجیشن Substitution

$$(n - k) \leftrightarrow k$$

له لارې څلورم کټوتوالی لاس ته راځي.

دا اخري دواړه کټوتوالي کېدی شي په پاشکال درېګوډي کې جمعہ کوني لځ لارې انځور شي.





## د دېریو یا ستونو کمبیناتوریک Kombinatorik von Mengen

(د کمبیناتوریک د نورې زیاتې کتنې لپاره دې زما د شمیرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو گڼون یا تعداد ورکوي، چې د یوې د  $n$  مختلفو توکو سره دېری خځه  $k$  توکي ټاکلی شو، د کوم سره چې باید توپیر شي، چې ایا د لړۍ پرلپسې یو رول لري (ترتیبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم (د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتیب	nicht sortiert نا منظم
له تکرار سره	$n^k$	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

لیکونکي: هیولیک، کنش

لومړی: نا ترتیب یا نا منظم ټاکنه بې له تکرار خځه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونیو لي، نو د لومړي ځل لپاره  $n$  امکانات شتون لري،  
 $(n-1)$  امکانات د دویم لپاره، تر  $(n-k+1)$  امکاناتو پورې د  $k$ -م  
توکي لپاره، نو په ټولیزه توگه

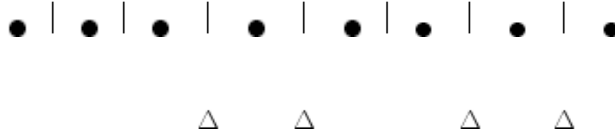
$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا باید د گڼون یا تعداد  $k!$  سره وه وپشل شي چې د  $k$  توکو پرموتیشن (د توکو  
ځای بدلون: لنډ: ځای بدلون) دی.

دويم : ناتتیب شوي انتخاب د تکرار سره

يو برابر ارزښته پر اېلم دادی، چې  $n - 1$  په نځېنه شوي ( نشاني شوي) د  $n + k$  ټکو تر منح ځای په ځای شي.



د  $(i - 1)$  -م او  $i$  -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د  $i$  -م ټوکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نځېنه کېدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n + k - 1}{n - 1},$$

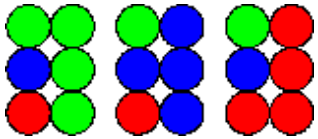

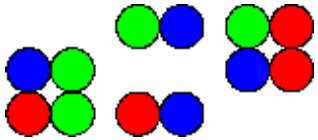
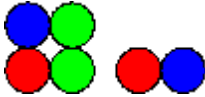
کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

دریم : د تتیب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې تړلی لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیگ، کنش

په یوه مرتبان کې یو سور یو شین او یو اسماني توپونه (غونډوسکې) پراته دي. په جدول کې د دوه واړه راوستني د امکاناتو تعداد کتل کېږي (  $k = 2, n = 3$  ).

	ترتیب شوي	ناترتیب شوي یا نامنظم
د تکرار سره (دبېرته وراچوني سره)	$n^k$	$\binom{n + k - 1}{k}$

		
	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بی د تکرار سره (نه دبېرته وراچونې سره)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
		
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

لیکونکي: هیولیک، کنش

### د موټر نمره Autokennzeichen

د یوه الماني موټر نمره د ایالت یا ښار لپاره د  $\leq 3$  تورو کمینېشن، د  $\leq 2$  نورو تورو او تر یوه څلورځایز عدد څخه د بېلگې په توګه :



له  $n$  توروڅخه  $26^n$  کمپینښونه شتون لري او له دې سره

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې ( که د ښار یا ایالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نیول شي

لیکونکي: هیولیګ، کنش

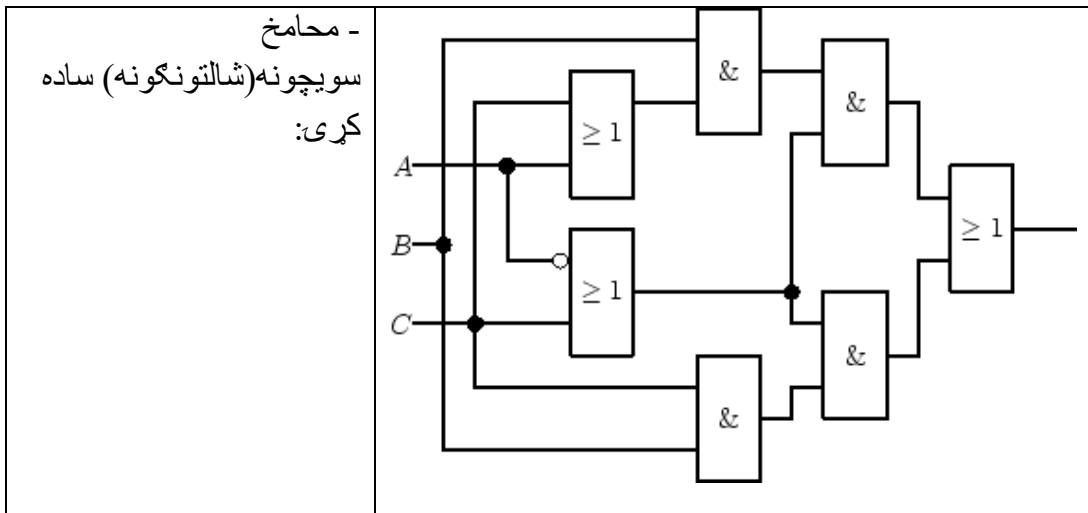
### پوښتنې

- د ښه بدلون او همداسې د رښتیا جدول سره و و زامی، چې ایا افادې یا ویبني تل ټیک دي یعنی Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$

- اړیکې  $\square, \diamond$  د ډبرې پوهنې څخه د منطقي علیو  $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$  لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:



$U, V \subset A$        $f : A \rightarrow B$        $A, B \neq \emptyset$   
 - دېری ، یوه تابع ، همداسې برخدېری

$X, Y \subset B$   
 او ورکړ شوي دي. د لاندې اړیکو رښتیاوالی همداسې نارښتیاوالی د یوې مناسبې برعکس بېلگې په مرسته وښایئ:

$f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$        $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$   
 الف -      ب -

$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$   
 پ -

$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$   
 ت -

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 - د یوه تابع په هکله لاندې ویناوي په فورمال لیکندود افاده کړئ:

الف -  $f$  په باندي نه دی      ب -  $f$  په کې نه دی

پ -  $f$  په نه دی      ت -  $f$  نه په کې او نه په باندي دی

لیکونکی: کریستیا اېپین

$n \in \mathbb{N}$   
 د - لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایئ:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

a)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

b)

$n \in \mathbb{N}$   
 د - لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایئ:

الف :  $a_n = n^3 + 5n$  په 6 وېشونې دی.

ب :  $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$  يو طبيعي عدد دی.

- په يوه ميلمستيا کې 25 کسان سره يوځای کيږي. څومره لاسونه سره ورکول کيږي، که هر ميلمه هر بل ميلمه ته لاس ورکړي.

د شمير پوهني له لومړني کورس څخه

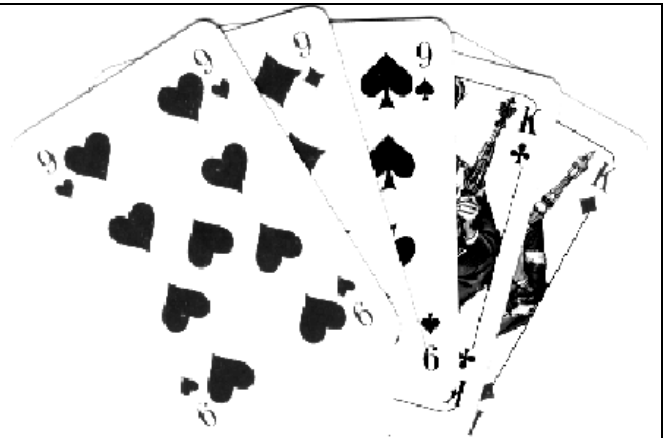
- و بنايي:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \quad \text{a)}$$

$$\sum_{\ell=1}^n \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1} \quad \text{b)}$$

لاس ته راوښي په پاسکال درېڼوډي کې انځور کړی. ليکونکی: کلاوس هيوليگ

- په يوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده (8 ارزښتونه 4 رنگونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابر ارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟



د دې لپاره څومره امکانت شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره يو پوکر (څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟

از مابینت Test

لومری پوینتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتیا ارزښت پیدا کړی

$$D : (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ویناو  $A, B, C$  د رښتیا ارزښتونو تابع یا په واک کې وي.

هر ځل یا 'w' او یا 'f' ورکړی.

دویمه پوینتنه:

$$B = \{4, 5, 6, 7\} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

دېری او ورکړی.

په گوته کړی، چې ایا لاندې ویناوې رامنځ ته کيږي که نه (J) د هو لپاره او N د نه لپاره)

دریمه پوینتنه:

د دوه هره یوه د درې توکیزه دېریو A او B ترمنځ څومره اړیکې شتون لري؟

له یې څخه څومره بلواک یا تابع دي او څومره بلواک یې په باندې (سورجکتیو) دي؟

څلورمه پوینتنه:

و څېری چې ایا لاندې توابع یا بلواک  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  په باندې، په کې او په دي:

$$\text{a) } f(x) = x \sin x \quad \text{b) } f(x) = \exp(-x^3 + 1)$$

$$\text{c) } f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

پنځمه پوښتنه:

خومره پنځه ځايزه گڼونه يا عددونه شتون لري د لاندې سره

الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

خومره امکانات شتون لري، چې ناه کسان په درېيز گروپ ووېشو؟

### تابع يا فنکشن يا بلواک Funktion

<p>يو فنکشن</p> $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ <p>هر د تعريف وړشو <math>D \subseteq \mathbb{R}</math> هر  توکي <math>x</math> په يوه د ارزښت  ورشو <math>W \subseteq \mathbb{R}</math> په يوه توکي  <math>f(x)</math> باندې تنظيموي..</p> <p>د فنکشن يا بلوتک <math>f</math> گراف له  تکو <math>(x, y)</math> جوړ دی د  <math>y = f(x)</math> سره.</p>	
--	--

لکه د تابع څخه چې ليدل کيږي، د تعيف وړشو (رون شين) او د ارزښت وړشو (تیاره

خر)  $x$  - محور همداسې د  $y$  - محور پرېستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع



$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، بايد په ساده تابع رامنځ ته شوي بنديزونه په پام کې ونيسو. د لوگاريتم ارگومنټ بايد مثبت (زياتيز) وي:

$$x \geq 0. \quad 3 - x > 0$$

يعني او

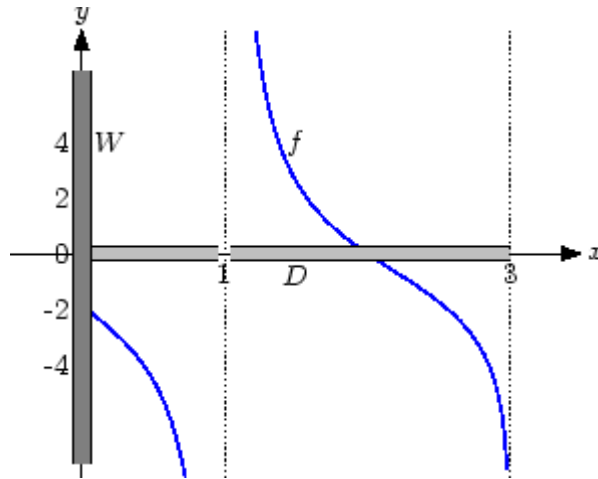
$$x \neq 1.$$

په هر حالت مخر-(ماتلاندي) باي صفر نه شي، دا په دې معنا چې

په ټوليزه توگه لاس ته راځي:

$$D = [0, 3] \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, 3).$$

د  $f$  ارزښت د رسم سره روښانه يا واضح کيږي.



دا چې  $f$  د  $x \in (1, 3)$  لپاره د  $-\infty$  او  $+\infty$  ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي يا اخلي، نو باور لري.  $W = \mathbb{R}$ .

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر، کنش

لاندي جدول د څو بنسټيزو بلواک يا توابعو د تعريف - او ارزښت ورشو بنايي:

$f(x)$	$D$	$W$
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر، کنش

### کرښيز فنکشنونه Linear Funktion

<p>د يوه کرښيز فنکشن</p> $f(x) = ax + b$ <p>گراف يوه کرښه ده د <math>a</math> جگېډني سره او د <math>y</math> -محور غوڅي <math>b</math> سره.</p>	
---	--

الترناتيو يا بديلي انځورونې يې ټکي-جگېډني-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

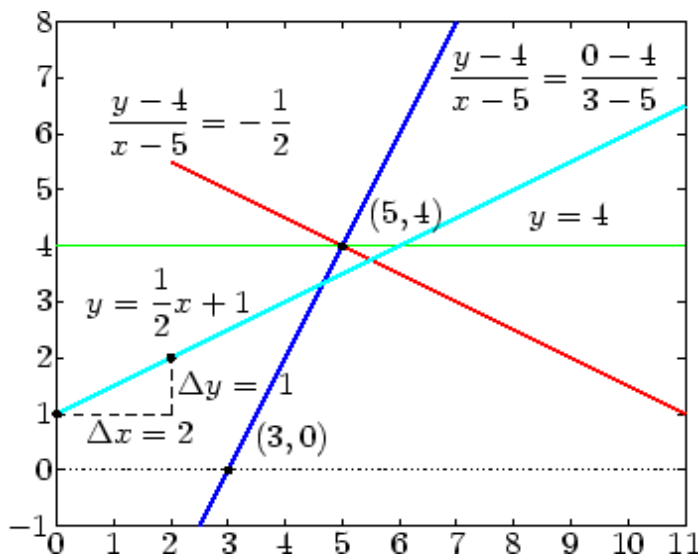
او د دوه ټکو-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

دي، د كوم سره چې  $(x_0, y_0)$  او  $(x_1, y_1)$  په کرښه ټکي دي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نخښه کوي.



## مربعیز فنکشنونه Quadratische Funktion

د یوه مربعیز تابع گراف

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

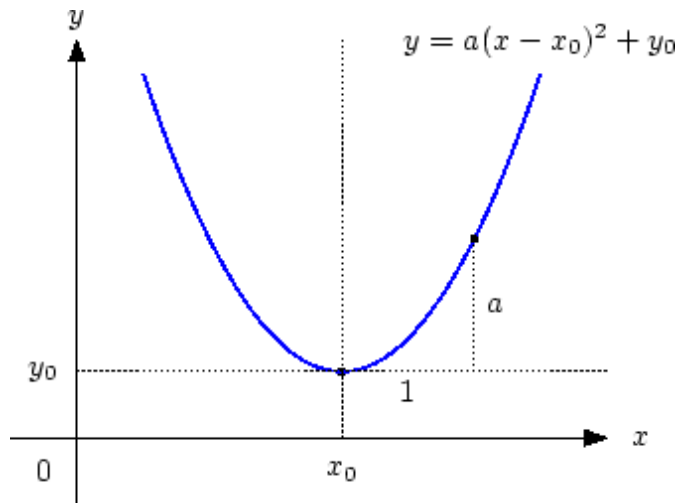
یو د

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بني پارابول دی د ککړي

$$(x_0, y_0) = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right).$$

سره.



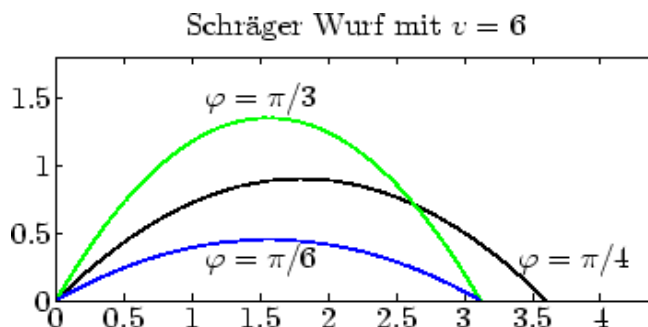
مايل گوزار يا - غورخونه Schräger Wurf

که یو تن د کونج  $\varphi$  لاندې د یوې چټکتیا  $v$  سره وغورخول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan \varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

بنایي، چېرته چې  $g$  د ځمکې بیره (تعجیل) ده.

مایله گوزارونه یا - غورخونه د  $v=6$  سره.



مساوات د برابر د اوليز خوزبنت څخه لاس ته راځي د پيل چټکتيا  $v$  سره په  $x$  - او  $y$  - کمپوننتونو يا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځونې بیره بيز خوزبنت سره.:

$$x(t) = vt \cos \varphi \Rightarrow t = \frac{x}{v \cos \varphi}$$

$$y(t) = vt \sin \varphi - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{vx \sin \varphi}{v \cos \varphi} - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \varphi} = x \left( \tan \varphi - \frac{gx}{2v^2 \cos^2 \varphi} \right).$$

د غورځونې واټن دی:

$$x = \frac{2v^2 \cos^2 \varphi}{g} \tan \varphi = \frac{v^2}{g} \sin(2\varphi).$$

دا د  $\varphi = \pi/4 \hat{=} 45^\circ$  لپاره ماکسیمال کيږي.

ليکونکي: هیورنر، هیولیک، کنش

## پولینوم Polynom

یو  $n$ -م دجې پولینوم  $P$  په لاندې بڼه لیکل کېږي:

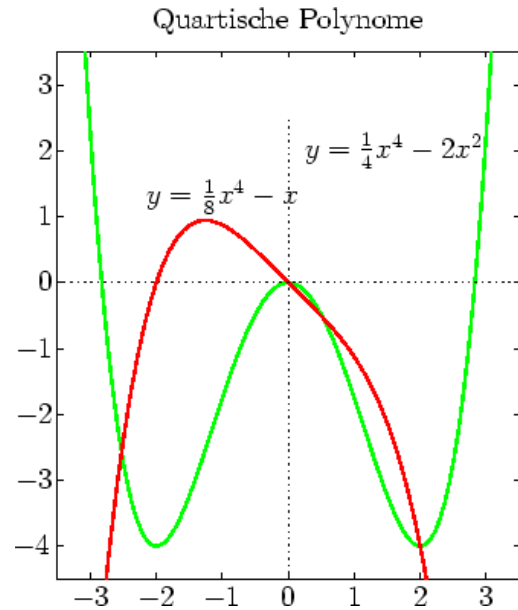
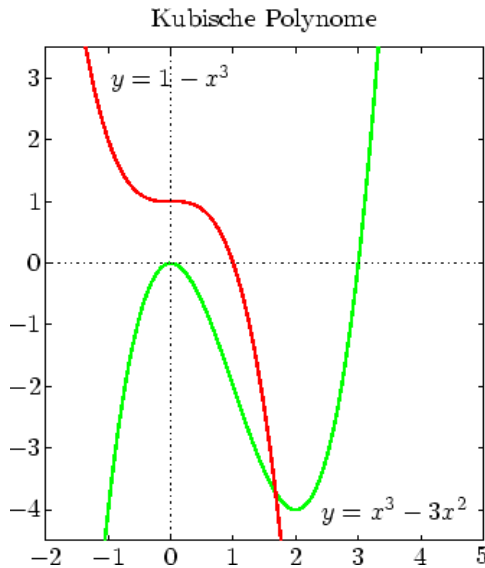
$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

د  $a_n \neq 0$  سره .

اووښتونې یا متحوله  $x$  او ضریبونه  $a_k$  کېدې شي ریښتونې ( حقیقی ) یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقیقی همداسې کمپلکس پولینومونو غږیږو.

لیکونکي: هیولیک، هیرنر

لاندې توابع مکعبي  $n = 3$  او مربعیز  $n = 4$  پولینومونه په ګوته کوي، د څرنګوالي (کوالیټي) مختلف تابع ګراف سره



لیکونکي: هیورنر، هیولیک، کنش

## راشنل فنکشن یا بلواک (تابع) Rationale Funktion

یونسبتي تابع د صورت (ماتباندي) درجي  $m$  او مخرج (ماتلاندي) درجي  $n$  سره یو د دوه پولینومونو وېش دی.

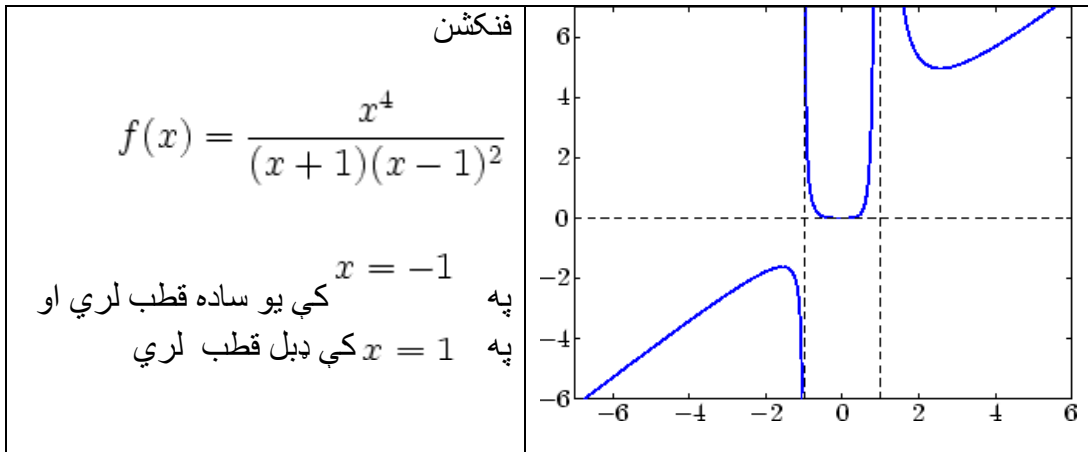
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}.$$

دا انځورونه ناوېشور  $irreduzibel$  بلل کيږي، که  $p$  او  $q$  کوم گډ کرښيز ضريب ونه لري.

د مخرج صفرځايونه راشنل تابع  $r$  د تعريف تشياوي دي او د پول ځايونو په نامه ياديږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی دی.

د اووښتونې يا متحولې  $x$  او ضريبونه  $a_k, b_k$  کېدی شي حقيقي يا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توگه د حقيقي يا کمپلکس رېښتونې فنکشن څخه غږيږو.

ليکونکي: هيوليگ، اپ



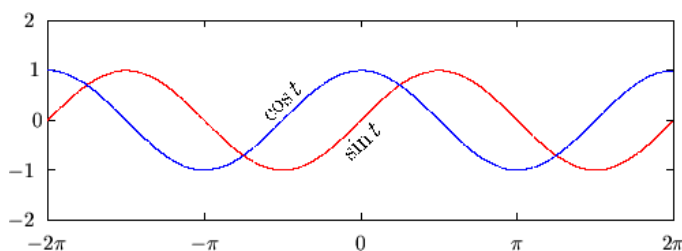
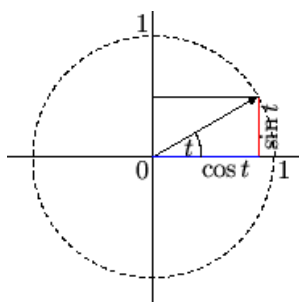
د تابع څخه پژندل کيږي، چې  $f$  په يوه ساده قطب کې مخخښه بدلوي او په ډبل قطب کې مخخښه نه تغيروي. ليکونکي: هيوليگ، اپ

## ساین او کوساین Sinus und Kosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواورینات چې په سرچینه کې په کونچ  $t$  څرخول شوی تکی  $(1, 0)$  په نڅبنه کیري.



دواړه د گردۍ یا دایرې توابع کوسان او ساین  $2\pi$  - پریودیکی (تل بېرته راگرځېدونې) دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

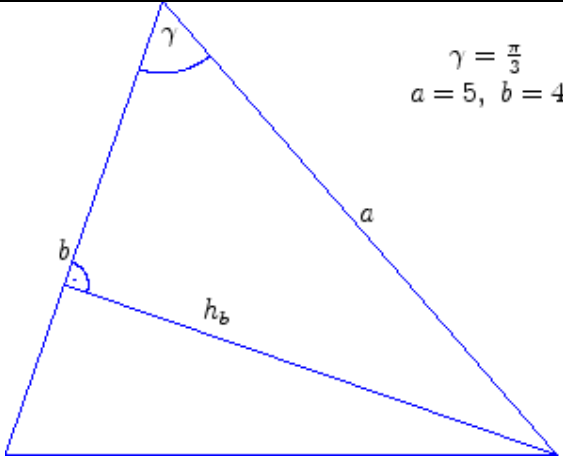
$$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنڅبنې پورې د دایرې تابع د ولاړگودیز درېگودې (قایمالزایه مثلث) د قطر (نیمې) سره چې اوږدوالی یې 1 دی دو لارو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښایي. یو څو ځانگړي ارزښتونه یې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0



<p>د دې لپاره چې د خپره شوي درېګوډي د سطره وټاکلی شو، لومړی جکوالی <math>h_b</math> شمېرو:</p> $\sin \gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a \sin \gamma .$ <p>له دې سره لاس ته راځي:</p> $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma .$	
---	--

د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس ته راځي:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} .$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعي جمله(قضیه)

د داېرې توابعو  $\sin t$  او  $\cos t$  لپاره لاندې اړیکې صدق کوي:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta$$

په ځانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha .$$

لیکونکی. ژ. هیورنر

تابع

$$u(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

اړيکي د دوه لرزېدنو يو ځای رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضیې په

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

او مرسته کېدی شي انځورونه ساده شي. د

$$\Delta\omega = |\omega_1 - \bar{\omega}|$$

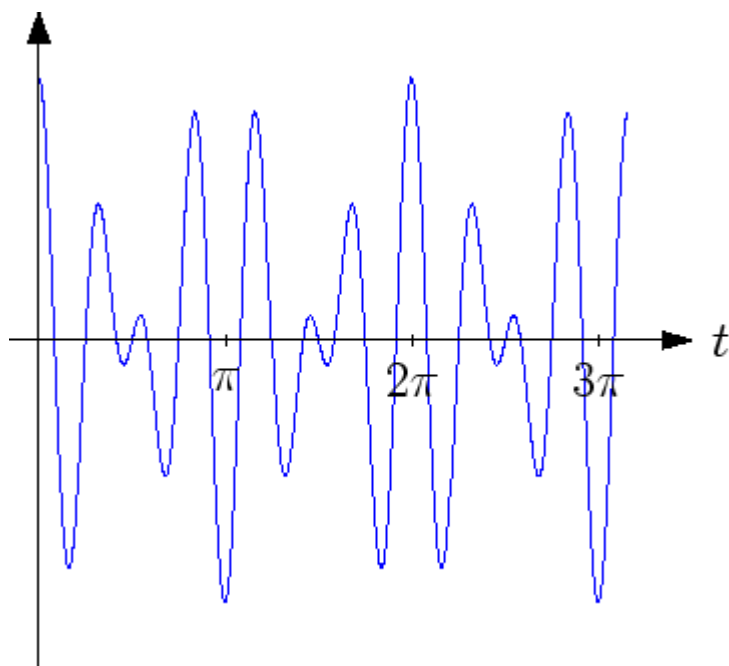
سره له

$$\cos(\bar{\omega} - \Delta\omega t) = \cos(\bar{\omega} t) \cos(\Delta\omega t) + \sin(\bar{\omega} t) \sin(\Delta\omega t)$$

$$\cos(\bar{\omega} + \Delta\omega t) = \cos(\bar{\omega} t) \cos(\Delta\omega t) - \sin(\bar{\omega} t) \sin(\Delta\omega t)$$

څخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2 \cos(\bar{\omega} t) \cos(\Delta\omega t).$$



بلواک د  $\omega_2 = 5$ ,  $\omega_1 = 7$  لپاره لرځېدنه بڼايي، دا په دې معنا چې  $\bar{\omega} = 6$ ,  
او  $\Delta\omega = 1$

$$u(t) = 2 \cos(6t) \cos t.$$

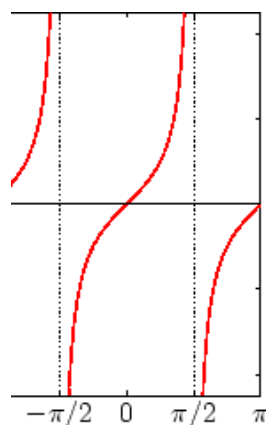
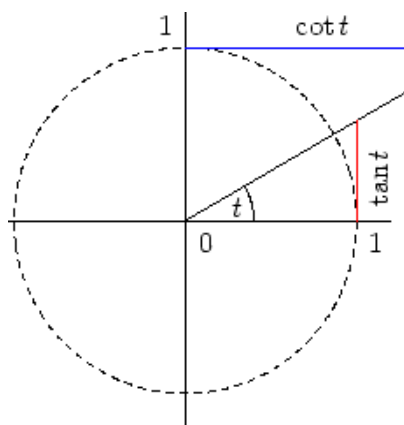
ليکونکي: هيوليگ، کرايڅ

## تانجنت او کوتانجنت

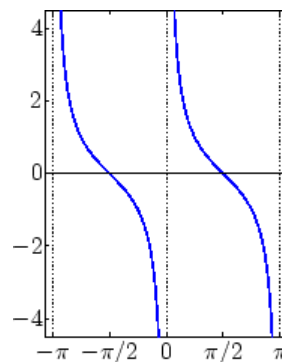
توابع تانجنت او کوتانجنت د

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړگوييز درېگويي (قايم الزاويه مثلث) کې د تر  
مخخښې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي



Tangens

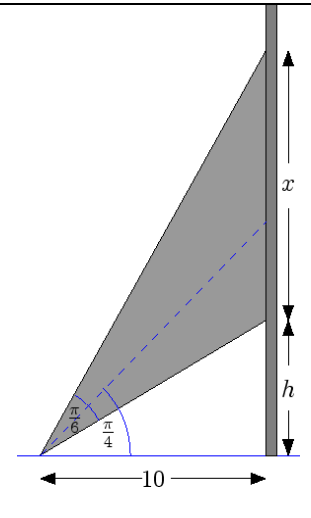


Kotangens

يو څو څانگري ارزښتونې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخي یو د برېښنا مخروط ،  
چې په یوه ولاړ دېوال پرېوځي ښایي



د دې لپاره چې خورا لوي يا ماكسيمال پوسېده د ټاكلې شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

که  $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$  په دویم مساوات کې ځای کړو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$$

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

یعنی

## اکسپوننشل توابع (بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

د اویلر Eulerschen عدد  $e = 2.71828\dots$  سره اکسپوننشل تابع بلل کيږي. دا د

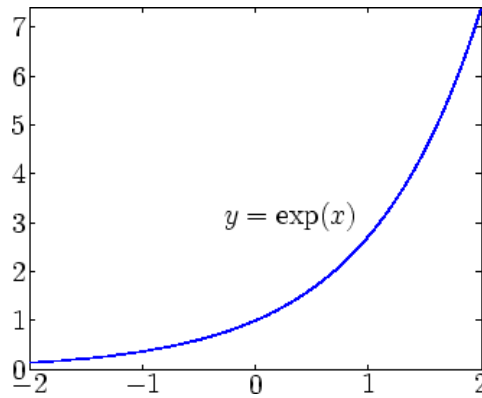
تولو  $x \in \mathbb{R}$  لپاره مثبت (زاتيز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y .$$

پوره کوي.

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په ځانگړې توگه دی .



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

اکسپوننشل تابع د ډبرو بيولوژيکي پروسو زياتوالی روښانه يا تشریح کوي.

د بېلگې په توگه د يوه ساده نفوس موډل متناسب دی د اوسنيو نفوس تعداد  $p(t)$  سره د  $t$  په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

د  $0 \rightarrow \Delta t$  لپاره دا د ډېروالي قانو د  $p(t)$  مودلی کیري.

لاندي جدول د نړۍ نفوس بنيابي د کلني ډېرېدنې سره. (اتکل ارزښت)

Jahr	Bevölkerungszahl	اتکل ارزښت
کال	د نفوسو تعداد	Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

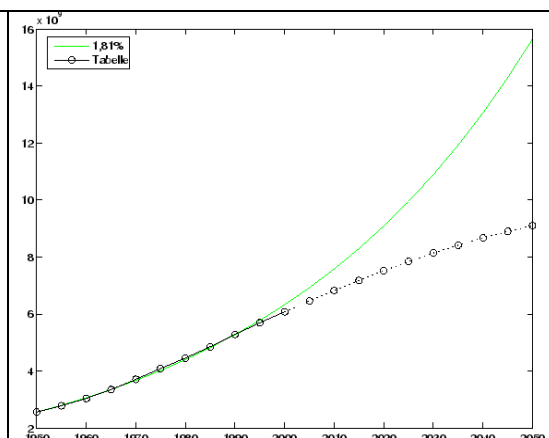
2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې 1.81 % وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050 کال کې 16 میلیارده ته جگ شي (ټکي ټکي شوي کره (منځني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمېدو څخه مخ ته شي

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر



د گټې گټه Zinseszins

یوه پیلېدایي  $x$  د  $n$  -واړه وکونو همداسې اخستو د یوې **Rate**  $r$  له کبله لاندې پیل پای بدایي  $r < 0$  وړکوي :  
 بzw همداسې .  $r > 0$  د یوې گڼې ضریب  $(1 + p)$  له کبله لاندې پیل پای بدایي وړکوي :

$$y = (1 + p)^n x + \frac{(1 + p)^n - 1}{p} r .$$

له دې سره  $p = 1$  یوه 100% د گټې د یوې ربحي د کلنې اېښوونه په گوته کوي

موثره کلنې ربحه  $p_j$  د میاشتنۍ گټونې څخه شمېری کیري د یوې  $p_m$  ربحي (گټې) سره

$$p_j = (1 + p_m)^{12} - 1 \geq 12p_m .$$

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

بنسټیزه سرمایه په لومړني ربحپرېود کې په پام کې نیول کیري، اېښوونه او همداسې اخستنه یا راوستنه په لومړي ځل د هر ورپسې کال. دا د لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1 : & y = x(1 + p) + r, \\ n = 2 : & y = (x(1 + p) + r)(1 + p) + r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توگه صدق کوي:

$$y = (\dots (x(1 + p) + r)(1 + p) + r) \dots)$$



$$= x(1+p)^n + (1 + (1+p) + (1+p)^2 + \dots + (1+p)^{n-1})r$$

دا په نوکانو کې د  $r$  افاده کیدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واپول شي او سری دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

یو د 100000 یورو پور (قرضه) په کلني گټونه او یوې گټونې یا ربحي % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سری د

$$y = 0, n = 10, p = 0.05, x = 100000$$

سره گټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د میاشتنی د  $\frac{5}{12}\%$  په گټونې یا په گټه اېښوونې سره دا راکوي

$$n = 120, p = \frac{1}{240}$$

په ورته توگه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{\left(\frac{241}{240}\right)^{120} - 1}$$

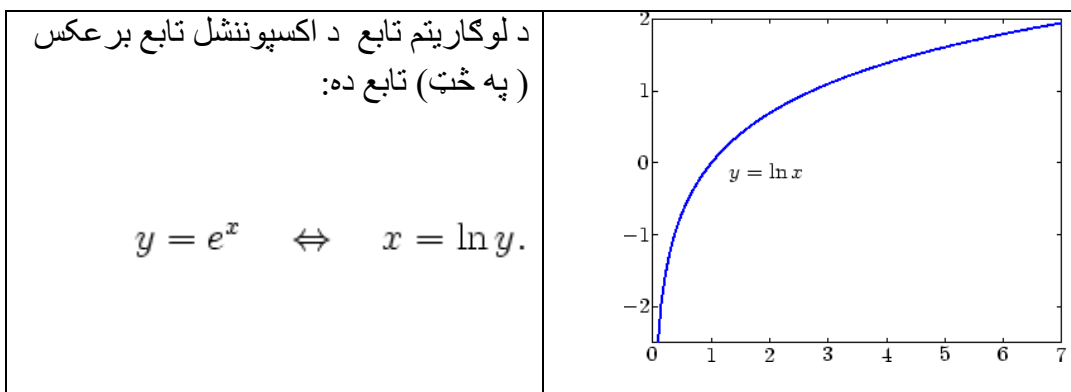
$$= 1060.66$$

د میاشتنی گټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د گټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د  $\frac{4}{12}$  % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left( \frac{(1 + \frac{1}{300})^{12} - 1}{\frac{1}{300}} - 12 \right) \cdot 1060.66 = 235.96 .$$

لیکونکي : هیولیگ، کرایخ

## لوگارېتم Logarithmus



دا  $(0, \infty)$  په  $\mathbb{R}$  کره مونوتون (یو غریز) کره جگېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

$$\ln(1/x) = -\ln x$$

په ځانگړې توگه لرو:

لیکونکی: هیولیگ، کوپف

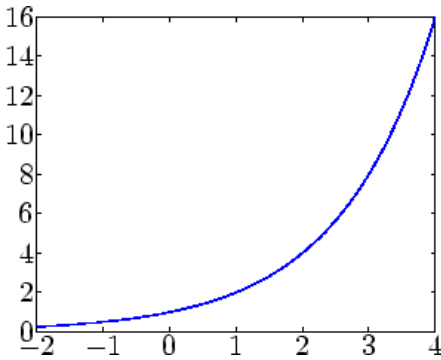
تولیز په توان تابع او لوگارېتم

$a > 0$   
د لپاره تعریفوو:

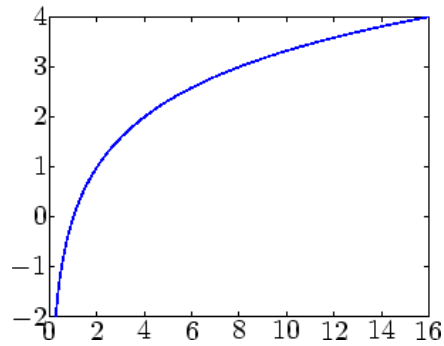
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع (بلواک)  $x = \log_a y, y > 0.$   
سره

په ځانګې توګه د 10 په بنسټ لوگارېتم لپاره لیکو  $\log = \log_{10}$  او  $\text{ld} = \log_2$   
د دوه ګوني یا دوال لوگارېتم لپاره.



$$f(x) = 2^x$$



$$f(x) = \text{ld}(x)$$

لیکونکی: هیولیک، کوپف

د توان او لوگارېتم لپاره شمېر قوانین

له تعریفونو او تابع مساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوگارېتمې توابعو لپاره لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}
 a^{s+t} &= a^s a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\
 a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\
 (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x.
 \end{aligned}$$

برسيره (سربيره) پر دي د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېر بدلون لپاره اړيکي باور لري:

$$\log_b x = \log_b a \log_a x.$$

په ځانگړي توگه

$$\log x = (\log e) \ln x.$$

ليکونکي: هيوليگ، کوپف

لاندي بېلگي د شمېر قاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\begin{aligned}
 \ln(4x^2) - 2 \ln(2) &= \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2 \ln 2 = \\
 &= 2 \ln 2 + 2 \ln x - 2 \ln 2 = 2 \ln x
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 &\log_4(x^2) + \\
 (2x) &= 2 \frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2 \frac{\ln x}{\ln 2} \quad \text{ld}
 \end{aligned}$$

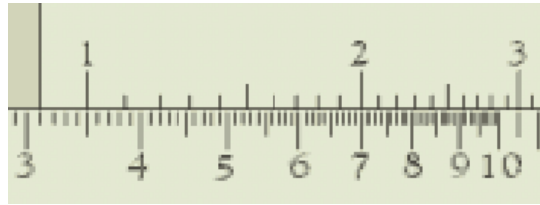
ليکونکي: هيوليگ، کوپف

د لوگارېتم شمېرونی

په لوگارېتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبله کېدی شي دوه سکالا یا کچېرني یو په بل کېږدو او د نتسجې په توگه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.



د پورته څېرې څخه د بېلگې په توگه لاس ته راوړو، چې  $3.5 \cdot 2 = 7$ . دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کېږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب نتیجه په لاندې سکالا لوستل کېږي.

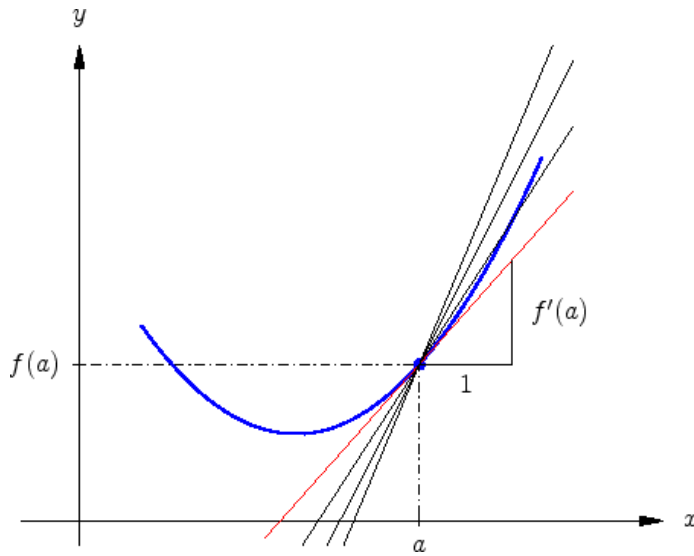
لیکونکي، هیولیک، کوپف، ویپر

## مشتق یا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع  $f$  په یوه ټکي  $a$  کې مشتقور دی، که دا د رابېلېدنې یا مشتق په څېر نیوله شوي پوله (لیمیت)

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري



هندسي مشتقروالی په دې معنا دی، چې د غ،څوون (قطاعو) جگپښه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جگوالي په لور و هڅيري يا کورگنت شي.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

د دې لپاره د  $f''$ ,  $f'''$ , ... او هم لیکو او جگ مشتقونه د

همداسې د  $f^{(2)}$ ,  $f^{(3)}$ , ... سره بنایو. یو فنکشن  $f$  په یوه ډېری  $D$  مشتق بلل

کيري، که  $f'(x)$  د ټولو  $x \in D$  لپاره شتون ولري.

لیکونکی: هیولیک، کویف

د تابع  $f(x) = x^2$  مشتق

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

دويم مشتق  $f''(x) = 2$  يو ثابت دی.

د يوه په خوښه مونوم  $f(x) = x^n$  ، لپاره ، بينوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د كوم سره چې  $O(h^2)$  د نظم ترم  $h^2$  په گوته كوي.

ليكونكى: هيوليگ،كوپف

د  $f(x) = \sin x$  مشتق كېدى شي د جمعې قضيې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د  $t = x + h/2$  سره كمبنټرېش لاس ته راكوي:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin((x+h/2)+h/2) - \sin((x+h/2)-h/2)}{h} = \\ &= \frac{2 \cos(x+h/2) \sin(h/2)}{h}. \end{aligned}$$

له

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

امله بنی اړخ د  $h \rightarrow 0$  لپاره د  $\cos x$  په لور هڅیږي.

### غوره (مهم) مشقونه

لاندي جدول د غوره توابعو مشتقونه راكوي:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$	$r \neq 0, x^r$	$rx^{r-1}$
$e^x$	$e^x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليكونكي: هيوليگ، كوف



## د مشتق کر بنیزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کر بنیز دی دا په دې معنا چې د مشتقور تابعو  $f$  او  $g$  لپاره صدق کوي

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ضرب یا حل قانون

د دوه مشتقور تابعو  $f$  او  $g$  مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

تولیز د ضرب لپاره صدق کوي:  $f = f_1 \cdots f_n$

$$f' = \sum_{i=1}^n f'_i \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ضرب د قانون سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که  $\sin x$  د ضرب په حیث ورزیات کړي، نو بیا د ضرب قانون استعمال لاس ته راځي

$$\frac{d}{dx} [\sin x(x^2 \ln x)] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2 \ln x + 1)).$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په دېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته اړې راوړي

$$\frac{d}{dx} [\sin x(x^2 \ln x)] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x x^2).$$

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقور توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو  $x$  کې د  $g(x) \neq 0$  سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - 2x}{4 + 3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1 - 2x)'(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(4 + 3x^2)'}{(4 + 3x^2)^2} = \frac{-2(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(6x)}{(4 + 3x^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يې بدیل لاس ته راځي

$$\left( (1 - 2x) \frac{1}{4 + 3x^2} \right)' = (-2) \frac{1}{4 + 3x^2} + (1 - 2x) \frac{-6x}{(4 + 3x^2)^2} = \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}.$$

لیکونکي: هیولیگ، کرایخ

زنخیري قانون

د توابعو دزنخیروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د  $f(y) = z, g(x) = y, h(x) = z$  سره دا هم لیکل کیري

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

(لیکونکي: هیولیگ، کوپف)

د زنخیر قانون

$$h(x) = \sin \left( \underbrace{\ln(1 + x^2)}_{y=g(x)} \right)$$

د روبښانه ونې لپاره تعريفيري:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} \sin(y)g'(x) = \cos(\ln(1+x^2))g'(x).$$

د دنني مشتق شمېرنه  $g'(x)$  سر له نوې د زنځيري قانو له مخې صورت نيسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x).$$

بديلي کېدی شي مشتقیزه ليکنود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = \cos(y) \frac{1}{w} 2x = \cos(\ln(1+x^2)) \frac{1}{1+x^2} (2x).$$

ليکونکي: هيوليگ، کوف

ايمپليځيت مشتقور توابع

د بيلگي په توگه د

$$E : x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسي (هگي يا بيضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3y^2) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx} 7 = 0$$

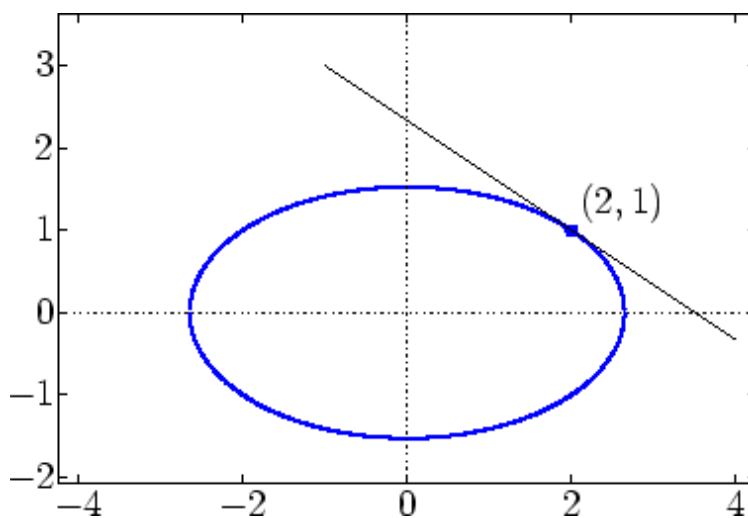
همداسي

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y}$$

سره د تانجنت جگوالی  $y \neq 0$  باندې په یوه ټکي د  $E$  له سره کیدی شي په

لپاره لاس ته راځي  $(2, 1)$  وټاکل شي. د بیلگې په توگه د

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$



په ورته توگه کیدی شي لور یا جگ مشتقونه هم وشمیرل شي. د  $yy'$  لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx} (2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

ټاکلي  $y'(x)$  د یوه ټکي د کواوردینات ایښوولو او همدا اوس د  $E$  بیرته په ارزښت له لارې څرگند ارزښتونه وټاکل شي.

لیمرنکي: هیولیگ، کنپف

## لوگاریتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کېدی شي د بڼې  $y = g(x)^{h(x)}$  مشتق نیونې ته د  $g(x) > 0$  سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} (h(x) \ln g(x)) .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د  $x > 0$  سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1) .$$

د  $g(x) = x^{\ln x}$  لپاره لاس ته راځي

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} .$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

### نيوټن ټلنلار يا قانون Newton-Verfahren

<p><math>f</math></p> <p>د نيوټن قانون سره د يوه تابع صفرځای کېدی شي و ټاکل شي. <math>x_0, x_1 \dots</math> د پرلپسې يا ترادف نږدې ارزښت شمېرنې يا Approximation د کرښيزوالی له لارې وگټل شي. نږدېونه <math>x_{l+1}</math> د تانجنت غوڅتکی دی په <math>(x_l, f(x_l))</math> تکي محور سره. کي د <math>x</math></p> $x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$	
--	--

د يوه ساده صفرځای  $x_*$  ( $f'(x_*) \neq 0$ ) لپاره د نيوټن-ايتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعيز ټولې ته هڅيږي (کونورگنت)، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_*| \leq c |x_l - x_*|^2$$

د پيلتکي  $x_0$  لپاره د  $x_*$  په يوه پوره کوچني چاپيريال کې.





$$x_{l+1} - \sqrt{a} = (x_l + a/x_l)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_l} (x_l - \sqrt{a})^2.$$

$$x_0 \neq 0$$

د نیوتون تئلاز هندسي روښانه وني څخه لاس ته راځي، چي د ټولو لپاره تکرار پولي ته ځي.

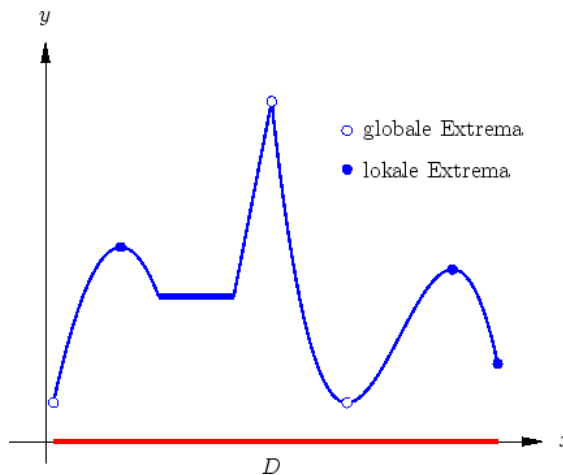
### افراطیت Extrema

يو تابع  $f$  په  $a$  کې په ډبري  $D$  يو ځای اړوند مينيموم لري، که وي:

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

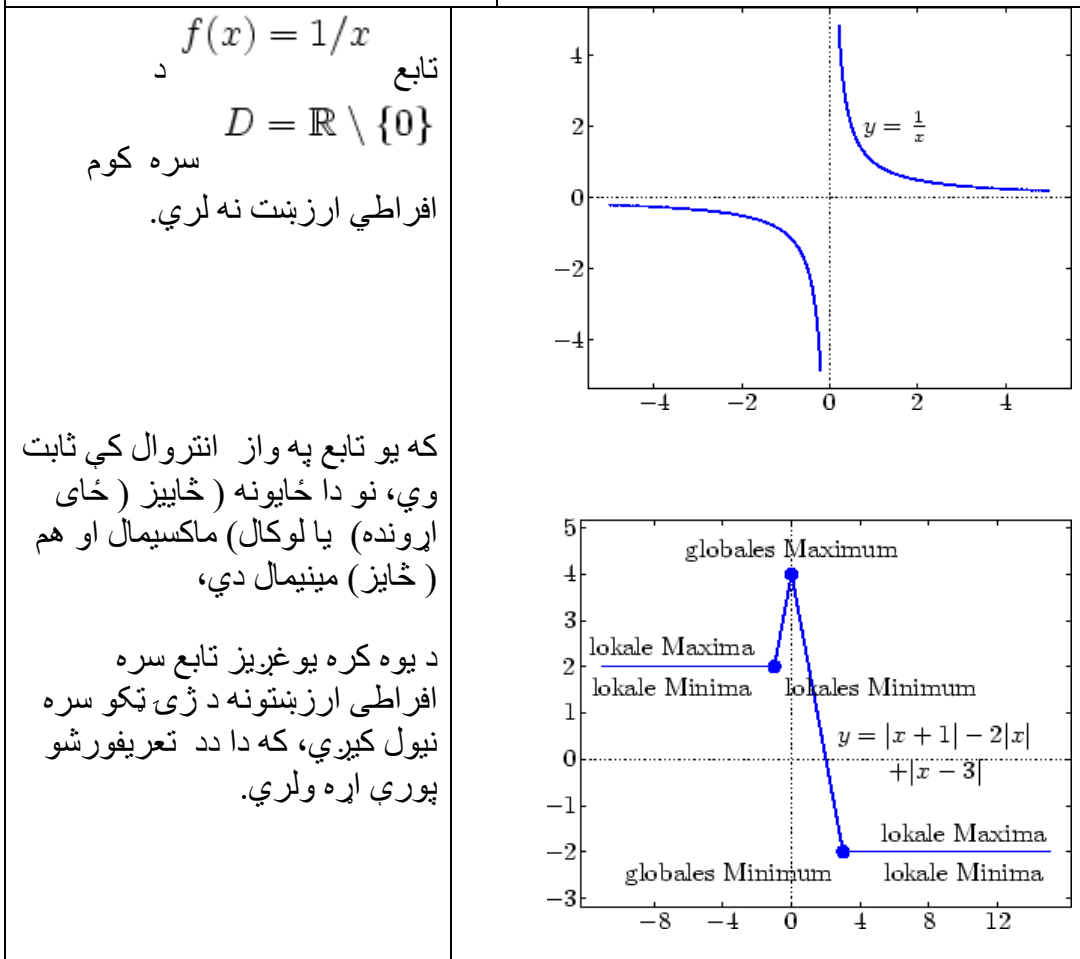
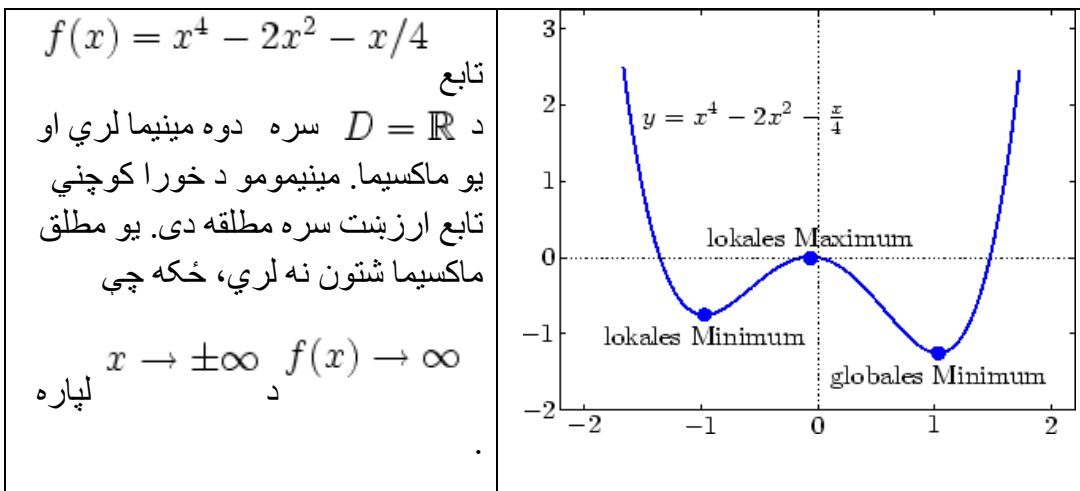
د ځای اړونده مينيموم سره د تابع ارزښت  $f(a)$  په يوه خورا کوچني چاپېريال  $(a - \delta, a + \delta) \cap D$  کې مينيموم دی.

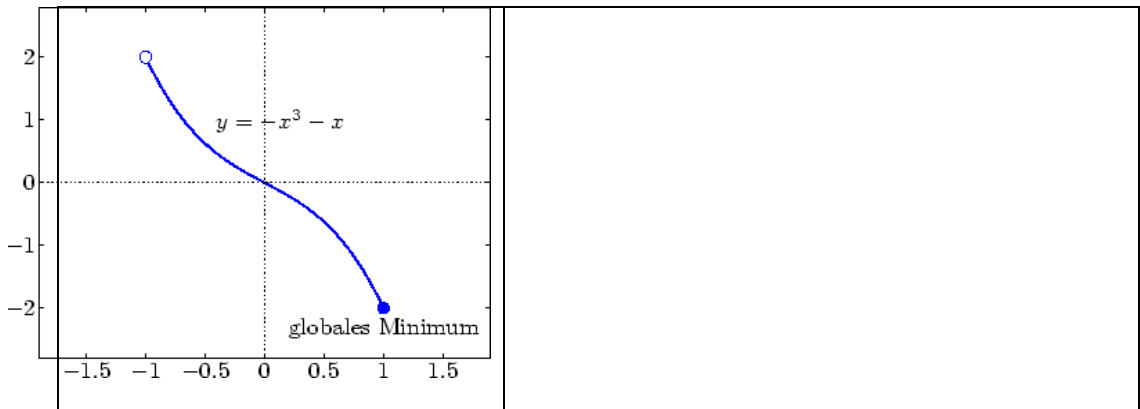
گلوبال او لوکال (مطلق او ځای اړونده) خورا جگ ارزښتونه (ماکسيموم) په ورته توگه تعريف دي.



په يوه بند انټروال په ټوټه ډول نابربکېدوني او مشتقور تابع کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفر ځايونو، پرېکېدځايونو يا ژي ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول ټيوپ کېدی شي د جگو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کوني له لاري پيدا کړای شي. لیکونکي: هیورنر، هیولیک

په لاندې کې به یو څو تیویپکې حالتونه تر بحث لاندې رابښي یا و څپرل شي.





لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

له یوه کلي  $D$  څخه یوه بنار  $S$  ته یو سرک جوړیږي. کلي ته په واټن  $a$  همدا اوس بنار ته یوه شاه لار (گرندی لار) جوړه ده. د بنار څخه د  $P$  ټکي پورې، چې کلي ته نږدې گرندی لار پرته ده، اوږدوالی  $b$  لري.

<p>سیده کرنیزه ټوټه لار جوړیږي. له کومې چې بنا رته زر رسېدل تضمینوي، که په گرندی لار له <math>v_a = 120</math> km/h منځنۍ چټکتیا (سرعت) او <math>v_n = 60</math> km/h په دنوې ځنګیزه ټوټه لار لار شي.</p>	
---	--

واټن  $x \geq 0$  د  $P$  او فرعي ټوټه سرک ترمنځ په گرندی د واټن شمېرته د اړيکېن وخت د مینیمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

بنار ته د رسیدو لپاره .

د مشتق صفر ایښوونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوي لار وخت د انټروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}, \quad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}, \quad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه  $t(0) \geq t(x_m)$  دی. نامساوات  $t(b) \geq t(x_m)$  ورته دي و دي لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

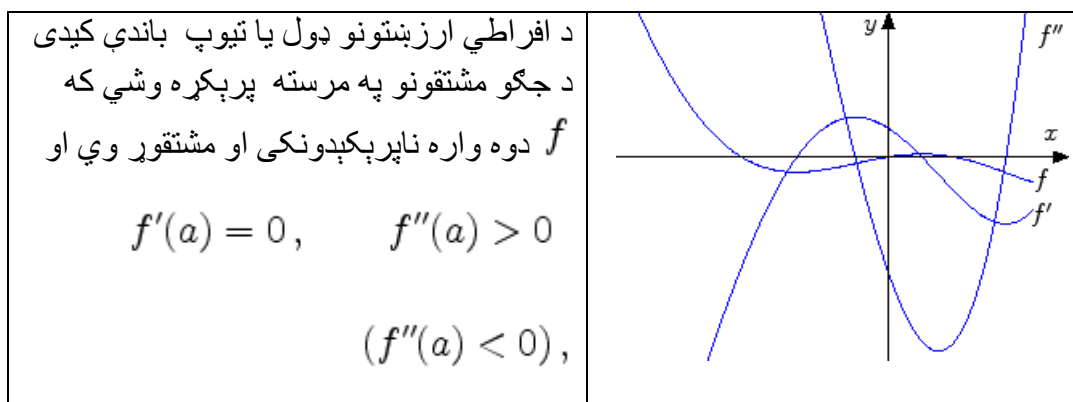
$$\Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0.$$

دا اخري نامساوات تل پوره کيږي، او له دې سره  $x_m$  اوپټیمال دی، که  $b \geq a/\sqrt{3}$  وي.

په بل حالت کې  $x_m$  په انټروال  $[0, b]$  کې نه دی پروت او په ژی ټکي  $b$  پروت مینیموم ته، یعنی ښار ته په سیده ټرنلار، رسېدی شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

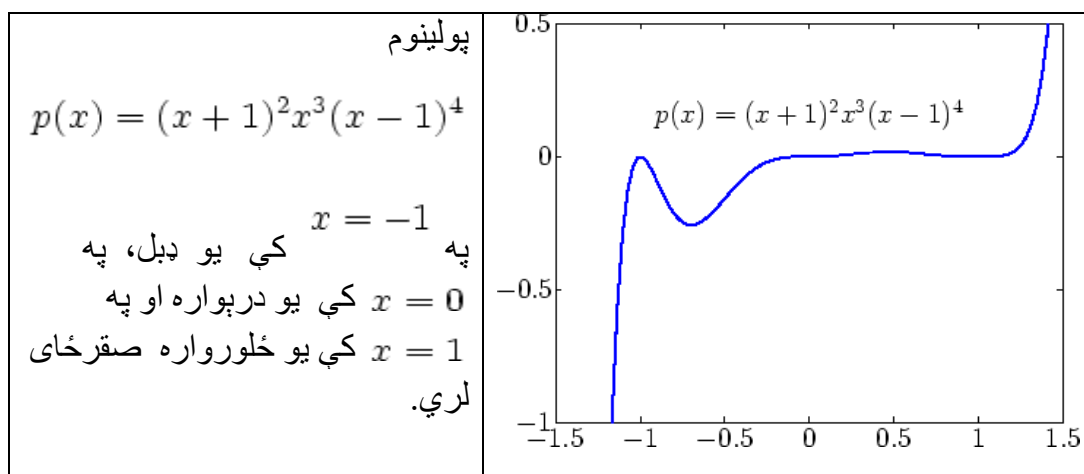
## افراطي ارزبنتونو آزمایننت Extremwerttest



نو  $f$  په  $a$  کې یو ځای اړونده مینیموم (ماکسیموم) لري. که دویم مشتق د  $a$  په ځای کې ورک شي، نو باید جگ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي یا راوړل شي. که باور ولري:

$$f^{(n)}(a) \neq 0, \quad \text{او} \quad f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

نو  $f$  په  $a$  کې ټیک هلته یو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالت کې  $f$  په  $a$  کې یو ځای اړونده خورا جگ - یا همداسې خورا ټیټ ټکی لري، که  $f^{(n)}(a) < 0$  همداسې  $f^{(n)}(a) > 0$  وي.



صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0.$$

په  $x = -1$  کې  $p$  يو مينيموم لري. په  $x = 1$  کې  $p$  يو ماکس لري، ځکه چې

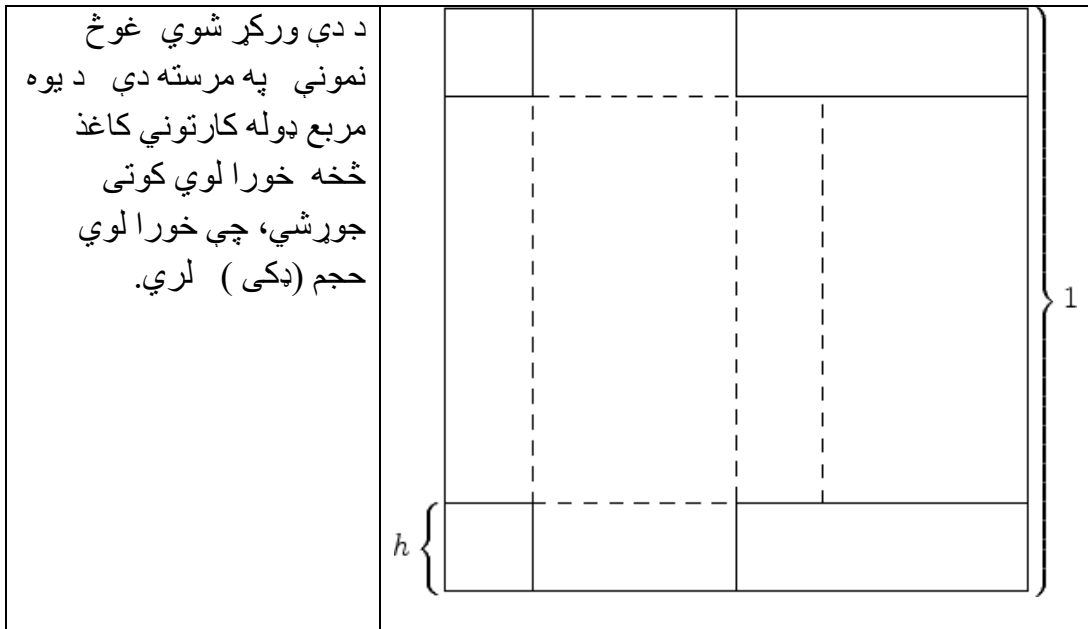
$$p(1) = \dots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0.$$

بالاخره  $p$  د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او يو مخنځبنه بدلون په  $x = 0$  کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتی Schachtel



حجم يا ڊڪي دی:

$$v(h) = \underbrace{(1 - 2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1 - 2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اورڊوالی                      سور                      جگوال

د مشتق صفر ڇايونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

تري

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

د ممکنه ڇای ارونده افراطي ڇايونه لاس ته راڃي. فقط  $h = \frac{1}{6}$  هندسي موخه ور

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$$

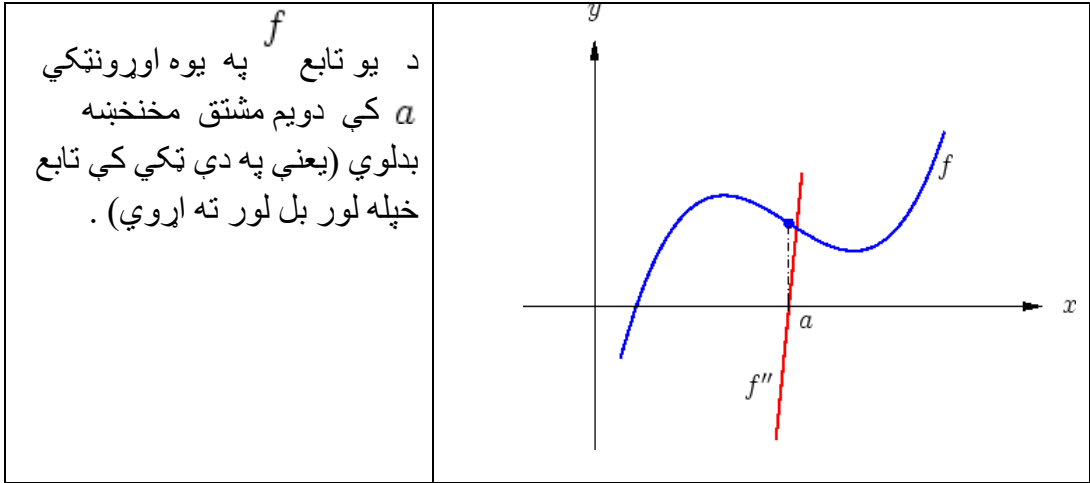
دی او

دا چي د ڙی تڪو  $h = 0$  او  $h = 1/2$  لپاره حجم يا ڊڪي دی، نو کوتی د

لپاره خورا لوي حجم لري.  $h = 1/6$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

اورونتيکي ( نقاط انعطاف Wendepunkte )



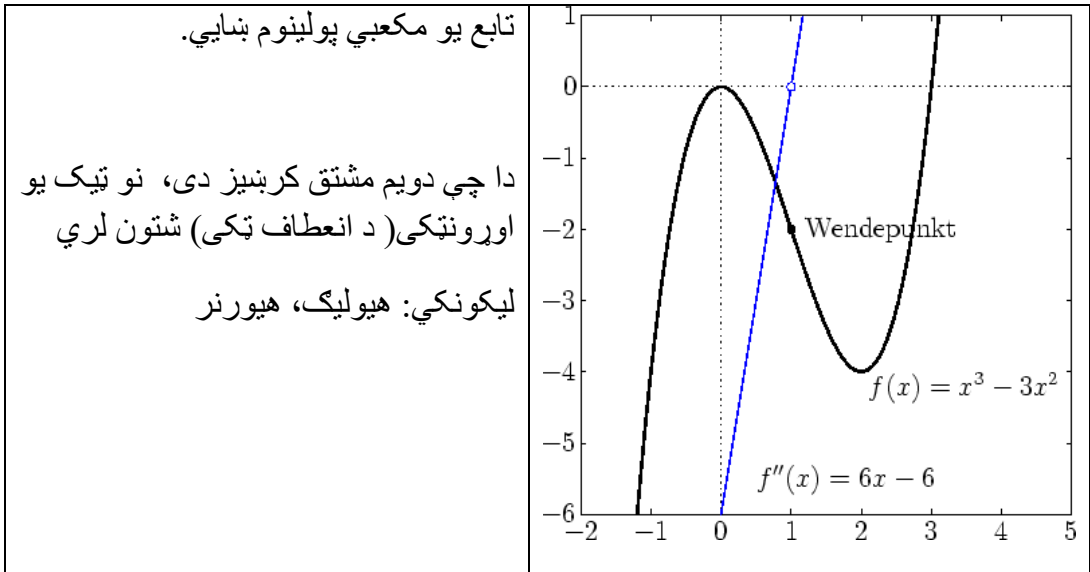
$$f''(a) = 0$$

او پوره دی، چې

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې

$$f'''(a) \neq 0$$

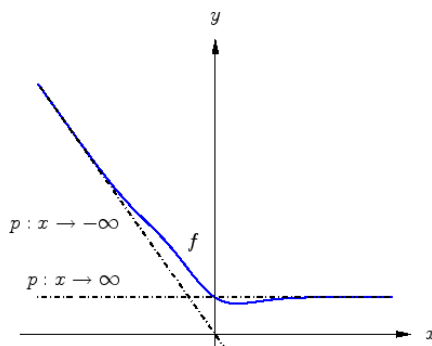
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر



ګاونډي یا لنډ: ګاونډ (مجاورتها Asymptoten)



يو تابع د يوه تابع  $f$  اسيمپتوت دی ، که  $f(x) - p(x) \rightarrow 0$  وي د  $x \rightarrow \infty$  يا د  $x \rightarrow -\infty$  لپاره.



په ورسره بلد ډول  $p$  د  $f$  په څېر يوه ساده بڼه لري او د دې په چوپړکې ، چې  $f(x)$  د څرنگوالي حالت د لوی  $x$  لپاره وڅېړي.

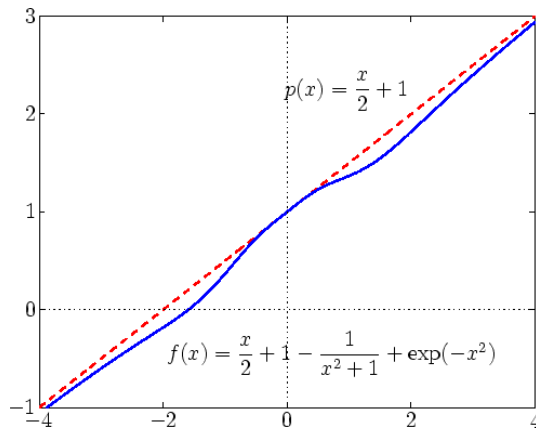
د ځانگړو معناو کرښيز اسيمپتوتونه  $p(x) = ax + b$  دي. دوي د نورو ترڅنگ د منحنی يا کزرو بحث کې يو رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د يوه څېره شوي يا متشکل شوي تابع  $f(x)$  لپاره د  $|x| \rightarrow \infty$  لپاره تناسب د کرښيزو ترمونو له خوا ټاکل کيږي، ځکه چې

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \exp(-x^2) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$$

له دې لاس ته راړني سره کرښه  $p(x) = x/2 + 1$  اسيمپتوت ده.



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د راشنلتابع گاونډيا- اسيمپتوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

يو راشنل تابع

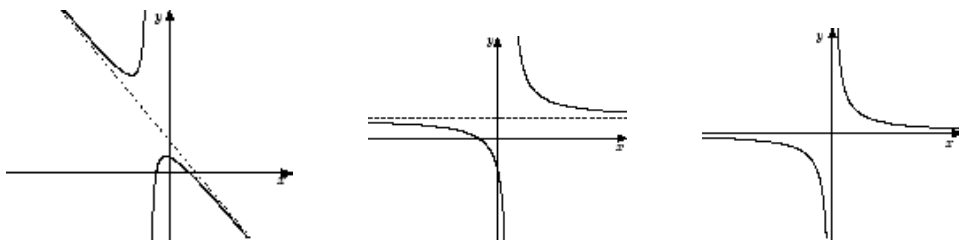
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تيک هلته يو کرنيز اسيمپتوت لري که  $q + 1$  له گراد يادرجي  $p \leq$  وي.

د  $\text{Grad } p < \text{Grad } q$  لپاره باور لري

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0,$$

داپه دي معنا چي د  $x$ -محور اسيمپتوت دي.



د پولینومویش له خوا:  $\text{Grad } e^q \leq \text{Grad } p \leq \text{Grad } q + 1$  لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د  $\text{Grad } \tilde{p} < q$  سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده  $(a = 0)$  ، که  $\text{Grad } p = q$  وي.

که د صورت درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي پولینوم لري د  $\geq 2$  درجې لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_2 = \frac{2x^2}{x+1} \quad r_1 = \frac{4x+3}{2x+1}$$

او

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

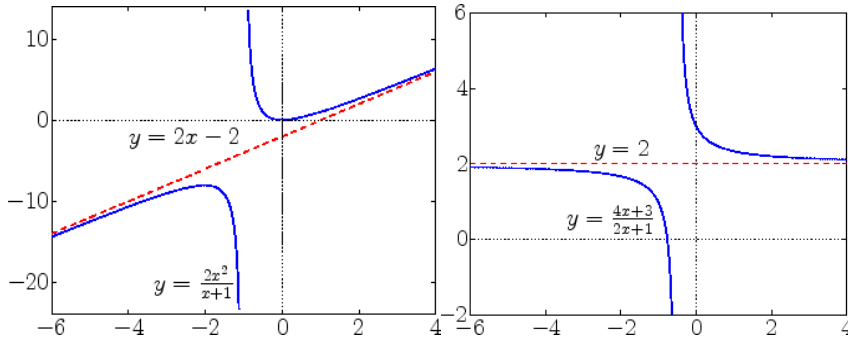
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

او

اسیمپتوت یا گاونډ

$$y_2 = 2x - 2 \quad \text{او} \quad y_1 = 2$$

دا دوه بېلگې په لاندې څېرو کې روښانه شوي دي.



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

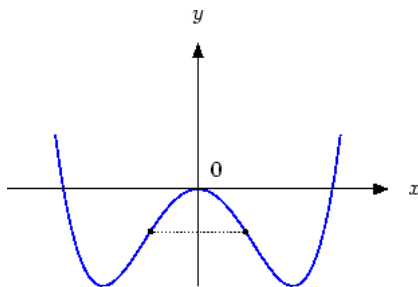
### سيومتري Symmetrie

يو تابع  $f$  جوړه (جفت) دی، که  $f(x) = f(-x)$  وي ، دا په دې معنا، چې که

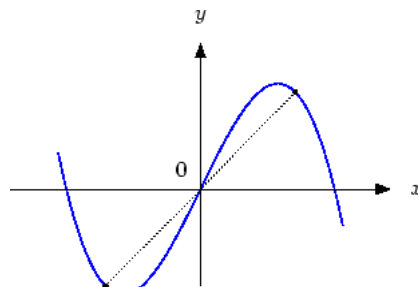
گراف د  $y$ -محور ته سيومتري وي. د يوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره

$$f(x) = -f(-x)$$

دی، او گراف و سرچیني ته ټکی سيومتريک دی.



gerade Funktion

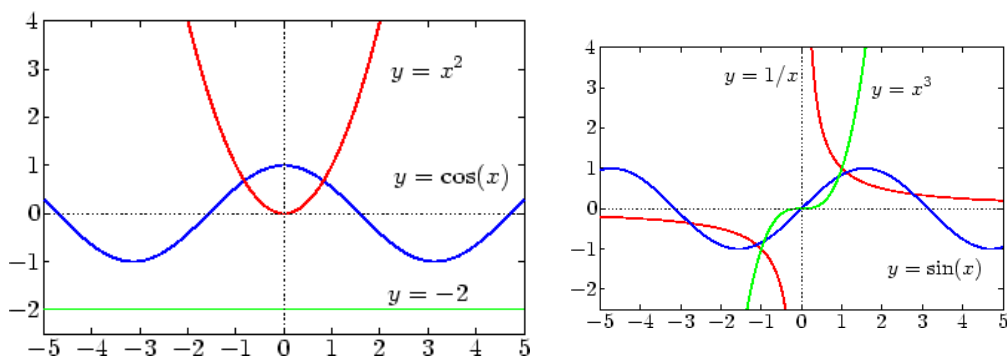


ungerade Funktion

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعي او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پتیري.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کنش

دا لاندې څېره بنسې لور ته یوڅو جوړه او کین لور ته یوڅو ناجوړه توابع بنسایي.



د مناسبو کمبینېشنونو جوړولو سره نورې بېلگې لاس ته راځي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \quad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x)x^3$$

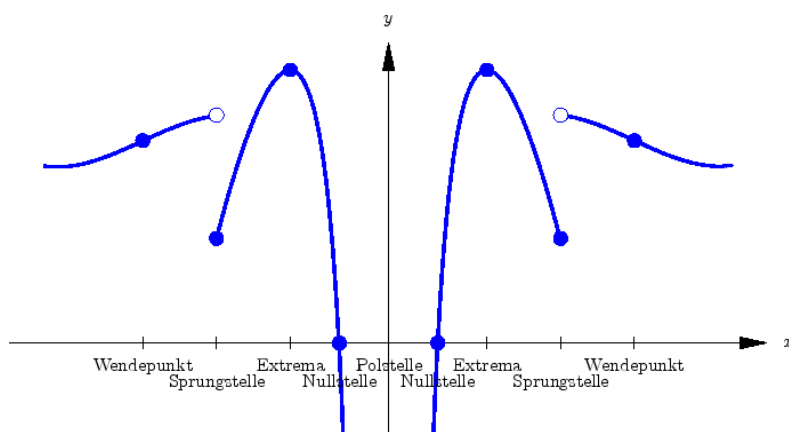
ناجوړه دي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کنش

د کږو یا منحنيو خبرې اترې (بحث)

د یوې تابع د څرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

- Symmetrien سيومتر
- Periodizität تَل بېرته راگرځېدنوالی
- Unstetigkeitsstellen پرېکېدنځایونه
- Nullstellen → Vorzeichen (صفرځایونه)
- Extrema → Monotoniebereiche همغريزوالي وشوگانې ( افرابیت
- Wendepunkte → Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو ( اورونتکی د انعطافنقطه
- Polstellen قطبځایونه
- Asymptoten اسمپتوتي يا گاونډيتوبونه



د توابعو داسې يو تحليل د گرو خبرې اترې يا د منحنيو بحث بلل کيږي

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د کبرو بحث بنوول يا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x)$$

خيرو .

سيمترې: دا چې  $\sin x = -\sin(-x)$  ناجوره تابع دی..

تل بېرته راگرځېدنه يا پريوديځي: تابع پخپله لکه د ساين تابع پخپله  $2\pi$  - پريودي ده او په راتلونکي کي فقط په انټروال  $[-\pi, \pi]$  ترڅېرني راځي.

د پرېکېدنې ځايونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړه شوي او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري.

صفر ځايونه: د جمعې (زياتون) قضیې سره  $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

دی:

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3} \sin^2 x\right)}_{\neq 0}$$

تابع په 0 او  $\pm\pi$  کي صفر ځايونه لري..

افراطیت: تابع

$$f'(x) = 2 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x = -2 \cos x + 4 \cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د  $\cos x = 0$  يا  $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$  لپاره ورکيږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول  $\mathbb{R}$  تعريف او پريوديکي ده، ژينکي ترڅېرني نه راځي.

د دويم مشتق د مخنځېني يعنې

$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x$$

مخنځېني او تابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطیت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

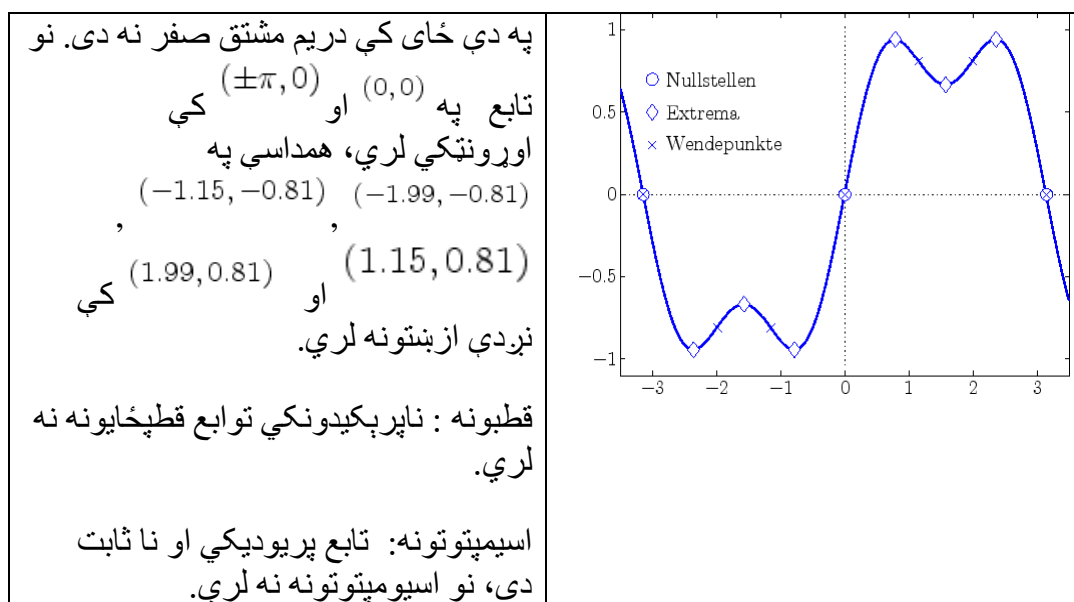
$x$	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اورونٽيکي (نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x = -10 \sin x + 12 \sin^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د  $\sin x = 0$  يا  $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$  لپاره پوره دي، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر



بیلگه :

د یوه کړي بحث د بنووني لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخپړني لاندې نیول کیږی.

سیومتري: صورت ناجوره(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوره دی، داپه دې معنا چې سرچیني ته ټکی سیومتريک دی.

پریودیوالی یا تل بېرته راگرخېدنوالی: تابع پریودیکی نه دی.

د پرېکېدني ځایونه: صفرځایونه  $\pm 1$  د صورت صفرځایونه نه دي. له دې سره په  $f$  باندې ناپرېکېدونکی دی.  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

صفرځایونه: صورت د  $x = 0$  لپاره ورکیږی.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2 - 1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفحایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$  ،  $(2, 4/5)$  ځای اړوند خورا جگ ټکی ، ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

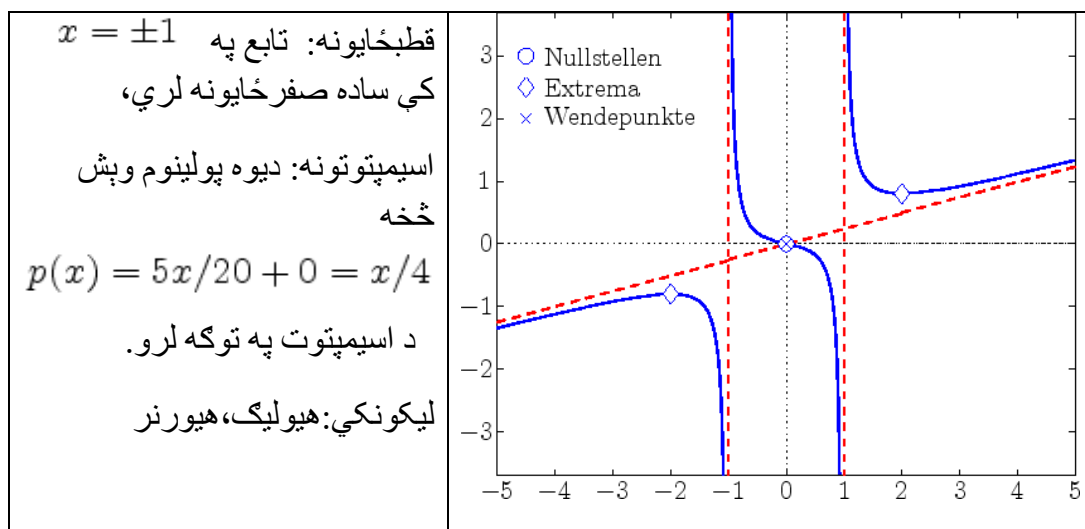
له دې سره کېدی شي، چې د  $f$  ډول یا ټیټ د کوالیتاتیو حالت څخه. دا چې  $f(x) \rightarrow -\infty$  د  $x \rightarrow -\infty$  او  $x \rightarrow -1$  لپاره ، باید په انټروال

$(-\infty, -1)$  کې يو ځای اړونده مينيموم ولري. په ورته توگه په  $(1, \infty)$  کې لږ تر لږه يو ځای اړونده خورا ټيټ ارزښت.

اورونټکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2 - 1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

په دې ځای کې دريم مشتق صفر نه دی.



پبلگه:

د کړې يا منحنی بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نيسو:

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

سيومتر:

داچې  $x^2$  او  $|x|$  جوړه دي تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سيومتريک و  $y$ -محور ته.

پريوديوالی: تابع پريوديک نه ده.

پرېکېدنځايونه: تابع د ناپرېکېدننوابعو څخه مرکبه (يوځای اېنول) شوي ده او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونه په صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځايونه: اکسپوننشل تابع تل مثبت (زاتيزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځايونه نه شته.

افراطيت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4} \text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0, x \neq 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

سربېره پردې دې کرېتیکل ټکی  $x = 0$  په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول  $\mathbb{R}$  تعريف دی، د  $x$  د  $\pm\infty$  په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې  $f(x) \rightarrow \infty$  د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره  $f$  لږ تر لږه يو مطلق مینيموم لري، مگر

هیڅ مطلق ماسیموم. پرتله د  $y$  - ارزښت کرېتیکل ټکی

$$(-2, 9/e^4) \quad (0, 1) \quad (2, 9/e^4)$$

بنايي، چې په  $x = \pm 2$  کې مطلق مینيموم نیولکيري. دا چې په انټروال

$$[-2, 2] \quad (0, 1)$$

يو مینيموم او هم يو ماکسیموم لري، لاس ته راځي چې يو ځای

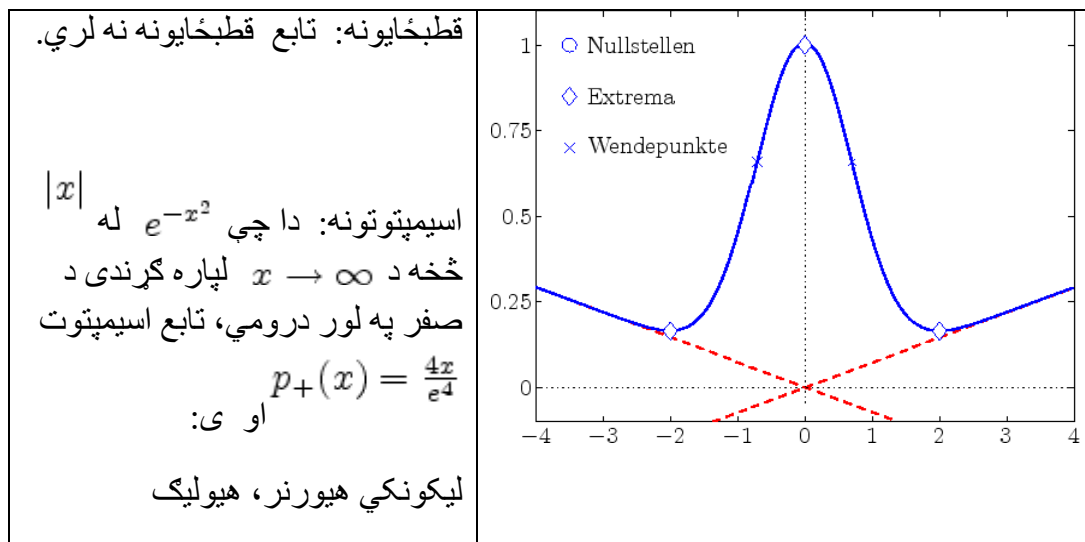
اړونده مینيموم دی.

اورونټکي:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دی خای کی  $\neq 0$  دی.



### د ریمن انتیگرال Riemann-Integral

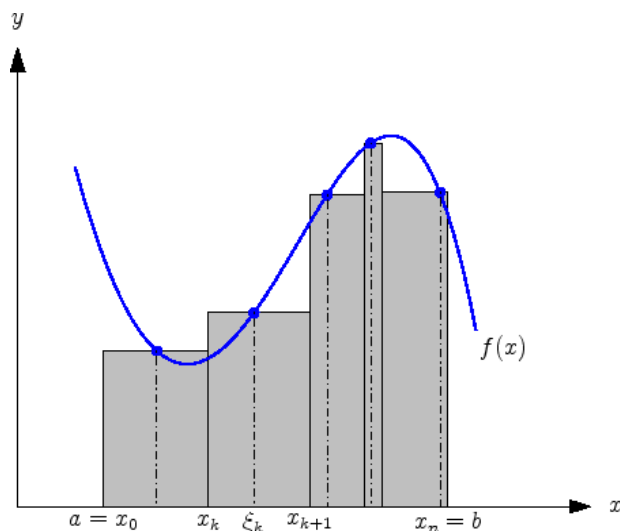
دیوه توتہ ډوله ( په توتہ توتہ کی ) ناپربکډونکی تابع  $f$  ټاکلی انتیگرال د

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \int_a^b f_{\Delta} = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

له خوا یا سره تعریف دی. دلته  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  د  $[a, b]$  توتہ ونه بنایي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

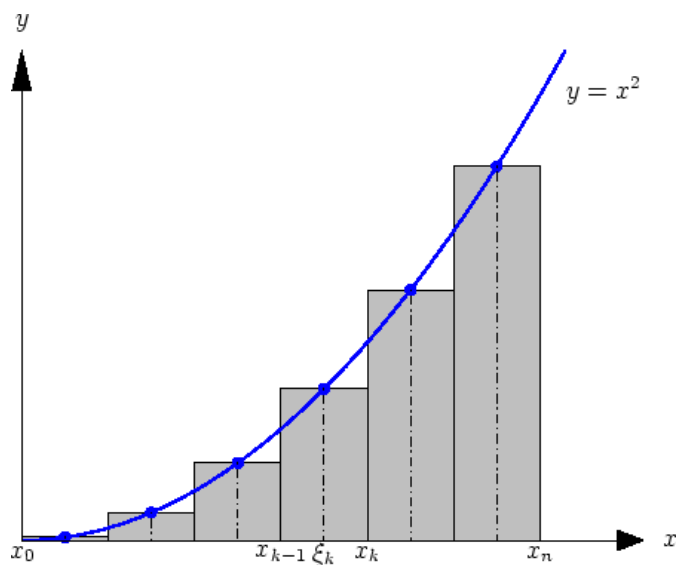
د انتروال ماکسیمال اوږدوالی دی او  $\xi_k$  په خوبه ټکی دی په  $k$ -م انتروال کی. د انتیگرال تعریف په بني لور جمعی د ریمن - جمعو په نامه یادیری.



د مثبت  $f$  لپاره  $\int_a^b f(x) dx$  د سطحی مساحت دی د  $f$  د گراف لاندې.

لیکونکي: هیولیک، هیورنرو ویپر

د  $\int_0^1 x^2 dx$  د ریمن انتیگرال په حیث راوړني سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې (ترادف)



$$\Delta_n : x_i = i/n, i = 0, \dots, n,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځایونو

$$\xi_i = (2i - 1)/(2n), i = 1, \dots, n,$$

سره د  $n$  -مې ټوټه ونې لپاره.

د تعريف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left( 4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left( \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع  $F$  د  $F' = f$  سره د  $f$  بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

د ټول بنسټيزو توابعو ډېری يا ست د  $f$  ، چې د  $f$  ناکلی انټیگرال بلل کيږي. د انټیگرېشن ثابت په خوښه ده. د بېلگې په توگه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

د  $F_a(a) = 0$  سره یو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټيزو توابعو داسې اکسپلیسټ ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بیلگه ده:  $f(x) = \exp(x^2)$  .

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2, \quad F_2(x) = x^3, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2 .$$

یو بنسټيز تابع دی.

د  $f(x) = \frac{1}{x}$  لپاره د  $c > 0$  سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

یو بنسټيز تابع دی.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د انټیگرال شمېرنې اصلي جمله

که  $F$  د یوه ناپرېکېدونکي تابع  $f$  بنسټیزه تابعوي، داپه دې معن، چې  $f = F'$  ، نو باور لري

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

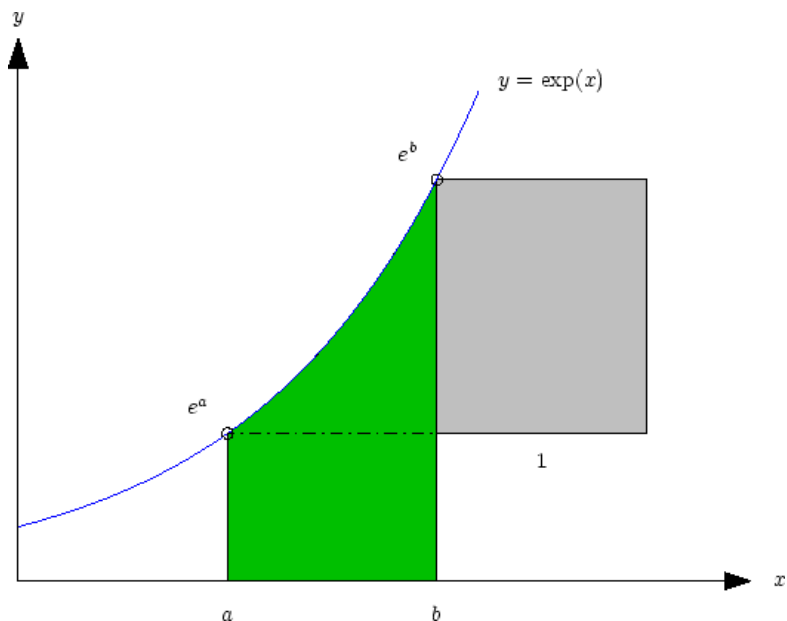
همداسې په لنډ لیکډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b .$$

یو ټاکلی انتیگرال کېدی شي د بنسټیزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:





$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a .$$

د  $a$  او  $b$  ترمنځ د گراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو د جگوالي واین څخه جوړ ولاړگودیز (مستطیل).

د لوگاریتمي تابع  $F(x) = \ln(x)$  مشتق  $F'(x) = 1/x, x \in \mathbb{R}^+$  دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x dx = \ln(b) - \ln(a), \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیگی

د  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  یو بنسټیز تابع  $F(x) = \arctan x$  دی . په تعقیب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} .$$

د کمښت سره *verifiziert* ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د  $f(x) = \tan x$  بنسټیز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پایله ده:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیگ

یو پلانېټ د  $M$  کتلې سره یو د گراویتیښن (راکبني ورشو) ورشو تولیدوي، چې په

یوه تن یا بدن د  $m$  کتلې سره یوه قوه  $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$  د گراویتیښن ثابته ده او  $x$  د دروند ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی. استعمالوي. دلته  $\gamma$  د

د لپاره بنسټیز تابع  $\frac{1}{x^2}$  دی. د دې لپاره چې یو بدن د  $a$  څخه و  $b$  ته په واټن یوسي، باید کار

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) \, dx &= \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -[\gamma m M / x]_a^b \\ &= \gamma m M (1/a - 1/b) \end{aligned}$$

سرته ورسیري .

د  $a$  لپاره مساوي د پلانټ وړانگه او  $b \rightarrow \infty$  کېدی شي د کینېټیکي انرژي سره د مساوي ایښوني له امله داسې په نامه د تېښتي چټکتیا یا سرعت  $v$  و ټاکل شي، دا په دې معنا چې چټکتیا، چې اریښه ده، د یوه پلانېټ گراویتیښن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2} v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره  $v = 11.2 \text{ km/s}$  لرو.

لیکونکي: هیورنر، هیولیگ

### غوره - يا راوتلي بنسټيز توابع

لاندې جدول د زيات رامنځ ته کېدونکو توابعو  $f(x)$  د بنسټيزو توابعو  $F(x)$  جدول بڼايي.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^s, s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$	$1/x$	$\ln x $
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

### توټه انټيگرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو  $(fg)' = f'g + fg'$  له مخې د ناتيکيو انټيگرالولولپاره يو ورته فرمول لرو:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx .$$

په اړونده توگه د ټاکلو انټیگرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

$$[fg]_a^b$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژی ترمونه ورکیري، که یو له دې دواړو توابعو په انټروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیکی توابعو لپاره هم ورکیري، د پریودی اورډوالي  $(b - a)$  سره.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

له

$$\int (1 + x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} (1 + x)^{\alpha+1} + c$$

د  $\alpha \neq -1$  لپاره

لرو

$$\int \underset{u}{x} \underset{v'}{\sqrt{1+x}} dx = x \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} - \int 1 \cdot \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} dx$$

$$= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \frac{4}{15} (1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توگه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x} \sqrt{\underset{v'}{1-x}} dx = \left[ -x \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} \right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} dx$$

$$= 0 - \left[ \frac{4}{15} (1-x)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

ليکونکي: هيوليک، کوف

د اووېستونو (واريابلو) بدلون Variablensubstitution

د زخيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون  $y = g(x)$  لپاره د بنسټوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(y) + c = \int f(y) dy.$$

په ورته توگه د ټاکلو انټيگرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

$$\int_a^b f(g(x)) \frac{dy}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

ليکونکي: هيوليگ، کوف

که په انټيگراند کي دننی مشتق پېژندور وي، لکه د بېلگي په تگه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلگه کي ردو

$$y = g(x) = \ln x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2 g'(x) dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 + c.$$

د په څې بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x} dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c.$$

ليکونکي: هيوليگ، کوف

په ټيپيک ډول د بدلون له لارې سړی هڅيري چي انټيگرال ساده کړي. د بېلگي په توگه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y} - 1} dy$$

لپاره په نږدې توگه ردو

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

داد

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوی ناتیځلی انتیگرال راکوي.

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3}{x^2 - 1} \frac{dy}{dx} dx \\ &= \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx = \int \left( 1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx \\ &= \int 1 dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

د  $x = e^y$  په ځټ يا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2} \left| \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \right| + c.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د مرکاتور پربوستون Mercator-Projektion

بنسټابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \quad du = \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$$

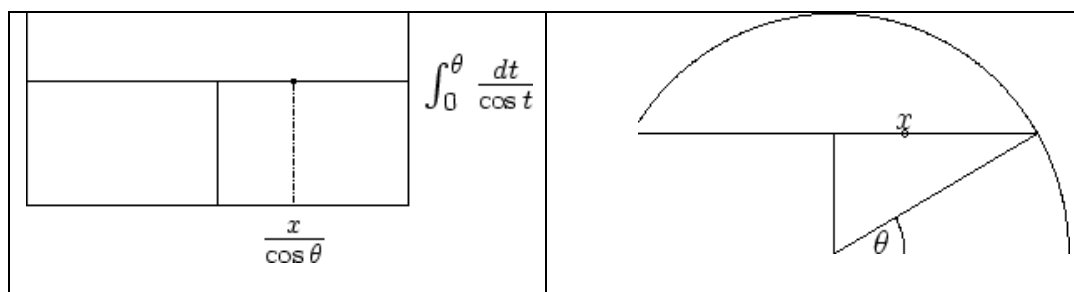
سره وشمېرل شي.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int (\cos x)^{-1} \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^{-1} du$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c.$$

يو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکې پوښ سطحه کرنجساتونکي يا کرنجینتوني په يوه سطحه پر یوځي يا پری ایستلی شي.



دلته سور درجه يا عرض البلد په اړیکو  $1/\cos \theta$  غزول شوی.

لیکونکي: هیولیک، کوپف



### د څرخېدونکو بدنونو ډکۍ (حجم) Volumen von Rotationskörpern

<p>په <math>x</math> -محور د تابع  <math>r = f(x) \geq 0</math>          ،  <math>a \leq x \leq b</math>          د څرخېدنې          له امله جوړ شوی بدن <math>V</math>          ډکۍ (حجم) کېدی شي د          گردۍ ډوله (دایره ډوله)          پروت غوڅیو انټیګرال له          لارې و شمیرل شي:</p> $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx .$	
---	--

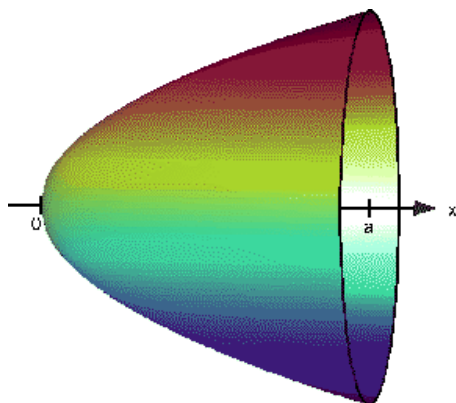
په بدیلې ډول کېدی شي توتې (استوانې) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

$$V = \pi c^2(b - a) + 2\pi \int_c^d r h(r) dr ,$$

$h(r)$   
 د کوم سره چې  $c$  همداسې  $d$  مینیمال همداسې ماکسیمال وړانګې  $r$  دي او  
 په بدن کې خوندي توتې پوښ ټول جگوالی دي د وړانګې  $r$  سره. دا بدیل د ټولو له  
 مخه د همغږیز وړانګې تابع  $f$  لپاره موخه ور دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

دا جوړ یا څېره شوی پارابولویډ د  $x$  -محور باندې د کږې  $y = \sqrt{x}$   
 څرخون سره  
 منځ ته اخی



د څرخون بدن د فرمول سره سم ډکۍ (حجم) دی:

$$\pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

په بدیلې توگه د توتې پوښ باندې انتیگرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[ -\frac{1}{4}(a - r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen  
Diss . Uni. Wien Algebrn .

*Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
Dissertation at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شمير: د شميرپوهني انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهني الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابران ( دا کتاب په دي څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهني فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبري: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا

آبادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلي هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برينکمن ليکني چي له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره لومړی توک
- ۲ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دويم توک
- ۳ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دريم توک
- ۴ - د احتمالوالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چي د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزی ۲
- ۸ - کر بنيز الجبر
- ۹ - د شمير پوهني بنستونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولگه
- ۱۱ - فنکشنل اناليز
- ۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ - د شميرپوهنې سم اند ( منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهنې گډې وډې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته

تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ - د شميرپوهنې انگرېزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شميرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زره له کومې ( دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د بسونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېشي)

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميري شينواری د اروابناده پستو او اروابناده نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ه لمریز کې د شينواریو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپتمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د ریاضي څانگه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

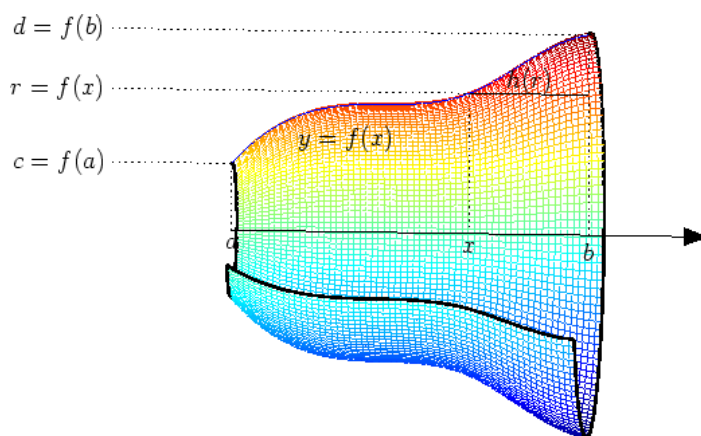
ماخان ميري په ۱۹۷۲ کې له لري د میرمن ښاپیری سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز کې دوه بچیان وبخښل، چې څانگه او اباسین نومیري. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې. ماخان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو لیکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.



## د شمیر پوهنې بنسټونه



لیکونکي: پروفیسور هیولیک او ډله یې

## له مات. ن ج څخه

### ژباړي : ډاکټر ماخان ميري شينوالمري

۱	وينا
۲	منطقي(سم انديزي) ترني
۱۱	کوانټورونه
۱۳	سيده بنوونه
۱۴	ناسيده بنوونه
۱۴	ايمپليکېشن تري لاس ته راتلنه يا — راورنه
۱۶	د پوره اندکشن له لاري بنوونه
۱۶	د مربع (څلوري) عددونو د جمعي لپاره فرمول
۱۷	ډبري(سټ)
۱۹	د گڼونو (اعدادو) ډبري
۱۹	په ډبريو کي عمليي
۲۳	کارتېزي ضرب (حل)
۲۴	اړيکي
۲۵	د اړيکو د داتا بانک
۲۵	د اړيکو خويونه
۲۸	فنکشن
۳۰	د تابع يا څيرونې يا بلواک(تابع) خويونه
۳۲	د فنکشنونو
۳۲	په څټ يا برعکس فنکشن
۳۳	فاکولټي يا فکتوريل
۳۳	د بينوم ضريبونه
۳۴	د پاسکال درېگودي
۳۵	د بينوم درسي جمله

۳۸	د بینوم ضریبونو لپاره کټمټوالی
۴۰	د دېریو یا ستونو کمبیناتوریک
۴۹	کرینیز فنکشنونه
۵۰	مربعیز فنکشنونه
۵۱	مایل گوزار یا - غورخونه
۵۳	پولینوم
۵۴	راشنل فنکشن یا بلواک (تابع)
۵۵	ساین او کوساین
۵۸	تانجنت او کوتانجنت
۶۰	اکسپوننشل توابع (بلواک)
۶۳	د گټې گټه
۶۵	لوگاریتم
۶۶	تولیز په توان تابع او لوگاریتم
۶۸	د لوگاریتم شمېرونی
۶۸	مشتق یا رابېلېدنه
۷۱	غوره (مهم) مشقونه
۷۲	د مشتق کرینیزوالی
۷۵	ایمپلیخیت مشتقور توابع
۷۷	لوگاریتمي مشتق
۷۸	نیوتن تلنلار یا قانون
۷۹	د بابلیانو ریښه (جذر) نیونه
۸۰	افراطیت
۸۲	د مشتق صفر ایښوونه
۸۴	افراطي ارزښتونو ازمايښت
۸۵	کوټی
۸۸	گاوندې
۸۹	د راشنلتابع گاوندې یا- اسیمپتوتونه
۹۱	سیومتری
۹۲	د کبرو یا منحیو خبرې اترې (بحث)
۹۹	د ریمن انٹیگرال
۱۰۱	بنسټیزه تابع
۱۰۳	د انٹیگرال شمیرني اصلي جمله
۱۰۶	غوره - یا راوتلي بنسټیز توابع
۱۰۸	د اووښتونو (واریابلو) بدلون
۱۱۰	د مرکاتور پرېوستون

- ۱۱۲ د څرخيدونکو بدنونو ډکی (حجم)  
۱۱۵ پوښتنه:  
۱۱۹ د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوي ليکنې:  
د ډاکټر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او  
۱۲۱ ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**