بسم الله الرحمن الرحیم

لومړی څپرکی

داحصائیی اساسی مفاهیم اود دفعاتو توزیع

احصائیه څشی ده؟
ایا احصائیه د اعدادو جمع کول دي؟ ایا احصائیه د شکلونو رسم او لایه ده؟ ایا د وزګارتیا اوسط یا سلني محاسبه او یا د نورو شاخصونو محاسبه ده، ایا احصائیه د ټولنې یا طبیت ځانګړو عددي مقدارونو محاسبه ده؟
هو! دا ټول سم دي، خو احصائیه د یو علم په توګه معلوماتو ته د مفهوم ورکولو مطالعه او څیړنه ده. د ټولنې د بیلابیلو برخو کسان معلوماتو ته اړتیا لري.
د بیلګې په توګه مرینه، د کرنې حاصلاتو کچه، روغتیايي پیښې، ترافیکي پیښې او داسي نور...
مونږ دلته احصائیه موخې ته د رسیدو لپاره کاروڅو معلوماتو ته مفهوم ورکړو او و یې ارزو

1.1داحصائیی تعریف او مفهوم:

احصائیه یوه عربی کلمه ده ،چې دشمیرلو په معناده .په انګلیسی کی (statistics) بلل کیږی چې دلاتنی لغات status څخه اخستل شویدی چې د دولت لپاره دضرورت وړ اودټولنی لازمه ارقامو اومعلوماتوپه معناده.نن ورځ هم په انګلیسی ژبه کی state دولت ته ویل کیږی داحصائیی لپاره علماو بیلابیل تعرفونه کړیدی
په ساده او معمولی مفهوم سره احصائیه دارقامو اوشمیرلو هری هغی مجموعی ته ویل کیږی چی دچاپیریال یادانسانانو ټولنیزو،اقتصادی،سیاسی اونورو فعالیتونو او ښکارندو په اړه وی .دچاپیریال په برخه کی د اوربښت ، نودونی، [illegible] نرخ بیاني، د [illegible] بیلګی د [illegible] ټولنیزو [illegible] فعالیتونوپه برخه کی د وزګارو اوپه کاربوحتو وګړو شمیر ، دسواد سلنه، دناروغیو کچه،واردات،صادرات، او داسی نوری بیلګی ذکر کولای شو .

(Kendall) او (Yule) وایی: د ډیرو اړتیاو دټاکلو لپاره په ټاکلو حدودو کی دکمی ارقاموڅیړنی ته احصائیه وایی.
که پورته تعریف ته نظر وکړو :
احصائیه په لومړی ګام کی اطلاعات (ارقام) ،معلومات اومشاهدات راټولوی همدغه ارقام(Data) خام مواد دی ، چی بیا تنظیمیږی او په لنډیز سره ارائیه او په واضح ډول سره تشریح کیږی ، دهغوی تعبیر او تفسیر اسانه کیږی
په دویم ګام کی احصائیه د څیړونکی سره مرسته کوی چی دخپلو څیرنو پایلو ته پراخوالی ورکړی

1.2

د احصائيي لنډه تاريخچه:

احصائيه دانسانی ټولنی دلومړی دولت په اندازه لرغونتوب لری کله چی مصر ،بابل ، کی لومړنی دولتونه په ابدائیه بڼه جوړشول ، دا وخت دملاد څخه (۳۰۵۰) کاله مخکی چی دوی پخپلو قلمرونو کی د دولتی چارو د ضرورت له مخی دنفوسو او نورو منابعو په هکله شمیرنی کولی په چین کی (۲۰۰۰) کاله مخکی تر ملاد سر شمیرنه شوی په (۱۰۱۷) م کال کی د اوسنی فلستین د نفوس شمیرنه شویده په انګلیستان کی (۱۳۷۱-۱۳۱۲)م کال کی مالیه ثبت او دمالیی ورکونکو شمیر ثبت شویدی

په همدی سلسله احصائیه دخلګو د توجه وړ وګرځیده

1.3داحصائيی د پلی کولو (تطبيق) ساحه

له احصائيی څخه دعلومو ديوی څانګی او دځانګړو ميتودونو او روشنو ديوی ساحی په توګه په لاندی برخو کی ګټه اخستل کيږی

1- دکرنيزو محصولاتو د توليد او ويشلو په برخه کی
2- دنفوس وکړو او کورنيو دځانګړتياو په برخه کی
3- دمهاجرتونو مسافرتو نو او دهغوی داړوند حالاتو په برخه کی
4- داقتصادی ،ټولنيزو،فزيکی، ودانولو دبنستونو او دهغی دساتنی اوڅارنی په برخه کی
5- دسياست ،ټاکنو، او دانسانی حقونو په برخه کی
6- دترانسورت او مالياتو درا ټولولو په برخه کی
7- دعلمی تحقيقاتو او مطالعاتو سروی دعلومو دبيلابيلوڅانګو په برخه کی
8- دسوداګری ،مارکيټ ، دکار ساحی او د عوايدو ، لګښتونو دسطحی په برخه کی
9- د ښوونی اوروزنی ، په ملکی اونظامی خدمتونو کی د نفوسو دجلب په برخه کی

1.4 د احصائيې تقسيم بندی

احصايه د ارقامو د توضيح او تشريح له مخي په دوه برخوويشل کيږي .

1: **تشريحي احصايه(Descriptive statistics)** : دا احصايه دټولو هاغو روشونو او اوصافو څخه عبارت ده چې د يو جميعت او يا يوي نموني د اوصافو اومشخصاتو په تشريح او تو ضيح کې په کاروړل کيږي لکه داوسط،مياني ، مود،او معياري انحراف چی داحصائيی په همدی برخه کی تشريح کيږی.

۲-استنباطي احصايهInferential statistics: استنباطي احصايه د هاغو روشونو څخه عبارت ده چې د هغي له لاري د يوي نموني د مربوطه مشخصاتو له مخي د يو جميعت مشخصات استنباط کيږي.

استاد عبدالاحد ارين

او يا په بل عبارت استنباطي احصايه هغه احصايي ته وايي چې د جزپه تشريح کولو د کل سره سراو کار لري يعني محقق د نموني اوصاف سره سراو کار لري او د مشخصو روشونو په واسطه د نموني مشخصاتو له مخي د جميعت د مشخصاتو په اړوند خپل حکم صادروي .

1.5 جمعیت (population):

یو سټ چی ټول عناصر یی یو یاځو مشترک خاصیتونه ولری او په یو مشخص وخت او مناسب موقعیت کی قرار ولری جمعیت بلل کیږی یا جمعیت ټولو هغو ارقاموته ویل کیږی چی دمطالعی او څیړنی لاندی وی او د مطالعی لپاره را ټول شوی وی په دی کی د بوټو ، څارویو ، حشراتو، دحرارت درجه، او نور ټول ارقام راځی

احصائیوی جمعیت دوه ډوله دی : محدود نفوس (finite population) د بیلګی په توګه :د هلمند دنوزاد د انارو حاصلات ، دهلمند دناوی ولسوالی دپمبی حاصلات او بل یی بی نهایت نفوس (Infinite population) دبیلګی په توګه د ټوله نړی د انارو حاصلات یا د ټولی نړی دانارو د پخیدو د وخت سنجس ، په هغو کی د ګټورو موادو مقدار او نور مثالونه .

1.6 نمونه او نمونه اخستل (sample and sampling):

په ځینو مواردوکی دیوجمعیت یا ټولنی داعضاوو مطالعه ستونزمنه وی ،پر مصرفه اوپه عمل کی ستونزمن کار دی ، دمثال په توګه دافغانستان د 9 کلنو ماشومانو د استعداد ضریب (IQ) معلومول ستوزمن کار دی نو داحصائیی پوهان د ټول جمعیت د مطالعی لپاره نومړی جمعیت په څو ګروپونو ویشی چی دیوی برخی انتخاب دجمعیت څخه دنمونی(sample) په نوم یادیږی او دغی پروسی ته عملیی ته نمونه اخستل (sampling) وایی په احصائیه کی دجمعیت خصوصیاتو ته پارامتر (parameter) او نمونی خصوصیاتو ته تخمین یا براورد (Estimates) وایی که په احصائیه کی د 100 محصلینو دقد لوړ والی اندازه کړو او دهغوی اوسط قد په لاس راوړو نو لاس ته راغلی مقدارته تخمین د ټولو محصلینو وایی.

نمونه اخیستل له عناصرو څخه د نموني اخيستلو لپاره، يوازې يوه برخه يې د نموني په توګه مشاهده او اندازه کوو او د نموني پايله له عناصرو سره پرتله کوو ، هرهڅيرنه او ارزونه کي د سمي نموني غوراوی يوه مهمه موضوع ده.

له دې امله د احصائي مهم بحثونه د احصائي نموني اخيستني نظرياتو او ميتودونو ته ځانګړي شوي دي.

نمونه اخيستل په دوو ډلو وېشل کيږي

۱ساده نمونه اخيستنه

ـ۲تصادفي نمونه اخيستنه

ـ۱ساده نموني اخيستنه کي د احصائيه پوه ليتوالتيا او سليقه شامل دی.

ـ۲تصادفي نمونه اخيستنه کي د احصائيه پوه ليتوالتيا او سليقه شامل نه دي.

استاد عبدالاحد ارين

کیدای شي چې ټول عناصر د نمونې اخیستنې مساوي چانس ولري او د احصائي علم کې تر ډېره له تصادفي نمونه اخیستنېڅخه استفاده کیږي.

یعنې د دې ډلې ټول عناصر د نمونې اخیستنې عنصر په توګه مساوي چانس لري او د احصائې علم کې تر ډېره بریده تصادفي نمونه اخیستنه کارول کیږي.

د بېلګې په توګه که د یو پوهنتون ۵۰ زده کړیالان د ونې/ قد ټاکلو لپاره د نمونې په توګه غوره کړو او د هغوی د ونې لوړوالی پیدا کړو په دې صورت کې له اټکل څخه تر لاسه شوي معلومات د ټولو زده کړیالانو د قد اوسط ښیي.

1.7 متحول (Variable)

1. تعریف : هر عنصر چی داندازه ګیری وړ وی د متحول په نوم یادیږی
2. تعریف: دمتحول اندازه ګیری ته تحول وایی
3. تعریف : که چیری متحولونه یوازی تام قیمتونه واخلی ، نو دغیر متمادی متحول په نوم یادیږی لکه : دیوی ښو ونځی د استادانوشمیر
4. تعریف: که چیری یو متحول د دوو معینو حدونو تر منځ قیمتونه واخلی د متمادی متحول په نوم یادیږی ،لکه دقد جګوال ، وزن ، استعداد......

1.8خام مواد یا خام اطلاعات (Raw Data)

د دعدادو جمع کول او نمایش دی ، دخیرنی او سنجس لپاره نوموړی مواد دپوهیدو وړ نه دی یا په بل عبارت دهغه ابتدائه معلوماتو او ارقامو را ټول دی چی په عددی ډول نه وی ترتیب شوی یعنی:

- تحلیل او تجزیه نه وی
- ګنګ وی
- دپو هیدو وړ نه وی
- خشک یا خام ارقام وی

1.9 مجموعه(Summation)

په احصائیه کی اکثره وخت د مجموعی څخه استفاده کوو دبیلګی په توګه : که د x یو متحول ولرو او هغه ته $x_1, x_2, .., x_n$ قیمتونه ورکړو نو په لنډ ډول یی په x_i سره ښیو چی $i = 1,2,3 \dots, n$ چی دی او مجموعه یی په لاندی ډول سره ښیوو

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \quad \ldots + x_n$$

۱ ـ **قضیه :**د دوه یاڅو متحولنو مجموعه د هر متحول دجلا مجموعی څخه عبارت ده

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

ثبوت:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + \cdots + (x_n + y_n + z_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) + (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

دويمه قضيه : که چېرې c يو ثابت عدد وي، نو:

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ثبوت :

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n = c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

لومړی مثال :- که $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$ وي، نو: $\sum_{i-1}^{3} x_i$ محاسبه کړئ ؟

حل :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{n=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 2+4+6 = 12$$

دويم مثال : که $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$ وي لاندې مجموعې پيدا کړئ؟

$$1:\ \sum_{i=1}^{3} x_i \qquad 2:\ \sum_{i=1}^{3} 2x_i^2 \qquad 3:\ \sum_{i=1}^{3} (x_i - i)$$

حل:

$$1:\ \sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 3+5+7 = 15$$

$$2:\ \sum_{i=1}^{3} 2x_i^2 = 2\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2(3^2 + 5^2 + 7^2) = 166$$

$$3:\ \sum_{i=1}^{3} (x_i - i) = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3)$$

$$= (3-1) + (5-2) + (7-3) = 2+3+4 = 9$$

۳-مثال: د جمع دحاصل په شکل یی ولیکی

$$a)\sum_{i=1}^{3}(4y_i+1) \qquad b)\sum_{i=1}^{3}2x_i^2$$

حل :

$$a)\ \sum_{i=1}^{3}(4y_i+1)=(4y_1+1)+(4y_2+1)+(4y_3+1)$$

$$b)\sum_{i=1}^{3}2x_i^2=(2x_1^2)+(2x_2^2)+(2x_3^2)$$

که $x_i=2,4,5$ او $y_i=1,3,4$وی نو په دی صورت کی لرو چی:

$$\sum_{i=1}^{3}(4y_i+1)=(4.1\quad+1)+(4.3\quad+1)+(4.4+1)=35$$

$$\sum_{i=1}^{3}2x_i^2=(2.2^2)+(2.4^2)+(2.5^2)=90$$

دیوثابت عدد aمجموعه دهغه n برابره کیږی یعنی :

$$\sum_{i=1}^{n}a=na$$

ثبوت :

$$\sum_{i=1}^{n}a=a_1+a_2\ +a_3+\cdots+a_n\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}a=na$$

مثال4 :

$$\sum_{i=1}^{3}4\ =3.4=12$$

$\sum_{i=3}^{6}3\ =(6-2)3=4.3=12$

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)=\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}b=a\sum_{i=1}^{n}x_i+$$

مثال6: د 2,5,6,7,11,15,20,22,23 عددونو په سټ کی د 3 اولو عددونو لپاره لاندی مجوعی پیداکوو

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (2+5+6)^2 = 13^2 = 169$$

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i)^2 = 2^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 25 + 36 = 65$$

دپورته مثال څخه نتیجه کیږی چی: $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \neq \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$

دحاصل ضرب لپاره علامه : د $p(1).p(2).p(3) \dots \quad \dots p(n)$ لپاره لرو چی

$$\prod_{k=1}^{n} p(k) = p(1).p(2) \dots .p(n), \qquad \prod_{k=1}^{n} k = 1.2.3 \dots .n = n!$$

مثالونه :

$$\prod_{k=1}^{n} a = a.a.a \dots \quad .a = a^n, \quad \prod_{k=1}^{5} k = 1.2.3.4.5 = 5! \quad , \quad \prod_{k=1}^{3} 3 = 3^3 = 27$$

پیاد باید ولرو چی : $\sum_{i=1}^{n} x_i \; y_i \neq \sum_{i=1}^{n} x_i \, . \sum_{i=1}^{n} y_i$ مثال دی لوستونکی کارکړی

پوښتنی :که $x_1 = 2, x_2 = 4 \, , y_1 = 3 \, , y_2 - 1$ وی $\sum_{i=1}^{2}(3x_i - y_i + 4)$ پیداکړی؟

که $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 7, x_5 = 8$ وی لاندی مجموعی پداکړی ؟

$$1: \sum_{i=1}^{3}(x_i - 3)^2 \qquad 2: \sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 \qquad 3: \sum_{i=1}^{3}(x_i^2 - x_i)$$

$$4: \sum_{i=1}^{3} \sqrt{x_i} \quad , \qquad 5: \sum_{i=1}^{4} (x_i^2 + 2) \quad , \qquad 6: \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i}$$

1.10 د دفعاتو توزیع (ویش)

مخکی له دی چی موږ پیچلی معلومات راټول ، ترتیب او تنظیم کړو، نو لازمه ده چی لاندی مفهومونه وپیژنو

1) ګراف (Graph) : دهغه شکل څخه عبارت دی چی د متحولینو تر منځ تصویری ارتباط ټینګوی
2) خام مواد(Raw data): دهغه ارقامو او راټول شوو معلوماتو څخه عبارت دی چی په عددی ډول نه وی ترتیب شوی
3) صنف بندی (Arrays): په صعودی یا نزول ډول دخامو موادو ترتیب کول دی
4) وسعت (Range): د صنف د لوی او کوچینی حد تر منځ فرق ته وسعت وایی
5) ساحه (Domain): دمتحول هغه قیمتونه دی چی تابع په نوموړی قیمتونو کی تعریف شوی وی
6) صنف (Class): هغه افراد ، اشیا ء او حوادث دی چی مشترک خصوصیات او عینی حالت ولری
7) دصنف انتروال(Class Interval: د صنف د تحول دساحی څخه عبارت دی
8) دطبقی یا صنف حدود (Class Limits): د یوی طبقی اخرنی (انجامی) اعداد دطبقی د حدودو په نوم یادیږی د طبقی کوچینی عدد د ټیټ حد او لوی عدد د لوړ حد په نوم یادیږی
9) دیوی طبقی خلاصه ساحه (open class Interval): عبارت دهغی طبقی دساحی څخه دی لوړ یاټیټ حد یی محدود شوی نه وی

د دفعاتو د توزیع جدول (Frequency Distribution): د دی لپاره چی خام مواد د هغوی د مربوطه دفعو سره ولیکو یو جدول ته ضرورت لرو چی لاندی نقطی باید په نظر کی ونیسو

a) د دی لپاره چی د اشتباهاتو حخه ځان وژ غورو دهری دفعی په عوض یو خط لیکو چی د چوب خط (Tally) په نامه یادیږی
b) وسعت : د صنفونو شمیر چی معمولآ د 5 څخه تر 25 پوری په نظر کی نیول کیږی دتعین لپاره یی وسعت یا فاصلی ته ضرورت دی چی د لوړ حد او ټیټ حد د تفریق د حاصل څخه عبارت دی یعنی R=b-a
c) دصنفونو انتروال باید یو شان وی چی معمولآ په c سره ښودل کیږی که دصنفونو شمیر په k سره وښیو نو دصنفونو انتروال د $c = \frac{R}{K}$ رابطی په واسطه تعینوو چی باید یو مناسب عدد انتخاب شی که دصنفونو انتروال او مقدار معلوم نه وی نو لاندی ټکی په پام کی نیسو

1. که n معلومات راکړل شوی وی نو د $n = 2^k$ رابطی څخه د k قیمت پیدا کوو
2. که n معلوات راکړل شوی وی و، دلاندی رابطی څخه استفاده کوو چی د استورج دقاعدی په نوم یادیږی د k قیمت مناسب انتخابوو $k = 1 + 3{,}322\,.\log n$
3. کولای شو د k قیمت پخپله خوښه انتخاب کړو ، البته د 5 څخه تر 25 پوری باید انتخاب شی که چیری دصنفونو شمیر د 5 څخه کم وی، نو معلومات خپله معنا دلاسه ورکوی او که صنفونه د 25 څخه زیات شی نو محاسبه یی اوږده او دوخت ضایع ده

لومړی مثال:

مثال: که یو شمیر ارقام په لاندي دفعاتو سره راکړشوي وي جدول یی ترتیب کړی

11,11,12,12,13,13,13,13,13,14,14,15,15,15,16,16,17,18

ارقام x	دفعات F
18	1
17	1
16	2
15	3
14	2
13	5
12	2
11	2
Total	F=18

دویم مثال: لاندی عددونه د 20 تنه محصلینو دقد اندازه راښیی تاسی یی جدول ترتیب کړی

حل: 160,163,165,163,170,170,165,175,180,165

لومړی یی په نزولی ډول ترتیبوو 175,160,175,170,170,170,175,165,163,165

دقد اندازه	دفعات
160	2
163	3
165	5
170	5
175	4
180	1

استاد عبدالاحد ارین

دریم مثال: په یوه ازموینه کی 40 زده کوونکو ګډون کړیدی او پایلی یی په لاندی ډول اعلان شویدی تاسی یی د دفعاتو دتوزیع جدول ترتیب کړی

56 78 62 37 54 39 62 60 28 82

38 72 62 44 54 42 42 55 57 65

68 47 42 56 56 55 66 42 52 48

48 47 41 50 52 47 48 53 68 56

حل:لومړی یی ترتیبوو

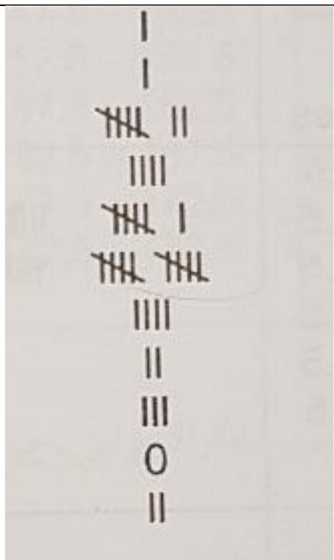
28 42 47 48 54 56 62 68

$R = b - a \Longrightarrow R = 82 - 28 = 54$ 37 42 47 50 54 56 62 68

$c = \frac{R}{k} = \frac{54+1}{11} = 5 \Longrightarrow c = 5$ 38 42 47 52 55 56 62 72

39 42 48 52 55 57 65 78

41 44 48 53 56 60 66 82

دصنفونو انتروال	Tally شمیریا	F_i
28-32		1
33-37		1
38-42		7
43-47		4
48-52		6
53-57		10
58-62		4
63-67		2
68-72		3
73-77		0
78-82		2

ځلورم مثال: که چیری په یوه مسابقه کی 80 محصلینو ګډون کړی وی ، د دفعاتو جدول یی ترتیب کړی

استاد عبدالاحد ارین

23 24 18 14 20 24 24 26 23 21

16 15 19 20 22 14 13 20 19 27

24 22 38 28 34 32 23 19 21 31

16 28 19 18 12 27 15 21 25 16

30 17 22 29 29 18 25 20 16 11

17 12 15 24 25 21 22 17 18 15

21 20 23 18 17 15 16 26 23 22

11 16 18 20 23 19 17 15 20 10

حل: که وغواړو د پورته ارقامو جدول جوړ کړو ، نو لومړی باید هغه ترتیب کړو چې ترتیب کول یې لوستنکوته پرېږدو

که وغواړو په اعشاری ډول صنفونه جوړکړو ، نو دهر صنف د ټیټ حد څخه 0.5 تفریقوو او دلوړ سره 0.5 جمع کوو

$$10 - 0.5 = 9.5 \quad , \text{and} \quad 14 + 0.5 = 14.5 \qquad c = \frac{k}{R} = \frac{28+2}{6} = 5$$

صنفونه Classes	صنفی سرحدونه Class boundaries	شمیریا Tally	دفعات F_i
10-14	9.5-14.5	卌 |||	8
15-19	14.5-19.5	卌 卌 卌 卌 卌 |||	28
20-24	19.5-24.5	卌 卌 卌 卌 卌 ||	27
25-29	24.5-29.5	卌 卌 ||	12
30-34	29.5-34.5	||||	4
35-39	34.5-39.5			1
			$\sum F_i$=80

استاد عبدالاحد ارین

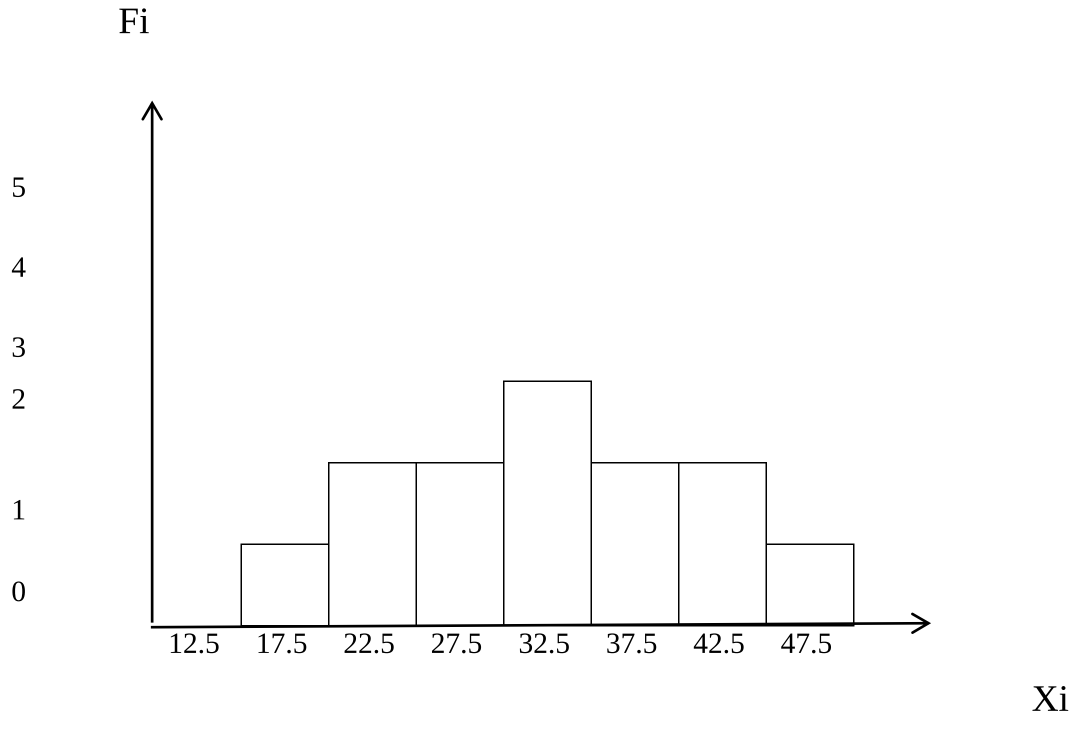
مثال : د40 تنو محصلینو قد په cm اندازه شوی دی ، جدول یی ترتیب کړی

138	164	150	132	144	125	149	157	146
158	140	147	136	148	142	144	168	126
138	176	163	118	154	165	146	173	142
147	135	153	140	135	161	145	135	142
		150	156	145	128			

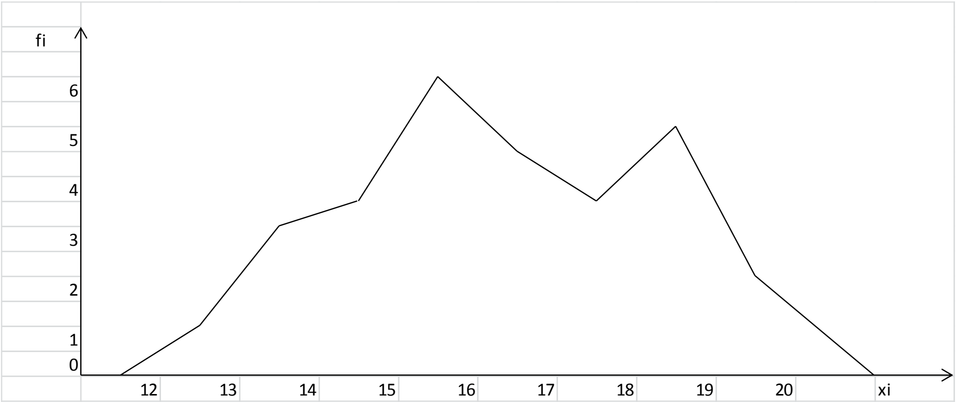
ترتیب کول یی د لوستونکو دنده ده

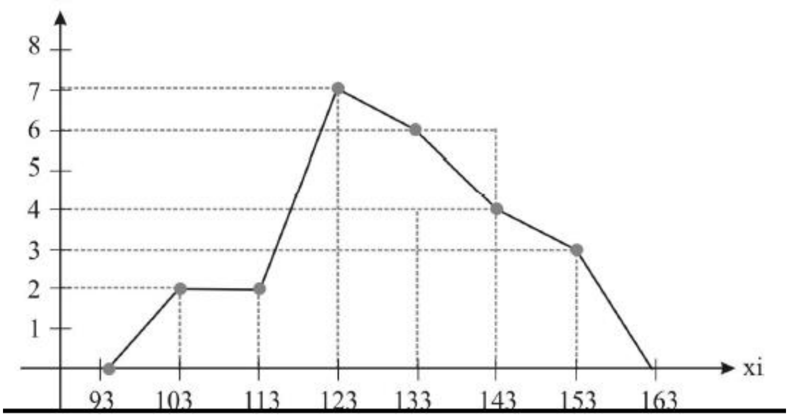
1.11 گراف: د دفعاتو د توزیع هندسی تصویر ته گراف وایی، چی اکثره علمی تحقیقات په ښه ډول تشریح کوی

1. **هستوگرام گراف(مستطلی گراف)** : دغه گراف اکثرآ دمتمادی معلوماتو لپاره په کار وړل کیږی ،اودهغه مستطیلونو د مجموعی څخه عبارت دی چی قاعده یی د$c = \frac{R}{k}$ په واسطه تعینیږی

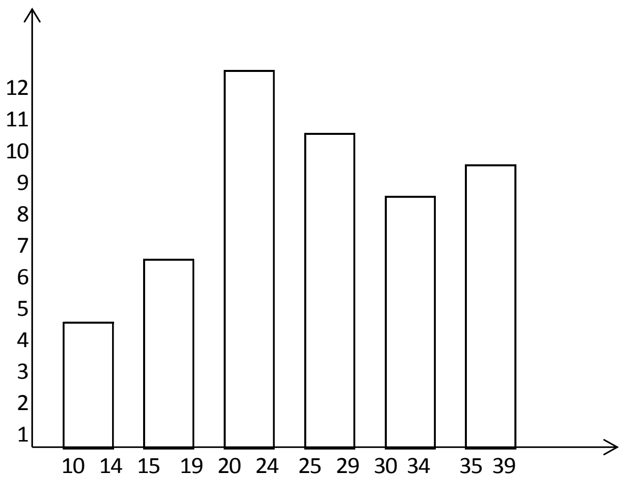


2. **د دفعاتو کثیرالاضلاع:** دهمدی گراف د ترسیم لپاره دهرمستطیل دقاعدی وسطی نقطه پیداکوو،دغه وسطی نقطه د مستطیلونو په پورته برخه کی سره نښلوو چی د دفعاتو کثیرالاضلاع لاسته راځی



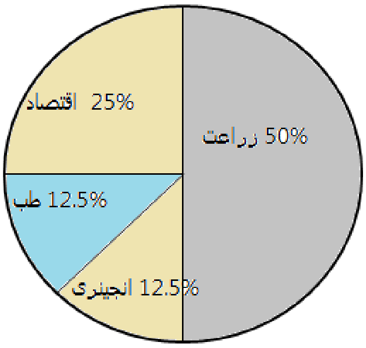


3. بار گراف (میلیی گراف): دا گراف هم د هستوگرام گراف غوندی دی خو فقت په هستوگرام کی معلومات متمادی وی خو په بار گراف کی غیر متمادی .یادونه باید وشی چی د نوموړی گراف د مستطیلونو ترمنځ فاصله باد یوه اندازه وی



4- پای گراف : دا گراف دیوی دایری څخه عبارت دی چی اکثره دفیصدی لپاره استعمالیږی

استاد عبدالاحد ارین



1.12 دفریکونسی ډولونه

مطلقه فریکونسی F_i د معلوماتوکی دهر دیتا (data) د دفعاتو (تکرار) شخه عبارت دی

یادونه باید وس چی په صنف بندی شو معلوماتو کی مطلقه مجموعی فریکونسی د طبقه بندی شوو معلوماتو دمجوعی سره مساوی دی یعنی:

$$\sum_{i=1}^{k} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k = N$$

۲ – نسبی فریکونسی f_i :ک دهر طبقی مطلقه فریکونسی د مطلقی فریکونسی پر مجموعی تقسیم کړو نو دهمغی طبقی نسبی فریکونسی په لاس راځی یعنی:

$$f_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^{k} F_i} = \frac{F_i}{N}$$

دنسبی فریکونسی مجموعه په هر احصایوی جدول کی د (۱) سره مساوی ده

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k = 1$$

3- د فیصدی فریکونسی p_i که دنسبی فریکونسی هره طبقه په *(100)* کی ضرب کړو دهمغه طبقی فیصدی فریکونسی لاس ته راځی یعنی: $p_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^{k} F_i} . 100$

او د فیصدی مجموعی فریکونسی په هرجدول کی د (100)سره مساوی ده

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k = 100$$

4. تراکمی فریکونسی یا مجموعی فریکونسی(cumulative frequency): د دفعاتو حاصل جمع په cf سره ښیو د دفعاتو دا مجموعه هغه دفعی جمع کوی چی دهغی څخه کښته واقع وی

5. نسبی تراکمی فریکونسی(percentage relative frequency): rcf نسبی تراکمی فریکونسی د $rcf = \frac{cf}{N}$ پواسطه لاسته راځی چی دلته rcf نسبی تراکمی دفعات ، cf تراکمی دفعات او N د دفعاتو مجموعه راښیي او یا داسی چی که د نسبی فریکونسی هره طبقه دهغی دکښته طبقی سره جمع کړو نونیبی تراکمی فریکونسی په لاس راځی او دنسبی فریکونسی اخره طبقه په هر جدول کی د یو (۱) سره مساوی ده

6. دفیصدی نسبی فریکونسی (percentage relative cumulative frequency):

د $prcf = \frac{cf}{N}\ 100$ پواسطه لاسته راځی پورته حالتونه په لاندی جدول کی کتلای شی

x_i	F_i	$f_i = \frac{F_i}{N}$	$p_i = \frac{F_i}{N} 100$	cf	$rcf = \frac{cf}{N}$	$prcf = \frac{cf}{N} 100$
96-99	4	0.16	16	4	0.16	16
99-102	4	0.16	16	8	0.32	32
102-105	11	0.44	44	19	0.76	76
105-108	1	0.04	20	20	0.80	80
108-111	5	0.20	100	25	1.	100
	N=25	1				

مثال: د (مثال: د (30) محصلینو د قد اندازی د سانتی متر په حساب په لاندی ډول دی

169 165 169 158 162 158 167 158 169 167 164 171

167 170 171 162 164 165 165 164 170 169 170 164

165 164 165 169 171 165

دقداندازه xi	158	162	164	165	167	169	170	171
دمحصلینوشمیرFi	3	2	5	6	3	5	3	3
کټګوری	5		14			11		

دپورته جدول څخه لیدل کیږی چی د 3 تنو قد 158cm، د 2 تنو قد 162cm ....او بالاخره د 3 تنو قد 71cm دی لیدل کیږی چی زیات محصلین د ماوسط قد لرونکی دی او دلوړ قد لرونکی تر ټیټ قد لرونکو زیات دی په لاندی جدول کی په ښه ډول لیدل کیږی

دمحصلینوګروپ xi	ټیټ قد	متوسط قد	لوړقد
دمحصلینوشمیرfi	5	14	11

مثال:په یوه کارخانه کی 20 تنه نارینه اوښځینه کار کوی

ښځه:woman نر:Man

M W M W M WW M M M

M W M W W M W W M M

الف:دکارکونکوو شمیر معلوم کړی حل:الف N=20

استاد عبدالاحد ارین

ب:متحول راوپیژنی

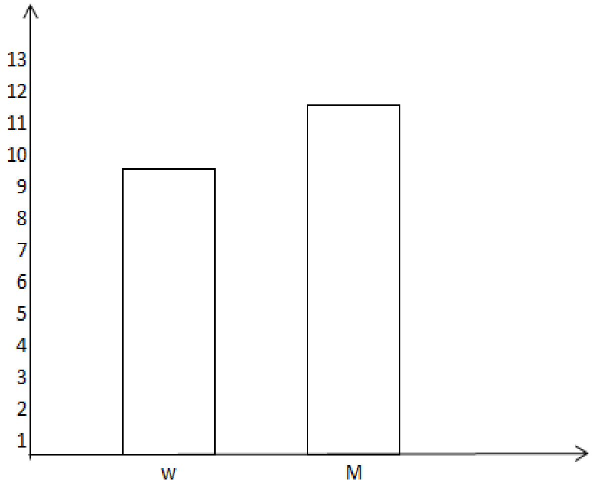
ب:دکارکونکوجنسیت x

ج:جدول ترتیب کړی

ج:

حالت	xi	Fi
1	M	11
2	W	9
		20

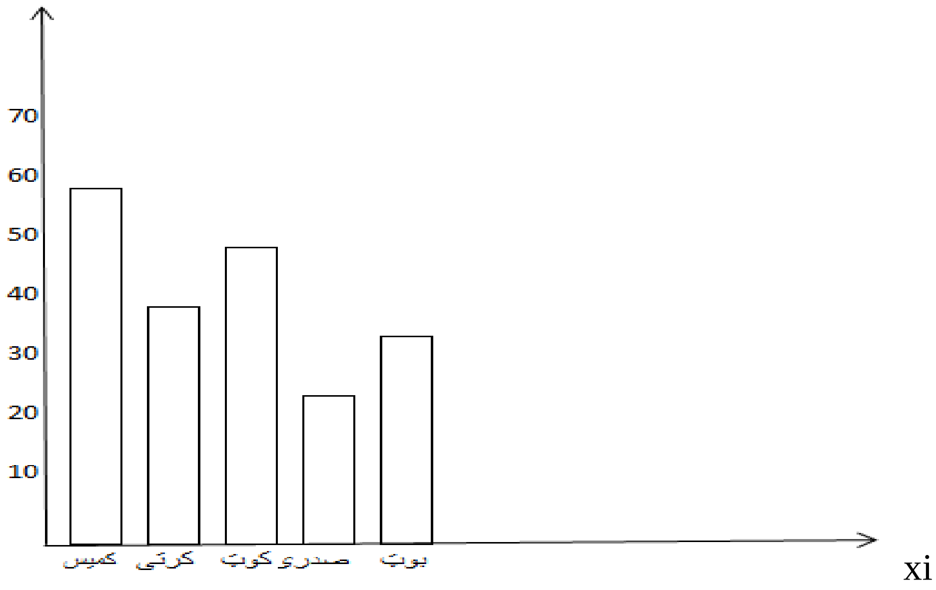
د:گراف یی رسم کړی



مثال: دیوی فابریکی څخه لاندی معلومات راکړل سوی دی تاسی یی گراف رسم کړی

i	Xi	Fi
1	کمیس	60
2	کرتی	40
3	کوټ	50
4	صدری	25
5	بوټ	35

fi



مثال:د 170 کارکونکو څخه 18 تنه انتخابوو،تر څو دهغوی د اولادو شمیر معلوم کړو

الف :نمونه او جمعیت ، نمونه :n=18 او N=170 جمعیت

ب:متحول ، دکارکونکوشمیر=X

ج:ګراف رسم کړی ، د ګراف رسمول دلوستونکو دنده ده

i	xi	Fi
1	1	5
2	2	4
3	3	5
4	4	3
5	5	1
		18

مثال: د 1000 معلوماتو لپاره څو طبقو ته ضرورت دی؟

حل : د استورج (Sturges) د فورمول څخه کار اخلو

$$k = 1 + 3{,}3.\,logn \Longrightarrow k = 1 + 3{,}3.\,log1000$$
$$= 1 + (3{,}3).\,3 = 1 + 9{,}9$$

$$k = 10{,}9 \approx 11 \Longrightarrow k = 11$$

مثال: که 300 تنه محصلین ولرو او دهغوی وسعت 4 وی ، نو دطبقو شمیر او د طبقو تر منځ انتروال لاسته راوړی

$$n = 300 \quad , \qquad R = 4 \ , k = 1 + 3{,}3.log300 = 9{,}18 \approx 9 \Rightarrow k = 9$$

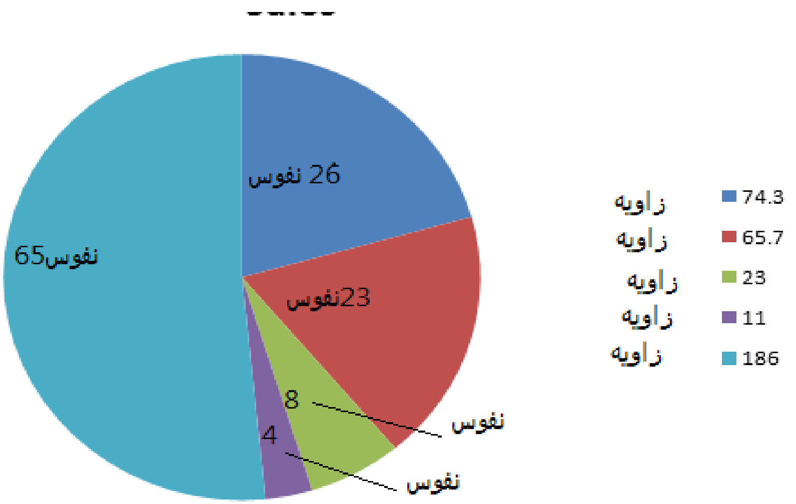
پاته عملیه د لوستونکو دنده ده

مثال: په لاندی جدول کی د هندوستان د ولایتونو نفوس راښیی، تاسی یی ګراف رسم کړی

ولایتونه	نفوس په ملیون
New Delhi	26
Hyderabad	23
Gujarat	8
Punjab	4
Mumbai	65

ددی سوال دحل لپاره د 360° $angle = \frac{quantity}{Total}$ فورمول څخه کار اخلو

provinces	Population in million	Angle of sectors دقطاع زاویې	Comulative angles تراکمی زاویې
New Delhi	26	$\frac{26}{126}x360 = 74.3$	74.3°
Hyderabad	23	$\frac{23}{126}x360 = 65.7$	140°
Gujarat	8	$\frac{8}{126}x360 = 23$	163°
Punjab	4	$\frac{4}{126}x360 = 11$	174°
Mumba	65	$\frac{65}{126}x360 = 186$	360°
	126	360	



مهم ټکی:

۱-که چیری معلومات په جدول کی ځای پرځای کړو او دخپل لوړحدخخه کم شی .لاندی کړنی ترسره کوو

دجدول دنوی صنفونوانتروال په c، سره ښیو اوپه لاندی ډول عمل کوو

$$Ć= c+\left[\frac{\text{لوړحددجدول} - \text{دمعلوماتولوړحد}}{k}\right]$$

۲- دنویو صنفونو انتروال د Ć په اندازه نیسو

مثال۱ که چیری دمعلوماتو په یولیست کی لوړ حد 26 او کوچنینی حد یی 10 وی همدارنګه که c=3 او k=5 وی د توزیع جدول یی ترتیب کړی!

حل: ځنګه چی په جدول کی لوړ حد 25 او دمعلوماتو لوړحد 26 دی نو پورته مرحلی کاروو

i	دصنفونوانتروال
1	[10-13)
2	[13-16)
3	[16-19)
4	[19-22)
5	[22-25)

$$Ć= c+\left[\frac{\text{لوړحددجدول} - \text{دمعلوماتولوړحد}}{k}\right]$$

$$Ć= 3+\left[\frac{26-25}{5}\right] = 3.2$$

اوس یی جدول ترتیبوو

I	Ć
1	10,0 - 13,2
2	13,2 - 16,4
3	16,4 - 19,6
4	19,6 - 22,2
5	22,2 - 26,0

استاد عبدالاحد ارین

دویم : که معلومات یا اعداد په یو جدول کی ځای پرځای کړو او دځپل لوړ حد څخه زیات شی نولاندی کړنی کاروو

د صنفونو دپیل عدد t_1 په t'_1 سره بنیو او له د $\left[\frac{\text{دمعلواتولوړحد - لوړحد دجدول}}{2}\right]$ – تیټ حد $= t'_1$ فورمول څخه کار اخلو

۲ – جدول د t'_1 څخه شروع کوو خو دصنفونو وسعت همغه پخوانی په نظر کی نیسو

مثال۱ : دیوی کارخانی د 36 کارکونکو دخطا اندازی په لاندی ډول دی .تاسی یی جدول ترتیب کړی

1 0,9 0,9 0,9 0,9 0,8 0,8 0,7 0,7 0,7 0,6 0,5 0,5

2,5 2,3 2,3 2,3 2,3 2 1,9 1,7 1,4 1,4 1,4 1,3 1,2

3 2,9 2,9

$$k = 1 + 3{,}3logn = 1 + 3{,}3log36 \Longrightarrow k = 1 + R = b - a\ 3 - 0{,}5 = 2{,}5$$
$$3{,}3(1{,}56) = 6{,}15 \approx 6 \Longrightarrow k = 6\,, \quad c = \frac{R}{K} = 0{,}41666. \approx 0{,}42.$$

i	C
1	[0,50 -0,92)
2	[0,92- 1,34)
3	[1,34- 1,76)
4	[1,76- 2,18)
5	[2,18- 2,60)
6	[2,60- 3,02)

څنګه چی په جدول کی لوړ عدد (3,02) دی چی دمعلوماتو دلوړ عدد سره توپیر لری نو لاندی عملیه کاروو

$$t'_1 = \text{تیټ حد} - \left[\frac{\text{دمعلواتولوړحد} - \text{لوړحد دجدول}}{2}\right]$$

$$t'_1 = 0,5 - \left[\frac{3,02 - 3}{2}\right] = 0,49$$

اوس دویم جدول له 0,49 څخه پیلوو

i	C
1	[0,49- 0,91)
2	[0,91- 1,33)
3	[1,33- 1,75)
4	[1,75- 2,17)
5	[2,17- 2,59)
6	[2,59 - 3,01)

دویم څپرکی

2.1 انحراف یا خوریدل (پراګندګئ)

تعریف: انحراف په یوه ډاټا کې لومړئ د مرکزي میلان ارقامو محاسبه کول او بیا د ډټا دهر حد څخه د نوموړې مرکزي میلان تفاضل (تغیر یا انحراف) پیدا کوو، چې ددې تغیراتو اوسط ته خپور والې وایي. او یا انحراف د اوسط څخه د تغیر درجې ټاکلو ته وایي چې پوه شو چې ډاټا متراکمه ده او که پاشلې.

اوسط یو ګټور او مهم مقیاس دی اود اړوندو شمیرو دلړئ د مرکزي تمایل د څرنګوالي په اړه ډېام وړ رول لري.

په هغه کې که څه هم وسطي ارزښت په یوازیتوب سره نشي کولای چې د یو فریکونسي د وېشنې بعضي عمده خصوصیات تشریح کړي. ضروري ده چې نور مهم خصوصیات د فریکونسي د وېشنې په وسیله احصایوي مقیاسونه تشخیص او په وضاحت سره صورت ونیسي تر څو دهغه د مشکلاتو د پیښیدو او یا د اړوندي موضوع په باره کې ښه تصمیم ونیول شي.

که څه هم دیو اوسط عمده ځانګړني دادي چې دیوې لړئ یا سلسلې له ټولو کتنو (مشاهداتو) یاشمیرو څخه په ښه توګه استازیتوب وکړي خود اړوندي سلسلې ټولي شمیري په عمومي ډول د سنجش شوي اوسط په څیر ارزښت نلري. داشمیري په متفاوتو اندازو سره له وسطي ارزښت یا مرکزي ارزښت څخه انحراف کوي، البته دانحراف اوخوریدنې (پراګندګئ) اندازه او څرنګوالي نظر دویشنې ډول او اړوندي سلسلې ته فرق کوي، دڅوډولونو او سطونو دسنجش سربیره نه شي کولای پرته له زیاتو معلوماتو د خوریدو (پراګندګئ) د څرنګوالي په اړه قضاوت وکړي.

په دې ډول د انحراف په محاسبه کولو کې لومړئ د ډاټا د مرکزي میلان ارقام محاسبه کوو او بیا د ډټا دهر حد څخه د نوموړې مرکزي میلان تفاضل (تغیر یا انحراف) پیدا کوو، چې ددې تغیراتو اوسط ته خپور والې وایي.

2.2 دمرکزی میلان مقیاسونه(Measures of central tendency)

مرکزی معیارونه یادمرکزی میلان مقیاسونه هغه اندازی دی چی متوسط مقدار یا دمعلوماتو مرکز ته دتمایل نقطه مشخص کوی . چی معمولاً اوفایده من یی اوسط، میانه ، او موډ دی

2.3 حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

دا داوسطونوله جملی څخه یو ډیرساده اوسط دی معمولاً یوازی ورته د اوسط اصطلاح کاریږی ، خوپه تحلیلی مسائلو اوڅیړنیزو موضوعاتو کی باید د اشتباه دنه پیښدو لپاره حسابی اوسط وبلل شی

کله چی دارقامو مجمعه دهغوی په شمیر وویشل سی حسابی اوسط لاسته راځی دغه اوسط په احصائوی اوڅیړنیزو بحثونوکی معولاًپه ($\bar{x}$) سره ښودل کیږی په صنف بندی شوی او غیر صنف بندی شوی ارقامو کی اوسط فرق کوی

الف: په غیر صنف بندی شوو ارقامو کی حسابی اوسط:

که چیری مشاهدات صنف بندی شوی نه وی یعنی (Non Grouped data) وی د ارقامو مجمعه دارقامو په شمیر ویشو یعنی: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

پاملرنه: دجمعیت اوسط په μ او دنمونی اوسط په $\bar{x}$ سره ښودل کیږی

یعنی: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

مثال۱ : دیوی کارخانی د کارکوونکو د اولادونو شمیر په لاندی ډول دی اوسط یی پیداکړی

0 0 1 1 1 1 1 2 2 3 4 5 5

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{0+0+1+1+1+1+1+2+2+3+4+5+5}{13} = \frac{26}{13} = 2 \Longrightarrow \mu = 2$$

مثال۲: دیوی کارخانی د 80 کار کوونکو څخه د 14 کارکوونکو خطاوی په لاندی ډول دی تاسی یی اوسط پیداکړی

0,01 0,01 0,01 0,02 0,02 0,03 0,05 0,07 0,07 0,07 0,08 0,10 0,15 0,20

N=80 , n= 14 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{14} x_i}{14} = \frac{0,89}{14} = 0,06 \Longrightarrow \bar{x} = 0,06$

ب: په صنف بندی شوو ارقامو کی اوسط (Mean from Group data)

په صنف بندی شوو ارقاموکی د اوسط د معلومولو لپاره دوی طریقی لرو

1) تفصیلی طریقه : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{iFi}}{\sum_{i=1}^{n} Fi}$ یا $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{iFi})}{n}$

پاملرنه: دلته هم دنمونی اوسط په $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{iFi})}{n}$ او دجمعیت اوسط په $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{iFi})}{n}$ سره ښودلی کیږی

مثال۱: د 25 تنو محصلینو دنمرو د توزیع جدول په لاندی ډول دی تاسی یی اوسط پیداکړی

Xi	4	5	7	9	25	مجموعه
Fi	6	7	8	4	25	
XiFi	24	35	56	36	151	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1(}^{n} x_{iFi)}}{n} = \frac{\sum_{i=1(}^{4} x_{iFi)}}{25} = \frac{24+35+56+36}{25} = \frac{151}{25} = 6{,}04 \approx 6 \Longrightarrow \bar{x} = 6$$

مثال۲ : په لاندی مشاهداتوکی x داسی تعین کړی چی دهغوی اوسط 6 وی [x, 2x-1, 2x, 3x +1,]

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1(}^{4} x_{i)}}{n} \frac{1+ \mathrm{x}3+\mathrm{x}2+1-\mathrm{x}2+\mathrm{x}}{4} = 6 \Longrightarrow \ = \frac{8x}{4}$$

$6 = \frac{8x}{4} \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = 3$, نومشاهدات عبارت دی له:[3,5,6,10]

مثال۳: په لاندی جدول کی معلومات داسی درکړسویدی چی دهغوی اوسط 1,46 دی تاسی یی ورک شوی دفعات پیداکړی

ترافیکی پیبنی	دورځوشمیر
0	46
1	?
2	?
3	25
4	10
5	5
مجموعه	200

حل:

Fi.xi	دورځوشمیرFi	ترافیکی پیښیXi
0	46	0
F1	F1	1
2f2	F2	2
75	25	3
40	10	4
25	5	5
140+F1+2F2	86+F1+F2=200	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1(}^{n} x_{iFi)}}{n} = 1{,}46 \Rightarrow 1{,}46 = \frac{140 + F1 + 2F2}{200} \Rightarrow 140 + F1 + 2F2 = 292$$

$$F1 + 2F2 = 152 \ldots\ldots 1 \quad F1 + F2 + 86 = 200 \Rightarrow F1 + F2 = 114 \ldots\ldots 2$$

$F1 + 2F2 = 152 \ldots\ldots 1$

$F1 + F2 = 114 \ldots\ldots 2$ د F2 قیمت په 2رابطه کی وضع کوو

F2=38

$F1 + 38 = 114 \Rightarrow F1 = 114 - 38 = 76$

مثال۴: په لاندی جدول کی ورک شوی رقم پیداکړی

استاد عبدالاحد ارین

دکورکرایه	110	112	113	117	m	125	128	130
دکورونوشمیر	25	17	13	15	14	8	6	2

حل کول یی د لوستونکو دنده ده

مثال۵: په یوپنځوس (50) کسیزه ټولګی (10) تنه محصلین ناکام شویدی چی دهغوی دنمرو اوسط (2,5)دی دټولګی دټولو محصلینو نمری 281 دی تاسی دکامیاب محصلینو دنمرو اوسط پیداکړی

25=10(2,5)= دناکام محصلینونمری 281-25=256= دبریالی محصلینونمری

281 = د50تنو نمری $\frac{256}{40}=4{,}6$ = دبریالی محصلینو دنمرو اوسط

مثال۶: 100 محصلین ازموینی ته حاضر سوی دی او په لاندی جدول کی دناکام محصلینو نمری درکړل شویدی که چیری د 100 محصلینو د نمرو اوسط 68,6 وی تاسی د بریالیو محصلینو دنمرو اوسط پیداکړی

نمری	5	10	15	20	25	30
دمحصلینوشمیر	4	6	8	7	3	2

حل:

	Xi	Fi	xi.Fi
	5	4	20
	10	6	60
	15	8	120
	20	7	140
	25	3	75
	30	2	60

	مجموعه	30	475

6860=(68,6)100=د100محصلینونمری   475=دناکامانونمری

6385=6860-475=دبریالیو نمری

70=100-30=دبریالیوشمیر

$$\frac{6385}{70} = 91.2142$$ دبریالیو محصلینو د نمرو اوسط

مثال۷: دلاندی جدول څخه ورک شوی دفعه پیداکړی که د نومړو معلوماتو اوسط 15,38 وی

xi	10	12	14	16	18	20
Fi	3	7	F	20	8	5

حل یی د لوستونکو دنده ده

مثال۸:په لاندی جدول کی د 65 تنو محصلینو نمری درکړل شویدی تاسی یی حسابی اوسط پیداکړی

دزده کوونکودشمیرتراکمی دفعات cf	نمری
7	تر %70زیاتی
18	تر %60زیاتی
40	تر%50زیاتی
40	تر%40زیاتی
63	تر %30زیاتی
65	تر%20 زیاتی

حل: جدول په لاندی ډول ترتیبوو

نمری	Fi	دصنفونواوسط $\bar{x}_i$	x_iF_i
20- 30	2	25	50
30 - 40	23	35	805
40 - 50	0	45	0
50 - 60	22	55	1210
60 – 70	11	65	715
70 - 80	7	75	525
	65		3305

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iF_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{3305}{65} = 50,8$$

۲ – لنډه طریقه (فرضی اوسط)

که چیری په یوه جدول کی دصنفونو شمیر زیات وی ، نو دهغه محاسبه کول طولانی وی دکار داسانتیا لپاره د فرضی اوسط څخه کار اخلو

۱ – دیوی طبقی وسطی نقطه مبدا فرضوو

۲- ددی په مقابل کی یعنی د انحراف په ستون کی صفر لیکو

۳- دصفر انحراف څخه پورته نقطه مثبت او کښته منفی لیکو

۴– په پنځم ستون کی دهغه عناصر دفریکونسی او دفرضی اوسط دانحراف دحاصل ضرب څخه لاسته راوړی یعنی F_id_i

۵ – په اخر کی د $\bar{X} = A + \frac{\sum F_id_i}{\sum Fi} c$ څخه اوسط لاسته راوړو چی A دفرضی اوسط څخه عبارت دی

د اوسط خواص:

د اوسط څخه د انحرافاتو مجموعه صفر ده. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$

که په هره مشاهده کې ثابت حقیقی عدد "a" اضافه شی نو نوی اوسط به $a\bar{X}$ + وي.

که د هری مشاهدی څخه ثابت حقیقی عدد "a" کم سی نو نوی اوسط به $\bar{X} - a$ وی

که په هره مشاهد کی ثات حقیقی عدد "a" ضرب سی نوی اوسط به $\bar{X}a$ وی

که هره مشاهده پر ثابت حقیقی عدد "a" و ویشل سی نوی اوسط به $\bar{x}/_a$ وی

2.4 هندسي اوسط (Geometric Mean):-

هندسي اوسط دحسابي اوسط په اندازه زيات دکارولوځايونه لري خوبياهم داديوه تحليل اودتحقيق

مقصداوهدف پوري اړه لري ،هندسي اوسط هم نظردمشاهدوډول ته فرق کوي ،يعني داچه اياهرقم

صنفبندي شوي که نه ؟ دلته بههريوبيل وګورو.

الف په غيرصنف بندي شووارقاموکبني هندسي اوسط :-

Geometric Mean from ungrouped data

که چيري په ......x_1, x_2, x_3 ډول ارقاموکي چه دشميرنويوه سلسله ده . که موږوغواړوهندسي

اوسط ومومو،نودلته ددغي سلسلي هندسي اوسط دهغوي دضرب دحاصل n ام جذردي . دغه اوسط

پهGM سره ښيو او په لاندی ډول تعريف سوی دی.

$$G.M = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{x_1 . x_2 . x_3 \ldots \ldots x_n}} = [(\boldsymbol{x_1}).(\boldsymbol{x_2}).(\boldsymbol{x_3}) \ldots \ldots (\boldsymbol{x_n})]^{\frac{1}{n}}.$$

دکارداساني په خاطرکولاي شوچه په لاندي ډول يئ وليکو، يعني $G.M = \text{Anti log}\, \frac{\sum \log x}{n}$

ثبوت :-

$$G.M\ [(x_1).(x_2).(x_3)\ldots\ldots\quad(x_n)]^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Log G.M} = \log\,[(x_1).(x_2).(x_3)\ldots\ldots\ldots(x_n)]^{\frac{1}{n}}$$

$$\log G.M = \frac{\log X_1 + \log X_2 + \cdots + \log X_n}{n}$$

$$\text{Log.G.M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n} \qquad \Rightarrow G.M = \text{anti log}\, \frac{\sum \log x_i}{n}$$

X	Log x
50	1.6990
60	1.7782
70	1.8451
80	1.9031
85	1.9294
90	1.9542
95	1.9777
	13.0867

مثال :- دلسم ټولګي دمضامينو نمريپه لاندي ډول راکړل شوي دي دهغوي هندسي اوسط په لاس راوړي.

70,80,85,90,95,60,50

$$G.M = \sqrt[7]{\mathbf{70,80,85,90,95,60,50}} \Rightarrow \boldsymbol{G.M = 74}$$

$G.M = \text{anti log}\,\frac{\sum logx}{n}$ يا $G.M = \text{anti log}\,\frac{13.0867}{7} = \text{anti log}\ 1.8695 = 74$

$$\Rightarrow \mathbf{G.M = 74}$$

ب : - په صنف بندي شويوارقاموکي هندسي اوسطGeometric Mean from grouped data

په صنف بندي شووارقاموکي دهندسي اوسط سنجش ډيرساده دي ،داسي چه ددفعاتو شمير هرځلدمربوطه

صنف دوسط په طاقت (توان)ليکل کيږي ،بيانوټول ضرب اودټولودفعاتو$(\boldsymbol{f_i})$ جذرئياستخراج کيږي،

فرمول يي دادي $G.M = \sqrt[\sum fi]{x_1^{fi}.x_2^{fi} \dots \dots x_n^{fn}}$. يا $G.M = \text{anti log}\,\frac{\sum f\,logx}{\sum f}$

ثبوت :- $G.M = [(x_1)^{f1}.(x_2)^{f2} \dots \dots (x_n)^{fn}]^{\frac{1}{\sum f_i}}$ $G.M = \sqrt[\sum fi]{x_1^{f1}.x_2^{f2} \dots \dots x_n^{fn}}$

$$\text{Log G .M} = \frac{1}{\sum fi}.\log[(x_1)^{f1}.(x_2)^{f2} \ldots\ldots (x_n)^{fn}] = \frac{F_1 logx_1 + F_2 logx_2 + \ \ldots F_n logx_n}{\sum f_i}$$

$$\text{Log G.M} = \frac{\sum flogx}{\sum f_i} \Rightarrow G.M = anti\log\frac{\sum flogx}{\sum f_i}$$

مثال : - دلاندي معلوماتو هندسي اوسط پيداکړي

Marks	Number of .student
0-10	8
10-20	12
20-30	20
30-40	4

Marks	No of student	X	Logx	Flogx
0-10	8	5	0.699	5.5920
10-20	12	15	1.1761	14.1132
20-30	20	25	1.3979	27.9580
30-40	4	35	1.5441	6.1763
	$\sum f_i$=44			53.8395

$\frac{\sum flogx}{\sum x}$=anti

1 2.00 0.10 0.2 0.01 100 0.25

G.M=anti log

$$\log\frac{53.8395}{44}$$

$$= \text{antilog } 1.2236 \Rightarrow G.M = 16.73$$

2.5 هارمونيكي اوسط (Harmonic mean) :-

دغه ډول اوسط ته ډيرکم ضرورت پيښيږي .استثناء هغوحالاتوکي چه زمان متحول فرض شي اوکيمت

ثابت فرض شي.الف :- (په غيرصنف بندي شووارقاموکي هارمونيکي اوسط)

که چيري د $x_2, x_1 \ldots x_n$,...... معلومات ولرونودهغوي هارمونيکي اوسط دلانديفرمول په واسطه پيداکوو.

مثال :- دلاندي معلوماتو هارمونيکي اوسط پيداکړي . $H.M=\frac{n}{\frac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_i})}$

1 0.5 10 45 175 0.01 4.0

حل:جدول ترتيبوو

x	1 0.5 10 45 175 0.01 4.0	
$\frac{1}{x}$	1 2.00 0.10 0.2 0.01 100 0.25	103.56

$$H.M=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x}} = \frac{7}{103.56} = \mathbf{0.07} \Rightarrow H.M= 0.07$$

ب (په صنف بندي شووارقاموكي هارمونيک اوسط):-

که چيري معلوما ت تصنيف شوي وي نودلاندي فرمول څخه استفاده کوو.

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{f}{x})}$$

مثال : - دلاندي معلوماتوڅخه هارمونيکي اوسط په لاس راوړي.

X	F	f/x	
0.01	1	100	
0.5	6	12	
1	12	12	
4	16	4	
10	20	2	
45	9	0.2	
175	5	0.03	
	69	130.23	

حل :-

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{f}{x})} = \frac{69}{130.23} = 0.53 \Rightarrow \quad \boldsymbol{H.M = 0.53}$$

نوټ :- يوبل اوسط چه دمربعي اوسط په نامه سره ياديږي . داهم ډيرکم کارولکيږي. مربعي اوسط د ساده حسابي اوسط دمربع جذرڅخه عبارت دي . يعني

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n}$$

2.6

استاد عبدالاحد ارين

دحسابي ، هندسي ، اوهارمونيک اوسط ارتباط :-

دنوموړواوسطونوترمينځ لاندي رابطي وجودلري .

$$H.M \le G.M \le A.M$$

$$(G.M)^2 = (A.M)(H.M)$$

(1) قضيه : که $a > 0$ ، $b > 0$ وي

الف : که $a = b$ وي پس لروچه $\sqrt{a.b}\ \frac{a+b}{2}$ = دي.

ب : که $a \neq b$ وي پس لرو چه $\sqrt{a.b} < \frac{a+b}{2}$ دي .

$\frac{a+b}{2}$ ته حسابي اوسط (ياحسابي وسط) او $\sqrt{a.b}$ ته هندسي اوسط (ياهندسي وسط)وايي .

ثبوت : څرنګه چه$a > 0$ او $b > 0$ دي نو $\sqrt{a} > 0$ او $\sqrt{b} > 0$ هم صدق کوي .

اوس پورتني دوه غيرمساواتونه خواپه خوا تفريقووکوو يعني .

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$$

څرنګه چه دپورتني غيرمساوات کينه خوايومثبت عدد دي نواطراف مربع کوو.اوديوسلسله لازموعمليا

توڅخه وروسته دقضيي (الف) او (ب) برخي حاصليږيعني .

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

$$a - 2\sqrt{a}.\sqrt{b} + b > 0$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0 \quad = a + b > 2\sqrt{ab}$$

اخرمساوات=$\frac{a+b}{2} > 2\frac{\sqrt{ab}}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

1 مثال :- د [2،50] ددووعدددونوترمينځ حسابي اوسط، هندسي اوسط محاسبه کړي اوبيايي سره پرتله

کړي وروسته د[2،50] ددووعددونواوهندسي اوسط له مخييوتناسب تشکيل کړي .

حل : $26 = \frac{52}{2} = \frac{50+2}{2} =$ حسابي اوسط د [2،50]

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{50.2} =$ هندسي اوسط د[2،50]

ليدل کيږي چه $10 < 26$ دي بنا پردي ليکوچي: $\sqrt{50.2} < \frac{50+2}{2}$

اوس د 50، 2 ،او 10 ترمينځ لاندي تناسب تشکيلوو:

$10.10 = 2.50$ $100 = 100 \Rightarrow$ ځکه چي $\frac{50}{10} = \frac{10}{2}$ يا $\frac{10}{50} = \frac{2}{10}$

2 مثال :- د [2،2] عددونوترمينځ حسابي اوسط ، هندسي اوسط محاسبه کړي اوبيا يي سره پرتله کړي .

اووروسته د 2 ، 2 اوهندسي له مخيي تناسب تشکيل کړي .

حل :-

حسابي اوسط= $\frac{2+2}{2} = \frac{4}{2}=2$

هندسی اوسط = $\sqrt{4} = 2 = \sqrt{2.2} = 2$

$$\Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{2}{2} = 2.2 = 2.2 \Rightarrow 4 = 4$$

2) **قضیه** :- که [$a_1، a_2، a_3، \dots \dots، a_n$] مثبت عددونه او n طبعي عدد($n \neq 1$) وي پس لرو چي .

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1, a_2, a_3, \dots \dots a_n}$$

ددي قضيي دثبوت څخه صرف نظرکوواويوازي څوتوضيحي مثالونه حل کوو.

3) مثال :- د [4 ، 2 ، 1] دري عددونوترمينځ حسابي اوهندسي اوسطونه محاسبه کړي اووروسته د

[4 ، 2 ، 1] اوهندسي اوسط له مخييوتناسب هم تشکيل کړي .

[1 ، 2 ، 4] حسابي اوسط د[4 ، 2 ، 1]= $\frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,5$

دلته وينوچه [1 ، 2 ، 4] هندسي اوسط د [4 ، 2 ، 1]= $\sqrt[3]{1.2.4} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \Rightarrow 2,5 > 2$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$$

(دوسطينوحاصل ضرب) 1.2.4 = 2.2.2 (دطرفينوحاصل ضرب)

استاد عبدالاحد ارين

$$8 = 8$$

4) مثال:- د[32 ، 4 ، 2 ، 1] ځلوروعددونوترمینځ حسا بي او هندسي اوسطونه محاسبه کړي اوبیا يي

سره پرتله کړي وروسته د [32 ، 4 ، 2 ، 1] عددونواوهندسي اوسط له مخییوتناسب تشکیل کړي .

$$\bar{x} = \frac{1+2+4+32}{4} = \frac{39}{4} = 9,75$$ (حسابي اوسط)

$$Gm = \sqrt[4]{1.2.4.32} = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{(4)^4} = 4$$ (هندسي اوسط)

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{2} = \frac{4}{4} = \frac{4}{32}$$

(دوسطینوحاصل ضرب)   1.2.4.23 = 4.4.4.4   (دطرفینوحاصل ضرب)256 = 256

5) مثال :- د[1000، 10 ، 5 ، 2 ، 1] پنځه عددونوترمینځ حسابي اوسط اوهندسي اوسطونه محاسبه

کړي اوبیایي سره پرتله کړي.حل :-

مثال :- په لاندي معلوماتوکي$A.M > G.M >$H.M رابطه ثبوت کړي .

حل:

Marks	No student	X	Log x	F logx	$F/_{x}$	F_x
0-10	8	5	0.699	0.5920	1.6	40
10-20	12	15	1.1761	14.1132	0.8	180
20-30	20	25	1.3979	27.958	0.8	500
30-40	4	35	1.5441	6.1763	0.11	140
	44			53.8395	3.13	860

$$A.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_x}{\sum_{i=1}^{n} f} = \frac{860}{44} = 19.55$$

$$G.M = \text{anti}\log\frac{53.8395}{44} \Rightarrow G.M = anti\log 1.2236 = 16.73$$

$$G.M = 16.73$$

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x})} = \frac{44}{3.31} = 13.3 \Rightarrow A.M = 19.55 > G.M = 16.73 > H.M = 13.3$$

مثال:- ددوه مشاهدوحسابي اوسط 127.5 اوهندسي اوسط يئ 60 دي پس هارمونيک اوسط يئ پيداکړي.

حل :- $G^2 = AxH = (60)^2$ H.M = H 28.24 = $\frac{3600}{127.5}$ = $\frac{G^2}{A}$(H) X (127.5) =

$$\Rightarrow H.M = 28.24$$

2.6 (average of position)دموقعيت له پلوه اوسط

رياضيکي اوسط په تولوموارد وکښي داستفادي وړنه دي خصوصاً په هغه حالت کيچه يوعددمنفي،

صفر،اويوعددبي درکه (miss) شوي وي .مثلاًکه دشاګردانود7 کسيزه ګروپ څخه دسوي امتحان

واخلواولاندي نمري واخلي.,X= -1,0, 3 204 ,6, 7,

نوپدي صورت کښيA.M=6,5 دي اود(1-)او(0) له وجه څخه هندسي اوسط (G.M) اوهارمونيک

اوسط (H.M) نشومحاسبه کولاي .پس دلتهیوبل اوسط چه عبارت دي له مياني، موږ اوداسي نوروڅخه څخه

مطالعه کوو.

2.8 میانه(Median)

داهم دفریکوینسي په ویش کې دارقامو دمرکزیت دپیداکولو یوه بله طریقه ده میانه دحسابي اوسط په شان کوم الجبري تعریف نلري او دیولړ ارقامویا عددونو دمنځني حدپیداکول دي یعنې میانه هغه رقم یا نقطه ده چې نیم ارقام یې پورته خواته او نیم ارقام یې ښکته خواته قرارلري

د دې لپاره چې د n ډېټا ارزښتونو سیټ مینځنی (میانه))ومومو، موږ باید لومړی راکول سوی معلومات په ترتیب سره تنظیم کړو.چې دلته میانه د n په تاق او جفت پوری اړه لری او په لاندی فورمول سره اندازه کیږی.

$$\text{median} = \begin{cases} X_{(0.5(n+1))} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{1}{2}\left(X_{(0.5n)} + X_{(0.5n+1)}\right) & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

مثال:لاندې ارزښتونه په روغتون کې د بستر شوي ناروغانو د وینې فشار دي:

117.5 123.8122.4 122.3 115.8 159.6 110.9 108.2 109.5 115.9 138.6 112.1

د وینی د فشار داوسط ارمقدار موندلو لپاره، موږ باید لومړی دوی په صعودی ډول ترتیب کړو

108.2 109.5 110.9 112.1 115.8 115.9 117.5 122.3 122.4 123.8 138.6 159.6.

دلته مشاهدات جفت جفت دی یعنی د n شمیر فت دی نو.

$$\text{Me}=\frac{1}{2}\left(X_{(6)}+X_{(7)}\right)=\frac{1}{2}(115.9+117.5)=116.7.$$

د پورته ملوماتو اوسط په لاندی ډول دی.

$$\bar{x}=\frac{1}{12}(108.2+109.5=110.9+\ldots+159.6)=\frac{1456.6}{12}=121.38$$

پورته اوسط چی د میانی څخه لوی دی . د 159.6 ارزښت تر اغیزی لاندی راغلی دی . منځنی (میانه)د اوسط په پرتله خورا پیاوړی ده او دلوړ ارزښت لرونکی ډاټا تر اغیزی لاندی نه راځی .

استاد عبدالاحد ارین

مثال :د فوټبال يوې لوبډلې په تېرو ۴۴ لوبو کې لاندې شمېر ګولونه کړي دي

Number of goals	0	1	2	3	4
Frequency	9	8	15	9	3

لکه څنګه چې n = 44، میانه به د 22 او 23 مشاهدو تر منځ نيمه لاره کی پروت وي. څکه چې دواړه $x_{(22)}$ او $x_{(23)}$ 2 دي، منځنی ارزښت 2 دی.

د ډله ايزو(ګروپ سوی ،راټول سوی ملوماتو) معلوماتو لپاره، د منځني(میانی) اټکل کولو ترټولو اسانه لار د ګرافيکي ميتودونو څخه ده.

د میانی زیانونه:

د منځنی کارول دوه اصلي زیانونه لري.

په صنف بندی (grouped data) سوی ارقامو کی میانه:

په صنف بندی سوو ارقامو (ډاټا) کی میانه د لاندی فورمول په مرسته په لاس راځی

$$Me = L + \left(\frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h$$

L د منځنی (میانی) د کلاس ټیټ حد

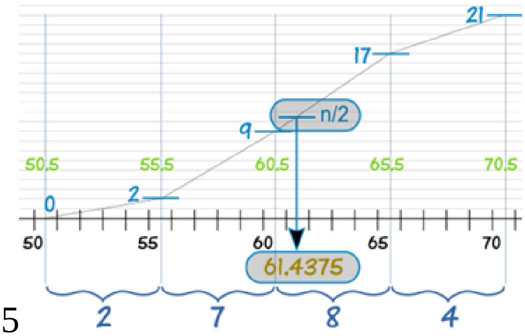
N د ټولی تراکمی فریکونسی شمیر

f_0 د میانی د کلاس څخه د مخکنی کلاس تراکمی فریکونسی

f_1 د میانی د طبقې فریکونسی

h = د صنفونو انتروال

مثال:



- **L** = 60.5
- **N** = 21
- $\mathbf{f_0}$ = 2 + 7 = 9
- $\mathbf{f_1}$ = 8
- **h** = 5

$$Me = L + \left(\frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h$$

$$Me = 60.5 + \left(\frac{\frac{21}{2} - 9}{8} \right) \times 5 = = 60.5 + 0.9375$$

$$= 61.4375$$

1 بېلګه: د لسم ټولګي د 50 هلکانو د لوړوالي په اړه یوه سروې په یوه ښوونځي کي ترسره شوی او لاندي معلومات ترلاسه شویدی. میانه یی پیدا کړی

Height (in cm)	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	Total
Number of boys	2	8	12	20	8	50

حل : د دی لپاره چی میانه پیداکړو موږ تراکمی فریکونسی ته اړتیا لرو ،او دپیداکولو لپاره یی لاندی جدول ترتیبوو

Class Intervals	No. of boys (f_i)	Cumulative frequency (c)
120-130	2	2
130-140	8	2 + 8 = 10
140-150	12	10 + 12 = 22
150-160	20	22 + 20 = 42
160-170	8	42 + 8 = 50

Median class 150-160

$$f_1 = 20, \quad f_0 = 22$$

$$, \qquad Me = L + \left(\frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h \; N = 50, \quad L = 150, \quad h = 10$$

$$Me = 150 + \left(\frac{50/2 - 22}{20} \right) \times 10 = 150 + 1.5 = 151.5$$

2.9 مود (Mode)

مود دیو لړارقاموهغه نقطه ده چې تر ټولو لوړه او زیاته فریکوینسي ولري.

دمثال په توګه:11,11,12,12,13,13,13,13,14,15,15,16,16,13

دارقامو مود13 دی ځکه چې فریکوینسي یې 5 ده که چیرې دارقاموفریکوینسي سره مساوي وي نو مود محاسبه کیدلاي شي .

دمثال په ډول:20, 25,2,7,16,19مود نلري

2,2,2,7,7,7,6,6,6,19,19,19

استاد عبدالاحد ارین

ارقام مود نلري ځکه چې ټول اعداديوشان فريکوينسي لري ددې امکان شته دی چې يو لړ ارقام يومود،دوه موده اويا ځوموده ولري .دمثال په توګه دا ارقام ولرو.

د مثال: په ډول دا ارقام لرو11,11,12,12,12,13,13,13,14,14,14,14,5

په دې حالت کې مود دهغو دوه همجوارو قيمتونو حسابي اوسط دی چې يو شان فريکوينسي ولري او قيمت يې زيات دی يعني 13 او 14 يو شان فريکوينسي لري او فريکوينسي يې ترنورو لوړه ده هر يو يې مود دی يعني پورتني ارقام دوه موده دی

Mod= {13, 14}

مثال :د5,6,7,1,6,8,5,6,6 ارقامو مود 6 دی يعني Mod= 6

مثال:لاندی ارقامو مودپيدا کړی؟

A= {5, 5, 5, 5,}

B= {10, 20, 30, 40}

C= {19, 20, 19, 25}حل

Mode (A) =5

Mode (B) تعريف شوی نه دی

Mode (C) =19

2 بيلګه : دلاندی ارقامو مود پيدا کړی

A= {21, 22, 29, 35, 21, 21}

B= {2, 5, 1, 1/2, 1,1/2, 2, 0, 5, 1/2}   C= {100, 95, 100, 95, 85, 90}

استاد عبدالاحد ارين

دارقامو مودونه په لاندې ډول دي .

Mode (A) =21

Mode (B) = ½

Mode (c) = {100, 95}

ليدل کيږي چې دC سيټ دوه موده دی که هغه مرتب کړو ليکو چې .

C={80,85,90,95,95100,100}

$$Mode(c) = \frac{95+100}{2} = \frac{195}{2} = 97.5$$

که يو سيټ دوه موده وي نو دمحساباتو له پاره بيا له پورتني ميتود څخه کار اخلو که ارقام تصنيف شوي وی نو د مود محاسبه ددې فورمول په مرسته په لاس راځی .

$$Mode = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)$$

چې دلته L دفريکوينسي دهغه صنف لانديني سرحد دی چې مودپکې قرارلري Δ_1دمود دصنف فريکوينسي فرق دمخکني همسايه سره .

Δ_2 دمود دصنف دفريکوينسي فرق دوروستني (ورپسي) همسايه سره .

C دمود دصنف صنفي عرض دی .

مثال :که (4-10) جدول په پام کې ونيسو نو

$$L_1 = 144.5 \qquad \Delta_1 = 12 - 9 = \Delta_2 = 12 - 5 = 7.c = 9$$

$$Mod = 144.5 + \frac{3}{3+7}9$$

$$Mod = 144.5 + \frac{27}{10} = 144.5 + 2.7 = 147.2$$

که دمود دپاسني سرحد څخه کار واخلو نودمود پیداکولو لپاره له دې فورمول څخه کار اخلو

$$Mod = l_2 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}.c$$

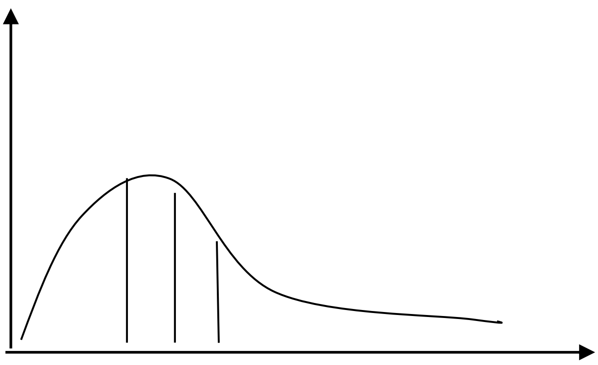
$$Mod = 153.5 - \left(\frac{7}{3+7}\right).9 = 153.5 - \frac{7}{9}.9$$

$$Mod = 153.5 - \frac{63}{10} = 153.50.6.3$$

$$Mod = 147.2$$

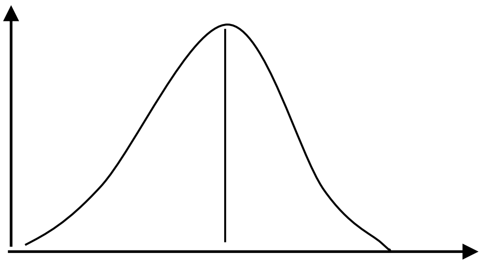
په منحني کي داوسط ، میانه اومود مقایسه :-

1 – که چیري دارقامو دسیټ ددفعاتو درسم شوي منحني لمن ښي طرف ته پراختیاولري نو میانه به له ریاضیکي اوسط څخه کوچني وي



Mo < Me < Mean

2 – که چيري دارقامو دويش منحني متناظر(Symmetric) وی يعني دواړوخواووته يوبرابروي نوپه دي صورت کياوسط اوميانه يوپربل منطبق دي .لکه



$\overline{x}$=Mo=Me

3 – که چيري دارقامو ددفعاتودګراف کوږوالي (انحراف Skewed) چپ طرف ته وي نواوسط به يي کيڼي خواته اوتر مياني کوچني وي .

داوسط ، مياني اومود ترمنځ اړيکه :

1 – که چيري توضيع متناظر وي نواوسط ، ميانه اومود يوله بل سره مساوي دي.

mean = median = mode

2- که چيري توذيع متناظرنه وي نودلاندي فرمولونوڅخه استفاده کيږي .

Mode =maen – 3(mean-median)

= 3median- 2 mean

يا Mean- mode = 3(mean- median)

Mode = 3median- 2mean

مثال :- دلاندي معلوماتوڅخه مود پيداکړي .همدارنګه يي داوسط اومياني سره رابطه پيداکړي .

Class	13-17	18-22	23-27	28-32	33-37	38-42
Fi	1	1	2	3	2	1

2.9 پراختيا (وسعت)Range

دخوريدو (پراګندګی) ډير ساده مقياس دی د اړوندي سلسلي د کوچني او لوي عدد تر منځ له توپير څخه عبارت دی، اويا د اعدادو په يوه لړۍ کي دلوړي نمري او ټيټي نمري ترمنځ له تفاضل يعني ښه والي څخه عبارت دی، چې په سمبوليکه بڼه پدې ډول ښودل کيږي.

$$R = X_{max} - X_{min}$$

په دې رابطه کې R پراختيا (وسعت)، X_{max} لوړه نمره او X_{min} ټيټه نمره ښيي.

که چيري د يوې ازمويني نمري د دفعاتو د وېشني په بڼه راپور ورکړل شوي وي. په دې صورت کي د نمرو پراختيا (وسعت) د ټيټي او لوړي وېشني ترمنځ له ښه والي (تفاضل) څخه عبارت دی. پراختيا (وسعت) لکه نوري اندازي د واټن خورېدل ښيي.

پراخوالي يا وسعت په لاندي شميرو کي 2,3,5,7,11,29,35 عبارت دی له:

$$35 - 2 = 33$$

مثال: د 10 شاګردانو د نورو ريکارډ په لاندي ډول دي فاصله يي پيداکړئ؟

30, 20, 23, 44, 60, 75, 90, 40, 50, 51

$X_{max} = 90$ $\qquad$ $Range = X_{max} - X_{min}$

$X_{min} = 20$ $\qquad$ $Range = 90 - 20 = 70$

په فاصله کي د انحراف ضريب

په فاصله کي د انحراف ضريب دلاندې فورمول پواسطه پيدا کولای شو:

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} \Rightarrow CR = \frac{R}{X_{max} + X_{min}}$$

2,4,8,10,16,20,6

$$C.R=\frac{X_{max}-X_{min}}{X_{max}+X_{min}}=\frac{20-2}{20+2}=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}=0.082$$

په تصنيف شوو ارقامو کي پراخوالي يا وسعت د کوچني ټولګي د ښکتني حد ترمنځ او د لوي ټولګي د پورتني حد تر منځ له توپير څخه عبارت دئ.

دمثال په ډول: د 142 کورنيو د کلني عايد پراختيا په 1385 کال کي نظر جدول ته له

$69.99-66.0=3.99$ څخه عبارت دی يعني 3.99 افغاني دي.

دپراخوالي (وسعت) د سنجش پيرودل (اخيستل) په يوه سلسله اړوندو شميرو کي دهغه په ساده والي پوري تړلي دي په ځينو ځايونو کي په خاصه توګه اعظمي او اصغري حد، قيمتونو تحول په مارکيټ کي يا د اوربښت د حرارت درجه، د توليد د کيفيت يا جنسيت کنټرول، يا حتا داوسط په اټکل يا تخمين کي په کاريږي.

په غير متمادي ډآتا کي د فاصلي محاسبه:

په غير متمادي ډآتا کي د فاصلي د محاسبي په وخت کي د دفعاتو د ستون څخه صرف نظر کيږي. يعني د فاصلي محاسبه يوازي د ارقامو په ستون کي اجراکيږي.

مثال: د لاندي ډيټا څخه فاصله او د فاصلي ضريب محاسبه کړئ؟

x_i	43	64	78	96	100	150	230	240	261
f_i	100	105	91	82	61	31	70	88	67

$$Range=X_{max}-X_{min}$$

$$R=261-43=218$$

$$C.R=\frac{X_{max}-X_{min}}{X_{max}+X_{min}}=\frac{261-43}{261+43}=\frac{218}{304}=0.7171$$

په متمادي ډآتا کي د فاصلي محاسبه:

مثال: د لاندي ډيټا څخه فاصله او د فاصلي ضريب محاسبه کړئ؟

Marks	No of students
10 – 20	8
20 – 30	10
30 – 40	12
40 – 50	8
50 – 60	4

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \frac{60 - 10}{60 + 10} = \frac{50}{70} = 0.714$$

د پراختیا (وسعت) ښېګڼې:

1. دا طریقه ډېره اسانه ده.
2. دا فقط د مشاهدو دوو عددونو ته ضرورت لري.

باید وویل شي چې دا په هغو حالاتو کې چې د ټولو مشاهدو د پیل او پای اعداد مهم و برېښي ښه کار ورکوي لکه: د تودوخي د درجې فرق، په مارکیټ کې د بَیو د اعظمي حد بدلونونه، دیوې کروندې ډېر لوړ او کم حاصل ترمنځ فرق، د اوربښت د لوړې او ټیټې اندازې فاصله، د زده کوونکو د ذکاوت او نمرو ترمنځ تو پیر او نور مثالونه.

د پراختیا (وسعت) نیمګړتیاوې:

پراختیا (وسعت) نظر لاندي څو دلیلونوته لږ د استعمال وړدي.

1. دپراختیا (وسعت) برخه په دوه اعظمي او اصغري ارزښت پوري اړونديږي، چې د اعدادو خورتیا په توګه نشي توضیح کولای .
2. په منځنې ډول د هرې مشاهدې تر منځ تفاوت او انحراف نشي ښودلای.
3. د پراختیا (وسعت) ارزښت په زیاتره اعدادو یا په غیر عادي ارزښتونو کې شدیداً متاثیره کېږي.

لکه په دوو لاندي لړیو کې:

3	5	6	7	10	12	15	18
3	8	8	8	9	9	9	18

$$Range_1 = 18 - 3 = 15$$

$$Range_2 = 18 - 3 = 15$$

د $15 = 3 - 18$ پراختيا (وسعت) څرنګه چي لړی يي له ځانه لري د بيلا بيلو خوريدو لرونکي ده.

د پراختيا (وسعت) ارزښت نظر دنموني اندازې ته له حده وتلي (فاحش) بدلون پيداکوي.

په پورته يادوشوو دوو لړيو کي که چېري دوه وروستي يا انتهايي عددونه حذف کړو.

5	6	7	10	12	15
8	8	8	9	9	9

$$Range_1 = 15 - 5 = 10$$

$$Range_2 = 9 - 8 = 1$$

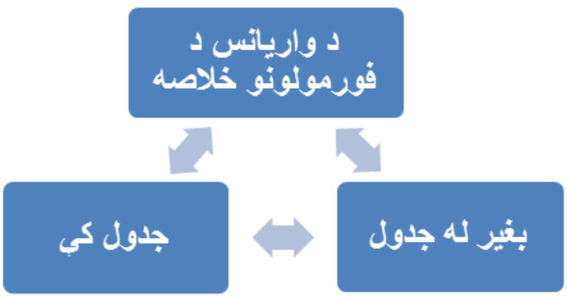
پراختيا (وسعت) په لومړی لړی کي $15 - 5 = 10$ او په ويمه لړی کي $9 - 8 = 1$ دي.

2.10 پراګندګی (خوريدل) (dispersion)

واريانس (Variance)

دا اصطلاح په 1918م کال کی د (R.A. Fisher) په واسطه معرفی شوه.واريانس هم د انحراف يو مهم مقياس دی.

واريانس په لغت کي خپوروالی ته وايي . چی رياضيکی تعريف په لاندی ډول دی .



بغير له جدوله

استاد عبدالاحد ارين

1 . نمونه

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum x_i{}^2\right)}{n}}{n-1}$$

2.جميعت

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum x_i{}^2\right)}{n}}{N}$$

جدول کي

1. نمونه

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \; Fi - \frac{\left(\sum x_i{}^2\right)}{n}}{n-1}$$

2.جمعيت.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \; Fi - \frac{\left(\sum x_i{}^2\right)}{N}}{N}$$

د پورته فورمولو څخه يوثبوتوو او يايی زړه ته رانيژدی لوستونکوته د بني زدکړی په موخه پريژدو.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu^2)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i + \mu^2 - 2x \,.\, \mu)}{N}$$

$$= \frac{\sum X_i{}^2 + \mu^2 \sum 1 - 2\mu \sum X_i}{N} = \frac{\sum X_i{}^2 + N\mu^2 - 2(\frac{\sum X_i}{N}).\sum X_i}{N}$$

$$= \frac{\sum \mathrm{X_i}{}^2 + N\frac{(\sum x_i{}^2)}{N^2} - \frac{2(\sum X_i{}^2)}{N}}{\mathrm{N}} = \frac{\sum \mathrm{X_i}{}^2 + \frac{(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}} - \frac{(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} = \frac{\sum \mathrm{x_i}{}^2 + \frac{-(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum \mathrm{X_i}{}^2 - \frac{(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

لومړی مثال: په ۱۳۷۹ کال کې ۱۵ کتابتونونوپه لاندې ډول کتابونه چاپ کړي د هغوی واريانس محاسبه کړئ.

1 2 2 3 4 4 5 6 8 9 9 10 10 10 11

حل:

X_i	1 2 2 3 4 5 6 8 9 9 10 10 10 11	94
X_i^2	1 4 4 9 16 25 36 64 81 81 100 100 100 121	758

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2-\frac{(\sum X_i^2)}{15}}{15}=\frac{758-\frac{(94)^2}{15}}{15}=11.27$$

$$\mu^2=\frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{N}\Rightarrow \mu=\frac{94}{15}=6.27$$

دوهمه طريقه:

$$\sigma^2=\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{N}=\frac{(1-6.27)^2+18.23+\cdots+22.37}{15}=11.26 \qquad \sigma^2=11.26$$

دويم مثال: په هلمند ولايت كې ديوې كارخاني د ۸۰ كاركوونكو څخه د ۱۴ تنو خطاوې په لاندې ډول دی، واريانس يې پيداكړ

0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.05
0.07	0.07	0.07	0.08	0.10	0.15	0.20

حل:

N=80 , n=14

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}}{N-1} = \frac{0.0981 - \frac{(0.89)^2}{14}}{14-1} = 0.003 \qquad s^2 = 0.003$$

دریېم مثال: که چیرې د ۳۰ ګروپونوشرح په لاندې ډول وي، واریانس یې پیداکړ.

I	X_i	f_i
1	0	5
2	1	7
3	2	11
4	3	4
5	4	2
6	5	1
		30

حل:

I	X_i	f_i	${X_i}^2$	$X_i f_i$	$f_i {X_i}^2$
1	0	5	0	0	0
2	1	7	1	7	7
3	2	11	4	22	44
4	3	4	9	12	36
5	4	2	16	8	32
6	5	1	25	5	25
		30		54	144

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} {X_i}^2 f_i - \frac{(\sum X_i f_i)^2}{30}}{30} = \frac{144 - \frac{(54)^2}{30}}{30}\ 1.56 \quad \sigma^2 = 1.56$$

د واریانس ضریب

د واریانس ضریب چې په C.V شکل سره ښودل کیږي عبارت دی له:

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

مثال : یوه کارخانه د موټرو دوه ډوله ټایرونه تولیدوي. د A ډول لپاره اوسط عمر 10000 کیلومتره او دانحراف معیار یي 2000 کیلومتره او د B ډول ټایر لپاره متوسط عمر 11000 کیلومتره او معیاري انحراف یي 1000 کیلومتره دی. کوم ټایر بهتر دی؟

$$A = \quad C.V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} \times 100 = \frac{2000}{10000} \times 100 = 20\%$$

$$B = \quad C.V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} \times 100 = \frac{1000}{110000} \times 100 = 9\%$$

د B نوعه ټایر بهتر دی، ځکه هم د هغې اوسط عمر ډیر دي او هم د هغې د تغیر ضریب کوچنی دی.

2.11 وسطي انحراف

وسطي انحراف یا انحراف نظر اوسط ته څرنګه چې له نامه څخه یي څرګندیږي، دیوي لړۍ دانحراف له حسابي اوسط یا دیوي سلسلې شمیرو له مطلقه توپیر نظر یوه وسطي عدد ته لکه حسابي اوسط یا له میدیان څخه عبارت دی.

که څه هم په عمل کې حسابي اوسط زیاتره د یو وسطي ارزښت په توګه په کار اچول کیږي خو دتیوري له پلوه د اعدادو دانحراف مجموع نظر میدیان ته لږه اندازه ده، (البته مطلقه توپیر) ښه ده چې په سنجش کې انحراف استعمال شي. په هر حال هغه ډول اوسط چې دوسطي انحراف په سنجش کې په کار اچول کیږي باید څرګند شي.

وسطي انحراف په تصنیف شوو اعدادو کې چې $\bar{X}$ وسطي ارزښت وي د لاندي فورمول په مرسته ویشل کیږي.

$$MD = \frac{\sum|X - \bar{X}|}{n} = \frac{\sum|X|}{n} = \frac{\sum|d|}{n} \cdots (2)$$

پدې ځای کې: MD وسطي انحراف، X دیوي لړۍ یا سلسلې شمیري یا اعداد، $\bar{X}$ حسابي اوسط، n داعدادو یا کتنو (مشاهداتو)اندازه او d یا $X_1 - \bar{X} = X$

عمودي کرښي (خطوط) مطلقه ارزښت (پرته له اشاري څخه) افاده کوي.

مثال: د2,3,6,8,11 اعدادو وسطي انحراف پیداکړئ.

لومړی: باید د شمیرو حسابي اوسط سنجش شي :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{2 + 3 + 6 + 8 + 11}{6} = 6$$

ورسته داعدادو مطلقه انحراف نظر اوسط ته محاسبه کوو.

$$MD = \frac{|2 - 6| + |3 - 6| + |6 - 6| + |11 - 6| + |8 - 6|}{5} = 2.8$$

يعني ورکړل شوي اعداد د 2.8 په اندازه له حسابي اوسط څخه انحراف لري، وسطي انحراف کولای شونظر مديان ته هم سنجش کړو يعني.

$$AD = \frac{\sum|X - Med|}{n} \cdots (3)$$

مثلاً:په پورته اعدادو کې مديان 6 دي څرنګه چي $x = Med$ په دي مثال کي دواړه ډوله وسطي ارزښت مساوي دي .

مثالونه که ډاتا صنف بندي شوې نه وي:

مثال: لاندي د ازمويني نمرو لپاره وسطي انحراف او مياني څخه محاسبه کړئ او همدارنګه د وسطي انحراف ضريب محاسبه کړئ؟

$$32, 36, 37, 39, 36, 41, 48, 36$$

حل:موږ لومړئ ورکړل شوې نمرې په صعودي ډول ترتيبو او مېانه يې پيدا کوو.

$$32, 36, 36, 37, 39, 41, 45, 46, 48$$

$$Med = \frac{9+1}{2} = 5^{th} term$$

$$Med = 39\ Marks$$

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{32 + 36 + 36 + 37 + 39 + 41 + 45 + 46 + 48}{9}$$

$$= \frac{360}{9} = 40$$

Xi	$xi - \bar{x}$	$\lvert xi - \bar{x}\rvert$	$\lvert xi - Med\rvert$
32	-8	8	7
36	-4	4	3
36	-4	4	3
37	-3	3	2
39	-1	1	0
41	1	1	2
45	5	5	6
46	6	6	7
48	8	8	9
$\sum = 360$	0	40	39

$$MD = \frac{\sum|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{40}{9} = 4.4\ Marks$$

$$MD = \frac{\sum|xi - Med|}{n} = \frac{39}{9} = 4.3\ Marks$$

$$CMD = \frac{MD}{\bar{x}} = \frac{4.4}{40} = 0.11$$

$$CMD = \frac{MD}{Med} = \frac{4.3}{39} = 0.11$$

مثال: په لاندې ډول د 10 شاګردانو د احصائيي نومرې راکړل شويدي وسطي انحراف يې پيداکړئ؟

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{10+20+30+40+50+60+70+80+90+100}{10} = \frac{550}{10} = 55$$

$$MD = \frac{\sum|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{45+35+25+15+5+5+15+25+35+45}{10} = 25$$

2.12 په غير صنف بندی سوی داتا کی وسطی انحراف:

مثال: د کرنيز اقتصاد ديپارتمنت 90 شاګردانو 15% نومرو صنفي ټيسټ نتيجه په لاندې ډول راکړې شوېده، وسطي انحراف يې له حسابي اوسط څخه په لاس راوړئ؟

x	fi	xi	$fi.xi$	$\|xi - \bar{x}\|$	$fi\|xi - \bar{x}\|$
1 – 3	10	2	20	6	60
4 – 6	20	5	100	3	60
7 – 9	30	8	240	0	0
10 – 12	20	11	220	3	60
13 - 15	10	14	140	6	60
	$\sum fi = 90$	-----	$\sum fi.xi = 720$	-----	$\sum fi\|xi - \bar{x}\| = 240$

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{720}{90} = 8$$

$$\bar{X} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{240}{90} = 2.6$$

مثال: ديوې علمي څيرنې لپاره د بيلا بيلو بوټو د 100 ټوټو اندازه په لاندې جدول کې ورکړل شوې ده، وسطي انحراف يې وسنجوئ؟

X	fi	xi	$fi.xi$	$\|xi - \bar{x}\|$	$fi\|xi - \bar{x}\|$
40 – 59.9	1	45	45	36.6	36.6
50 – 59.9	5	55	275	26.6	133.0
60 – 59.9	11	65	715	16.6	182.6
70 – 79.9	26	75	1950	6.6	171.6
80 – 89.9	33	85	2805	3.4	112.2
90 – 99.9	16	95	1520	13.4	214.4
100 – 109.9	7	105	735	24.4	163.8
110 – 119.9	1	115	115	33.4	33.4
	$\sum fi = 100$	-----	$\sum fi.xi = 8160$	-----	$\sum fi\|xi - \bar{x}\| = 1047.6$

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{8160}{100} = 81.6$$

$$\text{MD} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{1047.6}{100} = 10.476$$

همدارنګه وسطي انحراف په تصنيف شوواعدادوکي کولای شود لاندينيوفورمولونوله جملي څخه ديو فورمول په مرسته سنجش کړو.

$$MD = \frac{\sum f|X - \bar{X}|}{f} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} \cdots (4)$$

$$AD = \frac{\sum f|X - Med|}{\sum f} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} \cdots (5)$$

په دواړو پورتنيو فورمولونو کي f دېتولګيو فريکونسي، X دېتولګي وسط، $\bar{X}$ او Med په ترتيب سره حسابي اوسط اوداړوندي وېشني ميديان دي.

دوسطي انحراف سنجش نسبتاً ساده اوعام فهمه دي اما داستعمال موارد يې محدود دي. دوسطي انحراف استعمال دکوچنيو نمونو په اړه په صورت کې چي دقيق اوجامع تحليلونوته اړتيا نه وي ګټوردي په تصنيف شويو اعدادو او لويو نمونو کي په ندرت سره استعماليږي.

دالجبر له نظره د مطلقه توپيرونو په کار اچول دسوال قابليت لري. ځکه چې ددي توپيرونو مجموعه په هغه

صورت کي چي اشاري ته ونيول شي مساوي په صفر ياهم تقريبا صفر ته نږدي دئ

2.13 معياري انحراف يا استندرد انحراف

معياري يا استندرد انحراف د انحراف ډير مهم مقياس دي او نظر اوسط ته د انحراف يوه ځانګړي بڼه ده. د معياري انحراف او وسطي انحراف تر منځ توپير دادي چې په لومړني کې د انحراف مربع نظر حسابي اوسط ته سنجول کيږي، په داسي حال کي چي دويم يي مطلقه انحراف څخه کار اخلي. معياري انحراف دبل مهم مقياس مربع جذريعني وريانس څخه عبارت دي اويا معياري انحراف دانحرافاتومربع جذردي

معياري انحراف اووريانس په يوسلسله اعدادوکي دلاندي فورمولونوپه مرسته سنجش کيږي:

$$\delta^2 = \frac{\sum(x - \bar{X})^2}{n}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{X})^2}{n}}$$

په دي فورمول کي δ (ديونان دژبي کوچني توري دسيګما په نوم) معياري انحراف او δ^2 واريانس افاده کوي.

دمثال په ډول: د 2,3,6,8,11 اعدادو واريانس اومعياري انحراف په لاندي توګه لاسته راځي.

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\delta^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (11-6)^2 + (8-6)^2}{5} = \frac{54}{5} = 10.8$$

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{10.8} = 3.29$$

دویم مثال: په یوه صنفي ازموینه کې زده کوونکو لاندې نمرې لاسته راوړې دي.

4,6,8,10,12

ددغو نمرو د معیاري انحراف څرګنده ده، د نوموړو نمرو انحرافي محاسبه په لاندې جدول کې ښودل شویده.

X	$X = X - X^2$	X^2	
12	$12 - 8 = 4$	16	$\bar{X} = \frac{40}{5} = 8$
10	2	4	
8	0	0	
6	-2	4	
4	-4	16	
$\sum X = 40$	$\sum X = 0$	$\sum X^2 = 40$	

که چېرې د $\sum X^2$ او N قیمتونه د معیاري انحراف په فورمول کې وضع کړو نو وبه لرو.

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}} \cdots (7)$$

$$S = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} = 2.814$$

د (7) فورمولونو تطبیق په بعضي حالاتو کې په ځانګړي توګه کله چې د اعدادو تعداد زیات اوږد شي یا د څو اشارو درلودونکي وي نو د زیات وخت او زحمت ته ضرورت لري. لدې وجې بنه طریقه هم وجود لري.

هر کله چې مخکنیو فورمولونو ته پراخوالي ورکړو نو لرو چې:

$$\sum (X - \bar{X})^2 = \sum (X - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)$$

$$\sum X^2 - 2\bar{X} \sum X + n\bar{X}^2$$

$$\sum X^2 - 2\bar{X} \sum X + \bar{X} \sum X$$

$$\sum X^2 - \bar{X} \sum X$$

$$\sum X^2 - \left(\frac{\sum \bar{X}}{n}\right)^2$$

نظر دې رابطي ته کولای شو چې (7) فورمول د دوهم ځل لپاره پدې ډول وليکو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum X^2 - \frac{\sum X^2}{n}}{n}} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2} \cdots (8)$$

لکه 2,4,6,8,11 په شميرو کې:

$$\delta = \sqrt{\frac{234}{5} - \left(\frac{30}{5}\right)^2} = \sqrt{90.8} = 3.29$$

هرکله چې د يو لړئ اعدادو انحراف نظر فرضي ثابت (A) ته وسنجول شي، نو معياري انحراف کولای شو د لاندي فورمول په وسيله تر لاسه کړو.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d^2}{n}\right)^2} \cdots (9)$$

ثبوت:

$$d = X - A \quad \wedge \quad X = A + d$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{\sum(A+d)}{n} = \frac{nA}{n} + \frac{\sum d}{n} = A + d$$

$$X - \bar{X} = (A+d) - \left(A + \bar{d}\right) = d - \bar{d}$$

$$\delta = \frac{\sum\left(d - \bar{d}\right)^2}{n} \cdots (10)$$

نظر مخکېنو عمليو ته کولای شو چې (8) فورمول په اړه وليکو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d^2}{n}\right)^2}$$

مثلاً، د 5 مخکنيو شميرو په اړه لرو چې:

x	d	d^2
2	-1	1
3	0	0

6	3	9
8	5	25
11	8	64
جمع	15	99

$$d = x - A \ \wedge \ A = 3$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{99}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2}$$

$$\delta = \sqrt{19.8} = 3.29$$

دتصنیف شوو شمیرو معیاري انحراف پورتنیو فورمولونو ته ورته (مشابه) هم کولای شو په څولارو سنجش کړو. په هغه صورت کي چي د ټولګي وسط او اړوندي فریکونسي ګاني په کار واچوو کولای شوله لاندي فورمول څخه استفاده وکړو.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f(X-\bar{X})^2}{\sum f}} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}} \cdots (11)$$

په دي ځای کي f فریکونسي ګاني، X دټولګي وسط او$\bar{X}$ داړوندي ویشني حسابي اوسط دي او $d = x - \bar{x}$ وضع شوي دي. دافورمول څرنګه چي دمخکني فورمول په اړه ورکړل شوي دي کیداي شي داسي ولیکل شي:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fX}{\sum f}\right)^2} \cdots (12)$$

همدارنګه کولای شو چي لنډ فورمولونه هم را وباسو. که چیري د اعدادو انحراف د (A) د یو فرضي او سط په توګه وسنجول شي یعني $\mathrm{d = X - A}$ وي (یعني د (10) فورمول سره ورته) نو وبه لرو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \cdots (13)$$

او که انحراف د ټولګیو د موقیعت په نظر یعني د ټولګي د واټن په حدونو څرګند کړو د ټولګیو د ګډ واټن په صورت کي لیکو چي:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f d'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f d'}{\sum f}\right)^2} \cdot C \cdots (14)$$

په دې ځای کې d’ د ټولګي د ګډ واټن په نظر انحراف او C د ټولګيو ګډ واټن دی. باید یادونه وشي چې د (11) او (14) فورمولونو د واټن څوابونه ورته یا مشابه وي.

د مثال په ډول، په دې ځای کې د (12) او (14) فورمولونه د 142 کورنیو د کلني عاید په وېشنه کې د ټولګي د واټن په واحدونو په لنډه طریقه تطبیق کړو.

د (12) فورمولونو تطبیق او عملیه په (1) جدول کې او همدارنګه (14) د فورمولونو تطبیق او عملیه په (2) جدول کې په لنډه توګه وړاندې شویده.

(12) فورمول نظر (1) جدول دارنګه لیکلای شو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f X^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f X}{\sum f}\right)^2}$$

$$= \frac{653396.89}{142} - \left(\frac{9631.50}{142}\right)^2$$

$$= 4601.3865 - 4600.5698$$

$$= 0.8169 = 0.90$$

د (12) فورمول هم د انحراف د معیاري شکل تعریف لري. ددې فورمولونو تطبیق دزیات وخت نیول او ډېر کار ته ضرورت لري. په ځانګړي توګه کله چې عددونه اوږده او د کلاسونو تعداد زیات شي نو د (12) او (13) فورمولونه په دواړو حالاتو کې که فاصله مساوي وي او که نا مساوي کولای شو چې په کار یوسو. په هغه صورت کې چې د کلاسونو فاصله ګډه وي نو د (14) فورمول په تصنیف شوو اعدادوکې د معیاري انحراف لپاره لنډ ترینه او موثره طریقه ده.

(1) جدول د 142 کورنیو د کلني وسطي عاید د معیاري انحراف سنجش په کال 1355کی

کلني وسطي عاید زر افغانی	فریکونسي f	د ټولګي وسط X	fX	fX^2
66.00-66.49	11	66.25	72875	48279.69
66.50-66.99	15	66.75	1001.25	66833.44
67.00-67.49	24	67.25	1614.00	108451.50
67.50-67.99	40	67.75	2710.00	183602.50
68.00-68.49	20	68.25	1365.00	43161.25
68.50-68.99	14	68.75	962.50	66171.88
69.00-69.49	11	69.25	761.75	52751.19
69.50-69.99	7	69.75	488.26	34055.44
مجموعه	142		9631.50	653396.89

(2) جدول د 142 کورنيو د کلني عايد په وېشنه کې د معياري انحراف سنجش د ټولګي په واحدونو په لنډه طريقه تطبيق کړو.

کلني وسطي عايد زر افغانۍ	فريکونسي f	d'	fd'	fd'^2
66.00-66.49	11	3	33	99
66.50-66.99	15	2	30	60
67.00-67.49	24	1	24	24
67.50-67.99	40	0	0	0
68.00-68.49	20	1	20	20
68.50-68.99	14	2	28	56
69.00-69.49	11	3	33	99
69.50-69.99	7	4	28	112
مجموعه	142		22	470

نظر (2) جدول ته (14) فورمول حل کولای شو:

$$\delta = C.\sqrt{\frac{fd'^2}{f} - \left(\frac{fd'}{f}\right)^2} = 0.5\sqrt{\frac{470}{142} - \left(\frac{22}{142}\right)^2} = 0.5(1.81) - 0.15 = 0.83 \text{ (زر افغانی)}$$

په تصنيف شوو اعدادو کې معمولا د معياري انحراف ارزش يوڅه لږ لوړ دی. نظر په معياري انحراف کې په هغو اعدادو کې چې تصنيف شوي نه وي شنجول کېږي.

له تحليلي نګاه څخه د کلاسونو د فاصلو اندازه په تصنيف شوو اعدادو کې بايد کوچني وي دمعياري انحراف له ربع څخه.

له تشريحي نګاه څخه سربيره پر تيروتنو کولای شو د کلاسونو دفاصلو اندازه حتي د معياري انحراف نيمايي شي.

2.13 نسبي انحراف (دانحراف ضريب)

کولای شو دوه يا زياتي لړۍ (سلسلي) د اړوندو لړيو د اعدادو د خوريدني (پراګندګی) د څرنګوالي د پوهيدو په غرض چې د پوره يا تقريبا ورته اوسطونو لرونکي وي پرتله (مقايسه) کړو، په ځينو حالاتو کې بيلا بيلي وېشني بيل يا متفاوت اوسطونه لري او يا په بيلا بيلو واحدونو باندې څرګنديږي. په دې حالت کې د هغوی د معياري انحراف پر تلنه نا ممکنه وي د بيګي په ډول د طب د ډاکترانو د کلني عايد د وېشني معياري انحراف 1500 افغانۍ او د پوهنتون داستادانو معياري انحراف 1000 افغانۍ وي پدې به دلالت ونکړي چې انحراف د طب د ډاکترانو په عايد کې د 150 سلنې په اندازې، انحراف د پوهنتون د استادانو په کلني عايد کې وي، يواځې په هغه حالت کې کولای شو تعبير کړو چې په دواړو ګروپونو کې د کلني عايد اوسط مساوي وي. که د لومړني ګروپ د کلني عايد اوسط مثلاً 75000 او د دويمي 36000 وي د استادانو په عايد کې نسبي انحراف نظر دطب د ډاکترانو عايد ته زيات دې. په حقيقت کې د انحراف د دوو مطلقه ارزښتونو په منځ کې توپير له له متفاوته اوسطونو سره په يوازيتوب (تنهايي) سره پرتلني اساس نشي کېداي. دمقياسونو په دې حالت کې بايد مطلقه انحراف په نسبي انحراف تبديل شي، ترڅو د اړوندو ويشنو د پرتلني امکان ميسر شي.

په دې ځای کې دري ډوله د نسبي انحراف مقياس مطالعه کېږي.

- ☑ دمعياری انحراف ضريب
- ☑ د وسطي انحراف ضريب
- ☑ د کوارټايلونو د انحراف ضريب

د معياريانحراف ضريب

د نسبي انحراف له مقياسونو څخه يو مقياس چې په عمل کې زيات په کار اچول کېږي د نسبي انحراف ضريب دې، دا ضريب معمولاً په V افاده کېږي او پر حسابي اوسط باندې د معياري انحراف له نسبت څخه عبارت دی يعني:

$$V = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{حسابي اوسط}} = \frac{\delta}{\overline{X}} \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

مثال د طب د ډاکترانو او د پو هنتون د استادانو د کلني عايد په اړه د انحراف ضريبونه عبارت دی له:

$$V_1 = \frac{1500}{75000} = 0.2 \text{ يا } 2\%$$

$$V_2 = \frac{1000}{36000} = 0.028 \text{ يا } 2.8\%$$

2.14 د وسطي انحراف ضريب

د بلې خوريدني نسبي مقياس چې ډير زيات معمول دی د وسطي انحراف د ضريب په نوم ياديږي چې لاندي په V_a باندې اعاده شويدي چې پر حسابي اوسط باندې له وسطي انحراف څخه عبارت دی.

$$V_a = \frac{\text{وسطي انحراف}}{\text{حسابي اوسط}} = \frac{MD}{\bar{X}}$$

که په یوه وېشنه کې د $\bar{X}$ حسابي اوسط او د MD وسطي انحراف د هغو طریقو په اساس چې مخکې مطالعه شویدي پیدا کړو. د (V_a) د وسطي انحراف ضریب هم په هغوی کې ویشو او په نسبت یا معمولاً په فیصدی یې څرګندوو.

د مثال په ډول په 2,3,6,8,11 پنځو عددونو کې څرنګه چې مو مخکې ولیدل.

$$\bar{X} = 6$$

$$MD = 2.8$$

د وسطي انحراف ضریب په دې اعدادو کې عبارت دی له:

$$V_a = \frac{MD}{\bar{X}} = \frac{2.8}{6} = 0.0466 \text{ یا } 46.6\%$$

هرکله چې وسطي انحراف نظر میدیان ته وسنجول شي د (3) فورمول به ولیدل شي، نو کولای شو چې (16) فورمول دارنګه ولیکو:

$$V_a = \frac{AD}{\bar{X}} \cdots (16)$$

په ځانګړي توګه په بعضي ځایونو او حالاتو کې، د دوو سرته رسیدلو کلاسونو په وروستیو کې یوه وېشنه خلاصیږي، او یا دغیر هادي ارزښتونو وېشنه وجود لري.

مثال: دلاندې دفعاتوتوزیع لپاره چې په هره ونه کې دمنو شمیر ښیي، وسطي انحراف یې محاسبه کړئ؟

Classes	65-84	85-104	105-124	125-144	145-164	165-184	185-204
fi	9	10	17	10	5	4	5

حل:

classes	xi	fi	$fi.xi$	$xi-\bar{x}$	$fi\lvert xi-\bar{x}\rvert$
65-84	**74.5**	**9**	**610.5**	**-48.0**	**432.0**
85-104	**94.5**	**10**	**945.0**	**-28.0**	**280.0**
105-124	**114.5**	**17**	**1946.5**	**-8.0**	**136.0**
125-144	**134.5**	**10**	**1345.0**	**12.0**	**120.0**
145-164	**154.5**	**5**	**772.5**	**32.0**	**160.0**
165-184	**174.5**	**4**	**698.0**	**52.0**	**208.0**
185-204	**194.5**	**5**	**972.5**	**72.0**	**360.0**
		$\sum fi = 60$	**7350**		**1696.0**

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{7350.0}{60} = 122.5gr$$

$$\mathrm{MD} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{1696.0}{60} = 28.27gr$$

2.15 کوانټيلQuantiles

مخکې مو وویل چې میانه معلومات په دوومساوي برخو ویشی، په همدې ترتیب کولی شو چی معلومات په څلورو،لسو او یاسلو مساوی برخو وویشو.

د کوانټیل ډولونه: 1.کوارټيل 2. ډسايل 3. پرسنټايل

1. کوارټيل(Quartiles): که چیری معلومات په څلورمساوی برخو وویشل شی، هری یوی برخی ته کوارټيل ويل کيږی .

عموماً دوه ډوله کوارټيل وجودلری Q_1 ته لومړی کوارټيل او Q_3 ته دريم کوارټيل وايل کيږی .

همدارنګه Q_1 او Q_3 ته ټیټ او لوړکوارټيل په ترتیب سره وایی. دويم کوارټيل Q_2 ته میانه وایی.

کوارټيل دلاندی فورمولونوپواسطه پيداکوو.

Q_1=د $\frac{n+1}{4}$ رقم ارزښت Q_2=د $\frac{2(n+1)}{4}$ رقم ارزښت Q_3= د $\frac{3(n+1)}{4}$رقم ارزښت

لومړی مثال: دلاندی مشاهداتوڅخه ټیټ کوارټيل ، دويم کوارټيل اولوړکوارټيل په لاس راوړئ

15 , 20 , 25 , 25 , 25 , 30 , 30 , 35 , 35 , 40 , 45

حل:

$\frac{n+1}{4} = c$ $\frac{11+1}{4} = 3 \Rightarrow r = 3\hat{}w = 0$ (a

$$Q_1=(1-w)X_r+w.x_{r+1}=(1-0)X_3+0\cdot X_4=X_3 \qquad Q_1=25$$

$b)\ \dfrac{2(n+1)}{4}=C\Rightarrow\dfrac{2(11+1)}{4}=6 \quad ,r=6\text{^}w=0$

$$Q_2=(1-w)X_r+w\cdot X_{r+1}=(1-0)X_6+0\cdot X_7=X_6$$

$$\mathrm{Q_2=X_6=Me=30}$$

C) $\mathbf{\frac{3(n+1)}{4}=C\Rightarrow\frac{3(11+1)}{4}=9 \quad ,r=9\text{^}w=0}$

$$Q_3=(1-w)X_r+w\cdot X_{r+1}=(1-0)X_9+0\cdot X_{10}=X_9 \qquad Q_3=X_9\Rightarrow Q_3=35$$

د کوارتیل انحراف ضریب

د انحراف ضریب نظر کوارټایلونو ته چې لاندې په V_q سره افاده شوي د هغوی په مجموعي باندې د دریم کوارټایل او لومړی کوارټایل د توپیر له نسبت څخه عبارت دی یعني:

$$V_q=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}\cdots(17)$$

د مخکنیو انحرافونو ضریبونه کولای شو په کسري، اعشاري، یا څرنګه چې زیات معمول دې په فیصدۍ یې څرګندوو.

د مثال په ډول لکه څرنګه چې مخکې هم ولیدل شول د 142 کورنیو وسطي کلني عاید په وشنه کې.

$$Q_3=68.41$$

$$Q_1=67.21$$

نو وروسته پدې وېشنه کې:

$$V_q=\frac{68.41-67.21}{68.41+67.21}=\frac{1.20}{135.62}=0.009=0.9\%$$

په لنډه توګه باید ووایو دوه یا زیاتې وېشنې د انحراف او خوریدنې له پلوه یوائې هغه وخت پرتله کولای شو چې د کټ مټ اوسط یا تقریبا داوسط لرونکې وي او په ورته (مشابه) واحد باندې افاده شوی وي پرته له دې باید د نسبي انحراف مقیاسونه په کار واچول شي.

د ویشنو د پرتلني (مقایسي) پر وخت باید خپله مقیاس په کار واچول. شي او نشو کولای V یوه وېشنه یا V_a او V_q له بلي وېشني سره پرتله کړو، او همدارنګه نشو کولای δ یوه وېشنه یا AD او QD له بلي وېشني سره پرتله کړو.

2. دیسایل (Deciles): په دی کې معلومات په لسو مساوی برخو وېشل کیږی او په D_1 $D_2,\ldots.D_9$ یی وېشو. پنځم ډیسایل د میانی څخه عبارت دی.

$D_1 =$ د $\frac{n+1}{10}$ رقم ارزښت

$D_2 =$ د $\frac{2(n+1)}{10}$ رقم ارزښت

………………..

………………..

$D_9 =$ د $\frac{9(n+1)}{10}$ رقم ارزښت

لومړی مثال: په لاندی معلوماتو کې D_3 او D_5 پیداکړی.

82, 53, 54, 62, 60, 63, 46

لومړی معلومات په صعودی ډول تر تیبوو.

46, 53, 54, 60, 62, 63, 82

a) $\frac{3(n+1)}{10} = C \Rightarrow 3\frac{(7+1)}{10} = 2.4$

r =2 w =0.4

$D_3 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0.4)X_2 + 0.4 \cdot X_3$

$$D_3 = 0.6(53) + 0.4(54) = 31.8 + 21.6 = 53.4$$

b) $\frac{5(n+1)}{10} = C \Rightarrow 5\frac{(7+1)}{10} = 4$

$D_5 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0)X_4 + w \cdot X_5 = X_4$

$D_5 = 60$

3 . پرسنټیل (Percentiles): په دې کې معلومات په سلو مساوي برخو وېشل کیږي او په P_1 , P_2 …… P_{99} یې ښیو، P_{50} د میانې څخه عبارت دی.

P_1=د $\frac{(n+1)}{100}$ رقم ارزښت

P_2=د $\frac{2(n+1)}{100}$ رقم ارزښت

………………..

………………..

P_{99}= د $\frac{99(n+1)}{100}$ رقم ارزښت

لومړی مثال: په لاندې معلوماتو کې P_{30} او P_{60} پیداکړئ.

82, 53, 54, 62, 60, 63, 46

لومړی معلومات په صعودي ډول تر تیبوو.

46, 53, 54, 60, 62, 63, 82

$a)\ \frac{30(n+1)}{100} = C \Rightarrow \frac{30(7+1)}{100} = 2.4 \qquad r = 2\hat{\ }w = 0.4$

$P_{30} = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0.4)X_2 + 0.4 \cdot X_3$

$=0.6\,(53)+0.4(54)=53.4 \Rightarrow \qquad P_{30} = 53.4$

b) $\frac{60(n+1)}{100} = C \Rightarrow \frac{60(7+1)}{100} = 4.8 \quad r = 4\text{^}w = 0.8$

$P_{60} = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0.8)X_4 + 0.8 \cdot X_5$

$$P_{60} = 0.2(60) + 0.8(62) = \Rightarrow P_{60} = 61.6$$

دریم فصل

تصادفی متحول او د هغه واریانس ،دریاضی امید او معیاری انحراف

3.1 داحتمالاتوتابع

تعریف۱: فرضوچې Xیواتفاقي متحول او $x_1, x_2 ... x_n$ دنوموړي اتفاقي متحول ارزښتونه دي پدې صورت کې دنوموړي متحول داحتمالا توتابع دی چې دXمتحول دهریوه ارزښت دتحقیق پیداکولواحتمال توضح کوي یاپه بل عبارت : احتمال ددې چې Xاتفاقي متحول د x_i ارزښت ولري داحتمالاتو په تیوری کې داحتمالاتو دتابع په نامه یادیږي په ریاضیکي توګه کولای شو هغه په لاندې ډول سره افاده کړو:

$$F_x(x_i) = P(X = x_i), \qquad i = 1,2,3 ... n$$

تریف۲: هغه تصادفی متحول چی په احصایه او احتمالاتو کی تر څیرنی لاندی نیول کیږی عبارت له هغه تابع څخه دی چی دتعریف ناحیه یی نمونیی فضضاء او دقیمتونو ناحیه یی حقیقی اعداد وی

که ، $p(X = x_i)$ ولرو نو $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)] ... [x_n, f(x_n)]$ ته د مجزا (کسسته) احتمال تابع وایی.

د تجمعی او پیوسته احتمال تابع په $F(x) = p(X \leq x)$ بڼه ښودل کیږی.

دیوه اتفاقي متحول داحتمالا توتابع لاندېني مشخصات لري :

1) $P(X=x_i)=F_x(x_i)\geq 0$ 1)   2) $\sum_{i=1}^{n} F_x(x_i)=1$

3.2 د ریاضی تمه (امید) (math expectation)

که x نا څاپی مجزا متحول وی په دی حالت کی اوسط (expected value) چی د x تصادفی مجزا

متحول چی د **E(X)** په بڼه ښودل کیږی عبارت دی له $E(X)=\sum_x x\ P(X=x)$

یا $E(x)=x_1f(x_1)+x_2f(x_2)\dots x_nf(x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_if(x_i)$............*

که $f(x_i)=p_i$ سره وښیو چی احتمال دی نو د ریاضی امید په لاندی ډول هم لیکلای سو

$E=E(\mathrm{x})=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\dots+x_n\ p_n=\sum_{i=1}^{n} x_i\ p_i$

$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$.................**

په هغه صورت کی چی X لایتناهی قیمتونه واخلی د ریاضی امید یی په لاندی ډول دی
$E=E(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\ p_i$
په پورته فورمول کی p احتمال دی

همدا ډول که k *یو مثبت عدد وي نو:* $E(X^k)=\sum_x x^k\ P(X=x)$

که تصادفی متحول د n مقدار سره راکړل سوی وی او احتمال یی یوشان وی یعنی p_j =1/n
نوپه دی صورت دریاضی امید (اوسط) عبارت دی له

$$E=x_1\left(\frac{1}{n}\right)+x_2\left(\frac{1}{n}\right)+x_3\left(\frac{1}{n}\right)+\dots+x_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{x_1+x_2+x_3+\dots\dots x_n}{n}=\bar{x}$$

تعریف: که چیرېx یو تصادفي متغیر وي، د x *واریانس د* V(X) *په بڼه ښودل کیږی او داسی تعریف شویدی*
V(X) = E[(X – E(X))^2].

یا V(X) = E(X^2) – [E(X)]^2

استاد عبدالاحد ارین

معیاری انحراف عبارت له : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

مثال: د لاندی جدول کی په پنځه نمریی تیست کی په ترتیب سره د ۲،۳،۴،۵ نمرو اخستلو احتمال درکړی

سوی دی د ریاضی امید یی پیدا کړی (د نمرو اخستلو احتمالی اوسط) پیداکړی

x	2	3	4	5
p	0.2	0.4	0.3	0.1

حل: $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 2(0.2) + 3(0.4) + 4(0.3) + 5(0.1) = 3.3$

د پورته احتمال پر بنسټ ویلاای سو چی په پنځه نمریی ازموینه کی به ۳,۳ نمری واخستل سی

دریاضی د امید خواص.

په هغه صورت کی چی متحولین x ,y تصادفی وی او c حقیقی عدد وی

1) E(cx)=cE(x)   2 . E(X+Y)=E(X)+E(Y)

3 . E(XY)=E(X)E(Y)   (۴) E(a) = a   (۵) E(aX + b) = a E(X) + b

1.$E(cx) = \sum_x cf(x) = c\sum_x xf(x) = cE(x$

تیورم: د یو شمیر تصادفي متغیرونو د مجموعي امید (تمه) مساوي ده د هغوی د امیدونو د مجموعی سره

ثبوت: راځئ چې د x او y تصادفي متغیرونه په پام کې ونیسو. داسی چې د x . xi د مقادرو څخه دی

او   i = 1, 2, 3, . . .,m   همد انګه د y لپاره j = 1, 2, 3, . . . ,n

$$E(x+y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i + y_j) P_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \ P_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j \ P_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{m} y_j \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i} x_i P_{ij} + \sum_{j} y_j P_{ij} = E(x) + E(y)$$

$$\therefore \ E(x + y) = E(x) + E(y)$$

Since $\sum_{j=1 to n} P_{ij} = P_j$ and $\sum_{i=1 to m} P_{ij} = Pi$.

د پورته ثبوت پربنسټ لرو $E(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) ..... + E(x_n)$: .

یا په لنډ ډول:

2.$E(x+y) = \sum\sum(x+y)f(x,y) = \sum\sum xf(x,y + \sum\sum yf(x,y)$ =E(x)+E(Y)

تیورم: د يو شمير خپلواکو تصادفي متحولونو د حاصل ضرب رياضيکی تمه د دوی د تمو له حاصل ضرب سره مساوي ده.

یعنی: $E(x\,y) = \sum_{j}\sum_{i} x_i \, y_j \, P_{ij}$

ثبوت : د قانون په اساس لرو $P_{ij} = P_i \ P_j$

$$\sum_{j}\sum_{i} x_i \ P_i \ y_j \ P_j = \sum_{i} x_i \ P_j \sum_{j} y_j \ P_j = \sum_{i} P_i \, x_i \ E(y) = E(y) \sum_{i} P_i \, x_i = E(x)\, E(y)$$

یا: 3. E(xy)= $\sum\sum$xy$f(x,y) = \sum_x[xf(x)\sum_y yf(y)] = \sum_x[xf(x)E(y)$ = E(x)E(y):

د پورته ثبوت پر بنسټ ليکلای سو. $E(x_1 . x_2 . x_3 ..... x_n) = E(x_1) . E(x_2) . E(x_3) ...... E(x_n)$.

یادونه:(E(x, y) = E(x) E(y د x او y خپلواکي تضمين نه کوي.

تعریف: که چیریxیو تصادفي متغیر وي، د x واریانس د V(X) *په بنه ښودل کیږی او داسی تعریف شویږی*

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

یا

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

معیاری انحراف عبارت له :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

$$V(x) = \sigma^2 = E\left[(x - E(x))^2\right] = E\left[(x-\mu)^2\right] =$$
$$= \sum_{\text{all } x}(x-\mu)^2 p(x) = \sum_{\text{all } x}\left(x^2 - 2x\mu + \mu^2\right)p(x) =$$
$$= \sum_{\text{all } x} x^2 p(x) - 2\mu \sum_{\text{all } x} xp(x) + \mu^2 \sum_{\text{all } x} p(x) =$$
$$= E\left[x^2\right] - 2\mu(\mu) + \mu^2(1) = E\left[x^2\right] - \mu^2 = E[x^2] - [E[x]]^2$$

$$\text{Standard Deviation}: \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

$$\ldots\ldots{*}{*}{*}V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - [E[x]]^2$$

د واریانس ځینی خواص:

(a) $V(a) = 0$ (b) $V(aX \pm b) = a^2 V(X)$

(c) $V(aX + bY) = a^2 \sigma^2_X + b^2_Y + 2ab\, \sigma_{XY}$.

دبرنولی په توزیع کی درياضی امید او واریانس

دبرنولی په توزیع کی چی p کامیابی او q ناکامی نومول سویده د x=0 لپاره ناکامی او د x=1لپاره

کامیابی ده چی په لاندی ډول ده

X	0	1
P	Q	P

استاد عبدالاحد ارین

$$f(1) = p(x = 1) = p, \quad f(0) = p(x = 0) = q = 1 - p \quad , \quad 0 \leq p \leq 1$$
$$, \ f(x) = \{p, \quad x = 1\} f(x) = \{p^x (1-p)^{1-x}, x = 0, \}$$

$$E(X) = \sum_x xP(x) = (0)(1-p) + (1)(p) = p$$
$$Var(X) = \sum_x (x-p)^2 P(x) = (0-p)^2 (1-p) + (1-p)^2 (p)$$
$$= p(1-p)(p+1-p) = p(1-p) = pq$$

3.3 دبینومیل توزیع دریاضی امید او واریانس Mean and variance of the Binomial distributionدوه حده توزیع دبرنولی دتوزیع په شان ده چی د n تجربولپاره یی احتمال یوشان دی او په

B(n,p) سره ښودل کیږی >چی p احتمال او n دتجربوشمیر دی او د k کامیابیو لپاره په لاندی ډول لیکل کیږی

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

$$E(X) = E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = p + \ldots + p = np$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) = np(1-p) = npq$$

یا :

$$Mean = \mu = \sum_{x=0}^{n} x.b(x; n, p)$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x.\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{(n-x)}$$

Put y = x – 1, $\therefore$ x = 1 + y

When x = 1 implies y = 0

x = 1 implies y = x – 1

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} {}^{(n-1)}C_y\, p^y q^{(n-y-1)}$$

$$= np\ (q+p)^{(n-1)}$$

So, μ = np is Mean of Binomial distribution.

Variance of the Binomial Distribution د بینومیل توزیع واریانس 3.4

$$E(X)^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2\ b(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} [x(x-1)+x]\, b(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\ b(x,n,p) + \sum_{x=0}^{n} x\, b(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\ \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{(n-x)} + \mu$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^x q^{(n-x)} + np$$

$$= n(n-1)\, p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{(x-2)} q^{(n-x)} + np$$

y = x – 2 $\therefore$ x = 2 + y

x = 2 $\Longrightarrow$ y = 0

که x = n imples y = n - 2

$$= n(n-1)\, p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y!\,(n-2-y)!} p^y q^{(n-2-y)} + np$$

$$= n(n-1)\,p^2 \sum_{y=0}^{n-2} {}^{(n-2)}C_y\, p^y\, q^{(n-2-y)} + np$$

$$= n(n-1)\,p^2\,(q+p)^{n-2} + np$$

$$E(X^2) = n(n-1)\,p^2 + np$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= n(n-1)\,p^2 + np - (np)^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np(1-p)$$

$$\therefore$$

$$\sigma^2 = npq \qquad ، \; \sigma = +\sqrt{npq}\,.$$

مثال : که یوه سکه شپږ ځل وغورځول سی دشیر راتلو لپاره یی امیدریاضی او واریانس حساب کړی

حل:

$$E(x) = \mu = np = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$Var(x) = \sigma^2 = npq = 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5$$

$$\text{standard}\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.5} = 1.22$$

مثال: که دوی سکی یو ځای وغورځول سی د شیر راتلو لپاره یی د ریاضی امید او واریانس پیداکړی

حل:

X = x	0	1	2	Total
P(X = x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Mean: $\mu = E(X) = 0.\frac{1}{4} + 1.\frac{2}{4} + 2.\frac{1}{4} = 1$

$$\text{Variance: } \sigma^2 = V(X) \qquad = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= 0^2 . \frac{1}{4} + 1^2 . \frac{2}{4} + 2^2 . \frac{1}{4} - (1)^2$$
$$= \frac{2}{4} + 1 - 1$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال: دلاندی جدول څخه واریانس ، اوسط(امید ریاضی) سندرد انحراف پیداکړی

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = (1 \times 0.1) + (2 \times 0.1) + (3 \times 0.2) + (4 \times 0.4) + (5 \times 0.2) = 3.5$$

$$E(X^2) = (1^2 \times 0.1) + (2^2 \times 0.1) + (3^2 \times 0.2) + (4^2 \times 0.4) + (5^2 \times 0.2) = 13.7$$

$$V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - \big[E[x]\big]^2 = 13.7 - (3.5)^2 = 1.45$$

$$\text{Standard deviation } \sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{1.45} = 1.20$$

3.5 دپواسن داحتمال توزیع

په احصایه کی د پواسون توزیع د احتمال توزیع ده چی په یو مشخص وخت کی د یوی پیښی د څوځلی د احتمال لپاره کارول کیږی ، یا په بل عبارت د شمیرلو توزیع ده.

دا نوم د فرانسوی ریاضی دان سیمون دنیس پواسون (Simeon Denis Poisson) په ویاړ پر یادی توزیع اینبودل سوی دی.

استاد عبدالاحد ارین

دپواسن توزیع دلمدا د پرامتر سره په لاندی دی ډول ده . . . $f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, for x = 0, 2, 3, چی x یوصحصیح مثبت عدد دی

دپواسون تقرب د بینومیل توزیع ته:

Poisson Approximation to Binomial Distribution Theorem:

Statement بیان**:** چی لمدا λ یو غیری صفری محدود عدد دی ، او $n \to \infty$ ،$p \to 0$ $np = \lambda$
$b(x, n, p) \to \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$.

Proof: Let us consider b(x, n, p) so that $b(x, n, p) = {}^nC_x \; p^x q^{n-x}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(x-1))}{x!} \; p^x q^{n-x}$$

and given np = λ $\Rightarrow$ $p = \frac{\lambda}{n}$ also $q = 1 - p = 1 - \frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(x-1))}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(x-1))}{n^x}\,\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{(n-1)}{n}\right)\left(\frac{(n-2)}{n}\right)\ldots\left(\frac{(n-(x-1))}{n}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$b(x, n, p) = {}^nC_x \; p^x q^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{(n-1)}{n}\right)\left(\frac{(n-2)}{n}\right)\ldots\left(\frac{(n-(x-1))}{n}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} \text{ ---------- } (1)$$

Now as $n \to \infty$, $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{x-1}{n} \to 0$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x \to 1 \text{ and } \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda} \to e^{-\lambda}$$

$\therefore$ from equation (1) b(x, n, p) $\to \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$.

This completes the proof of the Poisson's Approximation to Binomial distribution theorem.

Note: 1. $e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$

2. Show that $\sum_{x=0}^{\infty} f(x, \lambda) = 1$

For that consider $\sum_{x=0}^{\infty} f(x, \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$

3. $\lambda > 0$ is called the parameter of the Poisson Distribution.

4. P(X = 0) = $\frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

Applications of Poisson distribution:

Poisson distribution is applicable when n is very large and p is very small. Hence some of the applications of Poisson distribution are as follows:

1. Number of faulty blades produced by a reputed firm

2. Number of deaths from a disease such as heart attack or cancer.

3. Number of telephone calls received at a particular telephone exchange.

4. Number of cars passing a crossing per minute.

5. Number of printing mistake in a page of a book.

Mean and Variance of Poisson distribution:

Mean $\mu = E(X)$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x\, P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, f(x, \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda}$$

Therefore Mean = $\mu = \lambda$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\ f(x,\lambda) \quad = \sum_{x=0}^{\infty} [x(x-1)+x]\ f(x,\lambda) \quad = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\ f(x,\lambda) + \sum_{x=0}^{\infty}\ x\ f(x,\lambda)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \lambda \quad = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda \quad = \lambda^2\, e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$\therefore\ E(X^2) = \lambda^2\ e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

Variance = $V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. $\therefore$ variance = λ

Standard Deviation = S.D. = $\sqrt{Variance} = \sqrt{\lambda}$

Note : In a Poisson distribution mean always equal to the variance.

دیکنواخته (متصل)تصادفی متحولینو واریانس او اومیدریاضی:

په دی تابع کی ، x په [a,b] انتروال کی قرارلری او متحول یکنواخته (متصل) وی چی ریاضیکی بنودنه

یی په لاندی ډول ده ،یادونه باید وشی چی دریاضی امید په متصل اومنفصل متحولینوکی یو ډول تعبیر لری

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ o\ , & x = 0 \end{cases}$$

استاد عبدالاحد ارین

$$p(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = b - a$$

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{1}{2}x^2\frac{1}{b-a}\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p_x(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(x) = DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{DX} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

مثال په $[0,1]$ انتروال کی دریاضی امید او واریانس څودی؟

حل:

$$E(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$Var(x)=\frac{(a-b)^2}{12}=\frac{(0-1)^2}{12}=\frac{1}{12}$$

نورمال توزیع:

د x تصادفی متحول د $f(x)$ تراکمی تابع سره د نورمال توزیع لرونکی دی که تابع په لاندی ډول راکړل سوی وی

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

تصادفی متحول چی د نورمال توزیع لرونکی وی په لنډ ډول په $X\sim N(\mu,\sigma)$ شکل ښودل کیږی

چی μ د متحول امید یا اوسط ، σ معیاری انحراف راښی، یعنی نورمال توزیع کاملا د معیاری انحراف او اوسط په واسطه مشخص کیږی

د $f(x)$ تراکمی تابع دلاندی خواصو لرونکی ده

1- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$
2- $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$
3- د $f(x)$ تابع د $x=\mu$ قیمت سره اعظمی ده.
4- $f(x)$ د μ پر شاوخوا متناظره ده، یعنی $f(x+\mu)=\ f(-x+\mu)$

5- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

<u>مثال:</u>

د X تصادفی متحول توزیع د $X\sim N(30,9)$ په شکل راکړل سویده احتمال یی داسی پیدا کړی چی X په $[24,43]$ انتروال کی قیمت واخلی .

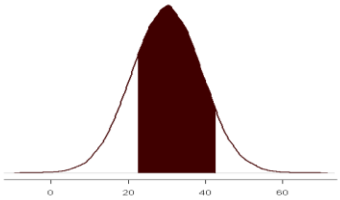
حل: لرو چی

$$P(24\leq X\leq 43)$$

د تعریف په اساس اود نورمال توزیع په نظر کی نیولو سره لرو چی:

$$P(24 \le X \le 43) = \frac{1}{9\sqrt{2\pi}}\int_{24}^{43} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-30}{9}\right)^2\right) dx$$

$P\ (24 \le X \le 43)$



د محاسبی څخه وروسته پورته انتګرال 0.6737 کیږی .

معنا دا چی د X تصادفی متحول په احتمال د 0.6737 په یاد سوی انتروال کی قیمت اخلی

دميلان تحليل

(The Regression Analysis)

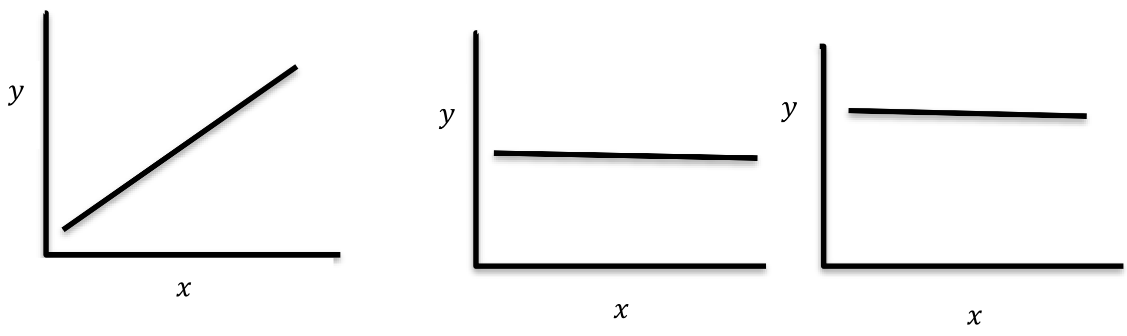
ميلان اصطلاح په 1885م کال (frances Galton) په واسطه لومړی معرفي شوه، کوم چې دې اولادونو او والدينو د قدونو افادې موضوع څېړله، دې د اوموندله چې دلوړ قد لرونکی والدينو اولادونه لوړقد او د ټيټ قد لرونکي والدين د ټيټ قد اولادونه لري، دغه پېښه يې د اوسط خواته د ميلان Regress Toward (the Average) په نوم ياده کړه ، دغه مرکزي اوزانونو ميلان د ګالتن له خوا د يو تمايل په نوم ونومول شو.

ځيني وخت يو مستقل متحول (lndependelt variable)او يود تابع متحويل (Depenent variable)وي،

چې ديته ساده يا يو اړخيزه ميلان (simple Regression) ويل کيږي که مستقل يا د تابع متحولين څوځو وی، په داسي حال کي د څو مستقلو متحولينو لرونکي ميلانونه د څو ګوني يا څواړ خيزه ميلان(Multiple Regression)په نوم ياديږي.

د بيلګي په ډول د بوټو وده د ځمکي د حاصلخيزي ، د سرو تطبيق، اوربښت، د تخم کيفيت او نورو پوري اړه لري.

يا د يو تن فشار د هغې وزن، عمر اونورو پوري اړه لري،



Positive Slope | Zero Slope | Negative Slope

دميلان بيلګي عبارت دي له:

- د نباتاتوحاصل او توليد چې د سرې په مختلفو اندازو شنه شوې وی.
- د پلاستيک کلکوالي د تودوخي په مقابل کي د وخت د مختلفو دورانونو لپاره

په پورتنیو بیلګو کې په یو مقیاس کې بدلون مطالعه شوې دې د یو مشخص بدلون د بل متحول سره، چې د تجربه کوونکې په واسطه انتخاب شوې دې.

تعریف: میلان یو احصائیوي تیوري ده، په کوم کې چې مونږ د یو متحول د ارزښتونو اټکل کوو او د دې په وسیله د بل متحول ارزښتونه پیژندل کیږي .

فر ضوو چې دکال په پیل کی یو شاګرد له اوسط څخه زیاتی نمری اخستی دی اودکال په پای کې یې هم له اوسط څخه زیاتی نمری اخستی دی اوکه دکال په پیل کی له اوسط څخه کمی نمری اوهم یی دکال په پای کی له اوسط څخه کمی نمری اخستی وی ؛ نووایو چی دانمری یودبل سره مثبت ارتبا ط لری اوکله دا سی حالت واقع کیږی چی دیو متحول لوړې نمری دبل متحول دکوچنیونمرو سره جوړه شوی وی؛ نووایی چې دا دواړه متحوله یو دبل سره منفی ارتباط لری .

دارتباط ضریب دمتحولینو درابطو ترمنځ یوشاخص دی چی مختلف ډولونه لری؛ خو دهغوی اکثریت ځینی مشترک صفتونه لری که دوه متحوله په خپل منځ کی مثبته رابطه ولری نو دهغوی دارتباط ضریب مثبت یودی اوکه منفی رابطه ولری نو دارتیاط ضریب منفی یودی اوکه دوه متحوله په خپل منځ کی هیڅ ارتبا ط ونه لری، نودارتباط ضریب یی صفردی .

په دی ډول که دارتباط ضریب په r وښیونو:

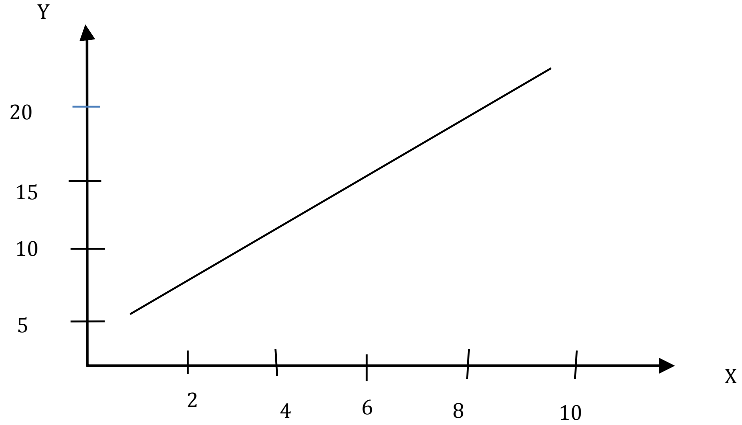
$$-1 \leq r \leq +1$$

په لنډه توګه که $r = 1$ وی نو ددوه متحولینو تر منځ ارتباط کاملاًمثبت اوکه $r = -1$ نوارتباط یی کاملاًمنفی اوکه $r = 0$ وی نو د دواړو متحولینو ترمنځ ارتباط وجود نه لری

د بیلګی په ډول: که د یو شمیر زده کوونکو د دوو ازموینوپایلی په پام کی ونیسو د لومړی ازموینی پایلی په x او ددویمی ازموینی پایلی په y وښیو،د x او y تر منځ رابطه دقایمو مختصاتو په افقی اوعمودی محور باندی ښودلای شو داسی چی دنمرو هره جوړه په قایمو مختصاتو کی یوه نقطه ورکوی .

دنمرو لا ندی جدول د هغی د ګراف سره په ښوحالاتوکی په پام کی نیسو:

X	1	3	4	6	7	8	10
Y	4	8	10	14	16	18	22

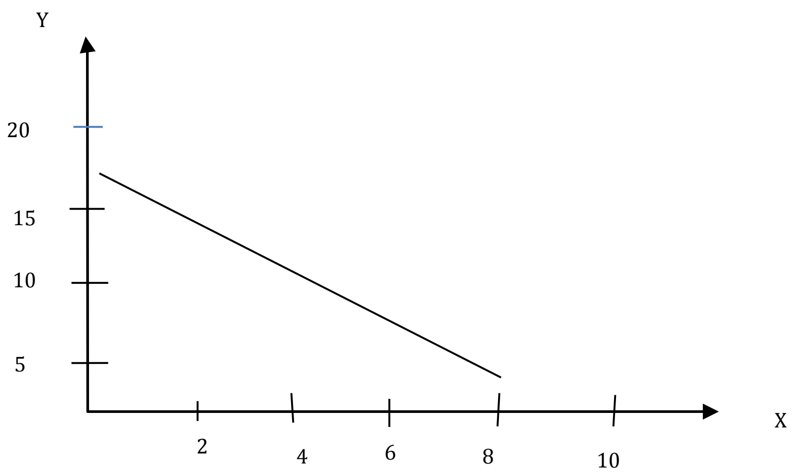


استاد عبدالاحد ارین

ګراف ښيي چې نقطې په يومستقيم خط قرار لري او د دوى ترمنځ رابطه $r = 1$ ده.

اوکه دا جدول په پام کې ونيسو:

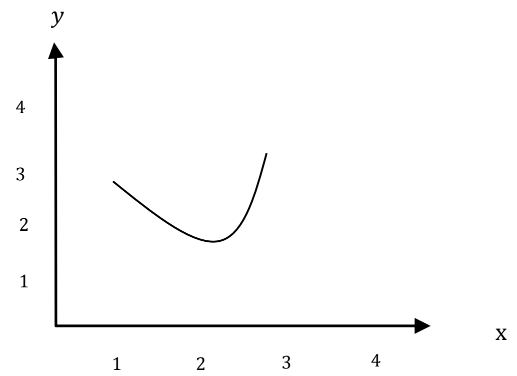
X	1	2	4	5	7	8
Y	16	14	10	8	4	2



په دی شکل کې د X او Y ترمنځ رابطه منفي ده يعنې $r = -1$

په نورو حالا تو کې چې نقطې په بشپړ توګه په مستقيم خط نه وي ،کيد اى شي چې رابطه مثبت، کيداى شي رابطه منفي او کيداى شي هيڅ رابطه موجوده نشي او يا دا چې رابطه د منحنى خط په شکل وى لکه:

X	1	2	3	4
Y	3	2	4	5



ترسیم شوی کرښه چې هرخومره مستقیمه وی، یا مستقیم والی ته نږدې وی، دارتباط د درجې لوړوالی ښکاره کوی، که چیری د دوه متحولینو ترمنځ دبشپړ والی رابطه وجود ولری ټولی نقطی (قیمتونه) په یو مستقیم قرار نیسی، په داسی حالت کی د مستقل متحول له مخی د تابع متحول د تګلوری او قیمتونو پیشګویی ډیره اسانه ده، یعنی د بعدی قیمتونودپیش بینی لپاره صرف له Y سره د یوموازي په رسمولو موږ د X مربوط قیمت پیدا کولی شو، مګر په عمل کی د کرنی په سکتور کی ځینی وخت د دوو متحولینو تر منځ رابطه مکمله نه وی،یعنی ټول نقاط په یوه مستقیم نه واقع کیږی، نو په داسی مواردو کی د پیشګویی لپاره مهمه خبر ه دا ده چی موږ داسی نقاط په ښه کړای شو، چی تر ممکنه حده د X د قیمتونو له مخی د Y پیشګویی خطا اصغری وی، نو که چیری داسی فرض کړو چی $\hat{Y}$ پیشګویی شوی قیمتونه (نقاط) موجودوی، نو د واقعی (Y) قیمتونو او $\hat{Y}$ ترمنځ تفا وت ته د پیشګویی خطا ویل کیږی چی هغه په لاندی ډول ښودل کیږی .

$$e = Y - \hat{Y}$$

کله چی له $\hat{Y}$ څخه Y کوچنی وی، نو د پیشګویی خطا منفی ځواب ورکوی، خو د دی برعکس مثبت ځواب راوځی او که دواړه قیمتونه برابر وی، ځواب صفر یعنی خطا هیڅ وجود نه لری،

مثال: د یو زده کوونکی د نمرو پیش بینی د ورکړشویو معلوماتو په اساس .

X	Y	X^2	Y^2	X·Y	$\hat{Y}$	e	$(Y-\hat{Y})^2$
7	19	49	369	133	18.4	0.6	0.36
6	15	36	225	90	16.6	-1.6	2.56
5	17	25	289	850	14.8	2.2	4.84
4	13	16	169	52	13.0	0	0
4	11	16	121	44	13.0	-2.2	4
3	13	9	169	39	11.2	1.8	3.24
2	7	4	49	14	9.4	-2.4	5.76
1	9	1	81	9	7.6	1.4	1.96
=32$\sum X$	=104$\sum Y$	=156$\sum X^2$	=1446$\sum Y^2$	Y=466$\sum X \cdot$	=104$\sum \hat{Y}$	=0$\sum e$	$\sum (Y-\hat{Y})^2 = 22$

دلته یوه مشاهده چی د X نمره یی 4 ده، $Y-\hat{Y}=0$ شوی، چی هیڅ خطا نه بلل کیږی یوه بله مشاهده چی هلته هم $X=4$ خو $Y=11$ دی، د هغی پیشګویی شوی نمره 13 ده په دی ځای کی دلته دارتبا ط ضریب موندلو لپاره فورمول لرو.

$$r=\frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2\sum Y^2}}$$

دوه متحولینوخطي رابطه اومعادله:

ددي له پاره چی یو متحول دبل متحول له مخی پیشګویی کړای شی؛ نوباید د دواړو متحولینو ترمنځ دروابطو په هکله پوره معلومات ولرو یعنی لومړی د یو جمیعت د ټولو غړو په هکله چی د اندازه ګیری په هکله یی کومی پایلی موجودی وی ترکتنی لاندی ونیول شی او وروسته د دی متحول له مخی د بل متحول لپاره یشګویی کیدای شی .د پیشګویی په پروسه کی یوه مهمه فرضیه موجوده ده او هغه باید موږ ترکتنی لاندی ونیسو چی د دوه متحولینو ترمنځ خطی رابطه ده. دا رابطه د یو مستقیم خط معادله ده چې $Y=a+bx$ شکل لری

په دی معادله کې (x) مستقل متحول اوY د (x) متحول تابع دي، a او b ثابت عددونه دي چې a ته عمودی قاطع (Intercept) او b د مستقل متحول ضریب دی، چې ورته د مستقیم خط میلان هم ویلاې شو. چې همدا د دوه متحولینو تر مینځ یوه خطي رابطه بلل کیږي، او ګراف یې د مستقیم خط شکل ځانته غوره کوي.

Equation for a Straight line
$Slope$ $Dependent\ v\ \leftarrow Y=\overset{a}{\downarrow}+\underset{b}{\overset{\uparrow}{}}X^{\rightarrow} independent\ v$ $Intercept$

په دې ډول مونږ د (X) د بدلونونو له مخې Y پیشبیني کولای شو که چیرې (X = 0) شي؛ نو $Y=a$ کیږی، (a) د ګراف په ساحه کې د Y د محور په امتداد قیمتونه اخلي، (b) د رسم شوې مستقیم خط میلان دي چې همدې ته د میلان ضریب وایي. پوهیږو چی د مستقیم خط دترسیم لپاره کاپی ده چی دهغه دوه نقطی وپیژندل شی ،که X ته د x_1 او x_2 قیمتونه ورکړونو Y د y_1 او y_2 قیمتونه اخلی

$$y_1 = a + bx_1$$

$$y_2 = a + bx_2$$

$$y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1)$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

چی b دمستقیم خط میل دی همدا رنګه که $y_1 = a + bx_1$ له $y = a + bx$ څخه تفریق کړونو لرو :

$$y - y_1 = b(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چی میل او یوه نقطه یی ورکړ شوی وی .

مثال:

X	2	3	5	7	9	10
Y	1	3	7	11	15	17

ارقام ورکړشوی دی د دی ارقاموترمنځ خطی رابطه موجوده ده ،د هغی معادله په لاس راوړئ.

$$x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = 3$$

$$y_1 = 1 \quad \wedge \quad y_2 = 3$$

$$y - 1 = \frac{3-1}{3-2}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = 2(X - 2) \Rightarrow = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - y_1$$

$$y = 2X - 3$$

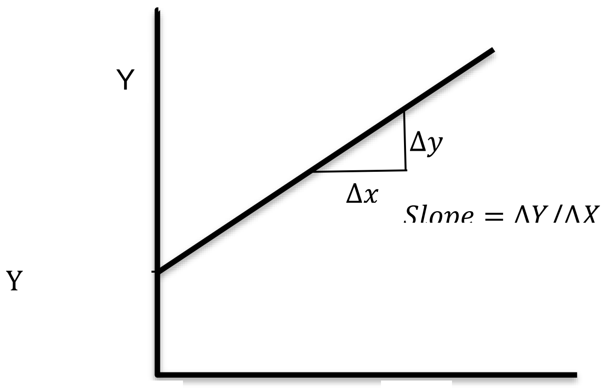
$$y = a + bx \Rightarrow y = -3 + 2x$$

$$a = -3 \quad \wedge \quad b = 2$$

$The\ Slope\ of\ Straight\ line$
$b = \dfrac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$

د خطي ګرافونو د ترسیم لپا ره دوه لارې شتون لري، لومړي دا چې مستقل متحول ته بېلا بېل قېمتونه ورکول کيږي، او له دې لارې د تابع متحول ارزښتونه یا قېمتونه څرګندیږي بله طریقه دا ده چې په وضعیه کمیاتو کې دوه داسې ټکي چې دواړه محورونه (عمودي اوافقي) قطع کړي معلوم او دواړو ټکو تر مینځ مستقیمه کرښه رسمېږی، یعنې د دغه ډول خط په لاس راوړلو لپاره صرف د دوه نقطو د قېمت موجودیت کفا یت کوي، په دې ډول روابطو کې د متحولینو تر مینځ خطي ارتباط

(Linear Correlation) وجود لري.



د میلان ضریب (Regression Co-efficient)
د میلان دوه ضریبونه وجود لري:

1. د میلان ضریب د X په Y (Regression Co-efficient of X on Y)
2. د میلان ضریب د Y په X (Regression Co-efficient of Y on X)

د میلان ضریب bxy او byx باندې ښودل کیږي.

$$.\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \wedge \quad b_{yx} = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\ b_{xy=}r$$

د میلان معادلې (Regression Equations)
یادونه: هغه معا دله چی دمتحولینو ترمنځ ارتباط افاده کوی دتخمین یاسنجش دمعادلی په نامه یادیږی.

$$y = a + bx$$

د y ترټولو ښه تخمین د a او b په ارزښت پوری اړه لری که د y ترټولو ښه تخمین په $\hat{y}$ وښیو.چې، نومعادله یی عبارت ده له $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 2... په پورتنی شکل کی داتخمین ښودل شوی دی ،لازمه ده چی a

او b داسی تعین شی ترڅو د مشاهداتو د انحرافاتو د مربعاتومجموعه اصغری وی یعنی $\sum(y-y_i)^2$ اصغری شی. د دی موخی لپاره که 1 معادله په پام کی ونیسو لومړی لیکلای شو .

$$=\sum(a+bx) \;=\sum a+\sum bx=\sum a+b\sum x\sum y$$

$$=\text{na}+\text{b}\sum x \ldots\ldots 3\sum y$$

اوبیا د 1 معا دلی دواړه خواوی په x کی ضربوو.

$$Xy=x(a+bx)\;\Longrightarrow xy=xa+bx^2$$

$$=\text{a}\sum x+b\sum x^2 \ldots\ldots 4\sum xy$$

ددریمی معادلی څخه دb قیمت په څلورمه معادله کی وضع کوو.

$$b=\frac{\sum y-na}{\sum x}$$

$$=\text{a}\sum x+\frac{\sum y-na}{\sum x}.\sum x^2\sum xy$$

دواړه خواوی په$\sum x$ ضربوو.

$$\sum x.\sum xy=a\left(\sum x\right)^2+\sum y.\sum x^2-na\sum x^2$$

$$\sum x.\sum xy=a\left[\left(\sum x\right)^2-n\sum x^2\right]+\sum y\;.\sum x^2$$

$$a\left[\left(\sum x\right)^2-n\sum x^2\right]=\sum x.\sum xy-\sum y.\sum x^2$$

$$\hat{a}=\frac{\sum y.\sum x^2-\sum x.\sum xy}{n.\sum x^2-(\sum x)^2}$$

اوس که دی دریمی معادلی څخه دa قیمت په څلورمه معادله کی وضع کړو په لاس راځی چی :

$$\text{na}=\sum \text{y}-\text{b}\sum \text{x}$$

$$\text{a}=\frac{\sum\text{y}-\text{b}\sum\text{x}}{\text{n}}$$

$$\sum xy = \frac{\sum x\,(\sum y - b\sum x)}{n} + \mathrm{b}\sum x^2$$

$$\mathrm{n}.\sum xy = \sum \mathrm{x}.\sum y - b\left(\sum x\right)^2 + \mathrm{nb}\sum x^2$$

$$\mathrm{n}.\sum xy = \sum \mathrm{x}.\sum \mathrm{y} - \mathrm{b}[\left(\sum \mathrm{x}\right)^2 - \mathrm{n}\sum \mathrm{x}^2]$$

$$b[\left(\sum x\right)^2 - n\sum x^2] = \sum x\,.\sum y - n\sum xy$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum xy - (\sum x)\,(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

په دی ډول په لاس راغلل: $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

دامعادله دنارمل معا دلی (normal equation) په نامه يادېږی.

مثال:د 8 زده کوونکو د پوهنتون او ليسی د دوری د نمرو لپاره لاندی جدول جوړوو که x_i د ليسی د دوری او y_i د پوهنتون د دوری نمری وي نوليکو چی:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i.y_i$	y_i^2
85	2.3	7225	195.5	5.29
65	1.2	4225	78.0	1.44
73	1.5	5329	109.5	2.25
90	1.9	1800	171.0	3.61
82	1.8	6724	147.6	3.24
80	2.0	6400	160.0	4.00
68	1.3	4624	88.4	1.69
88	2.1	7744	184.8	4.41
$\sum x_i$ =631	$\sum y_i$ =14.1	$\sum x_i^2$=50371	$\sum x_i\, y_i$=1134.8	$\sum y_i^2$=25.93

$$(\sum x_i)^2 = (631)^2 = 398161$$

استاد عبدالاحد ارين

$$(\sum y_i)^2 ==(14.1)^2 = 198.81$$

$$\sum x_i \cdot \sum y_i \; =631 \cdot 14.1=8897.1$$

ددی قيمتونوڅخه په استفاده ليکلای شو:

$$\hat{a} = \frac{\sum y \,.\sum x^2 - \sum x.\sum xy}{n.\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{14.1(50371) - (631)(1134.8)}{8 \cdot (50371) - 398161}$$

$$= \frac{710231.1 - 716058.8}{402968 - 398161} = \frac{-5827.7}{4807} = -1.2 \Longrightarrow \hat{a} = -1.2$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum xy - (\sum x)\,(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{8(1134.8) - 631 \cdot 14.1}{4807} = \frac{9078.4 - 8897.1}{4807} = \frac{181.3}{4807} = 0.037$$

نو نارمل معادله عبارت ده له:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

$$\Longrightarrow \hat{y} = -1.2 + 0.037x$$

$$\hat{y} = -1.2 + 0.037 \cdot 81 = -1.2 + 2.99 \Longrightarrow \hat{y} = 1.79$$

د ميلان معا دلې د ميلان د کربنو الجبري افادې دي، دلته دوه د ميلان معادلې وجود لري

۱. دميلان معادله د X په Y (Regression Co- efficient of X on Y)

۲.دميلان معادله د Y په X (Regression Co - efficient of Y onX)

1. Regression equation of(X) on(Y)

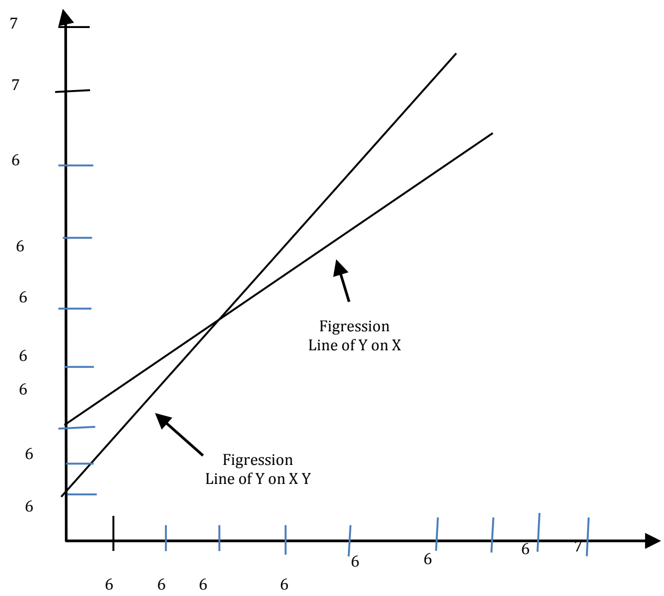
$$(x - \bar{x}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

$$(x - \bar{x}) = b_{xy}(y - \bar{y})$$

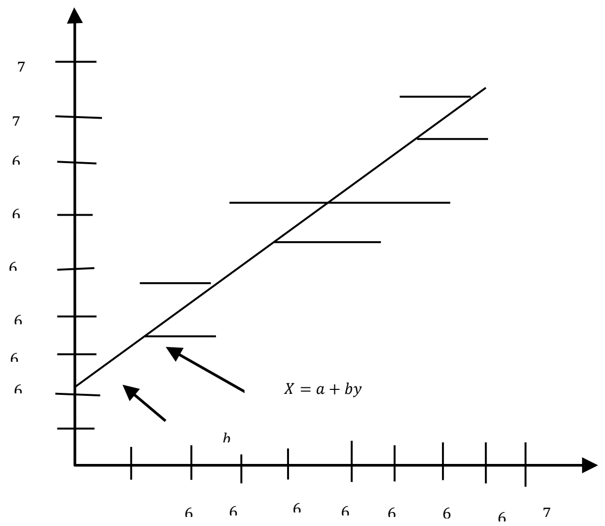
2. Regression equation of (Y) on (X)

$$(y-\bar{y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

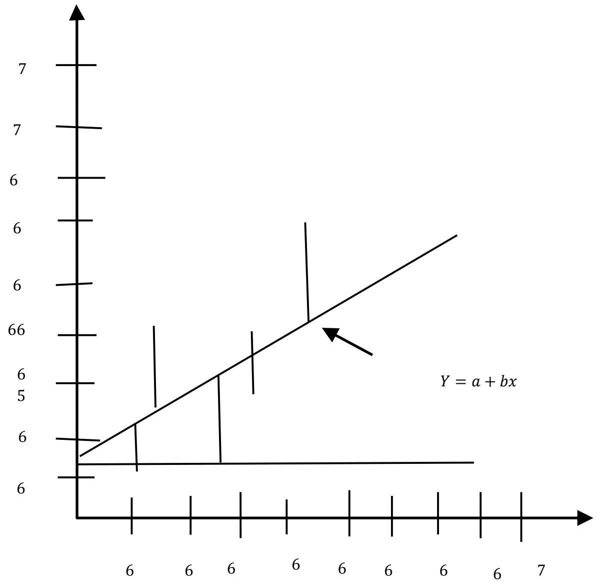
$$(y-\bar{y}) = b_{yx}(x-\bar{x})$$



Hehght of fathers (lnches)
(graph of orlglna dat)



$Heloht\ of(x(y,,,ice)is\ minimum$



Helots of(x(y,,, ice)is minimum

Regression of y on x $\sum(y - yc)^2\ isminlmum$

1. بیلګه: لاندي د عرضي او تقاضا د ارقامو لپاره د پیوستون ضریب، د میلان ضریب او دمیلان معادلي محاسبه کړئ؟

Supply	400	200	700	100	500	300	600

Demand	50	60	20	70	40	30	10

حل:

X	Y	dx	dx^2	Dy	dy^2	Dxdy
400	50	0	0	10	100	0
200	60	-200	40000	20	400	-4000
700	20	300	90000	-20	400	-6000
100	70	-300	90000	30	900	-9000
500	40	100	10000	0	0	0
300	30	-100	10000	-10	100	1000
600	10	200	40000	-30	900	-6000
2800	280	0	280,000	0	2800	-24000

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2800}{7} = 400$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{280}{7} = 40$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{n}}\sqrt{\frac{280000}{7}} = \sqrt{40000} = 200$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dy^2}{n}}\sqrt{\frac{2800}{7}} = \sqrt{400} = 20$$

$$r = \frac{\sum dx.dy}{n.\sigma_x.\sigma_y} = \frac{-24000}{7\times 200\times 20} = \frac{-24000}{28000} = -0.857$$

Regression coefficient of X on Y

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0.857\frac{200}{20} = -8.57$$

Regression coefficient of Y on X

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -0.857\frac{20}{200} = -0.0857$$

Regression Equation of X onY

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}(Y - \overline{Y}) \Rightarrow (X - 400) = -8.57(Y - 40)$$

$$X - 400 = -8.57Y + 342.8$$

$$X = -8.57Y + 724.8 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X

$$(Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X}) \Rightarrow (Y - 40) = -0.0857(X - 400)$$

$$Y - 40 = -0.0857X + 34.28$$

$$Y = 74.28 - 0.0857X \quad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

2. بیلګه: د خاوند او ښځې د عمرونو تر منځ د پیوستون ضریب 0.80 دی، د خاوند اوسط عمر 25 کاله او د ښځې اوسط عمر 22 کاله و، دلته معیاري انحرافونه 4 او 5 کلونه وو نو:

a. د میلان معادلې یې تشکیل کړئ
b. د خاوند عمر په هغه صورت کې پیدا کړئ چې ښځه 18 کاله عمر ولري
c. د ښځې عمر پیدا کړئ په هغه صورت کې چې خاوند یې 29 کاله عمر ولري

$$r = 0.8\,,\ \ \bar{x} = 25\ \ ,\overline{Y} = 22\ \ ,\ \ \delta_x = 4\ \ ,\delta_y = 5$$

Regression Equation of X onY

$$(X - \overline{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y}) \Rightarrow (X - 25) = 0.8\frac{4}{5}(Y - 22)$$

$$X - 25 = 0.64Y - 14.08 \Rightarrow X = 0.64 - 14.08 + 25$$

$$X = 0.64Y + 10.92 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X

$$(Y-\bar{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\bar{X}) \Rightarrow (Y-22) = 0.8\frac{5}{4}(X-25)$$

$$Y-22 = 1(X-25) \Rightarrow y-22 = X-25$$

$$Y = X-3 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

Age of husband when wife age is 18

$$X = 0.64Y + 10.92 = 0.64(18) + 10.92$$

$$\Rightarrow 11.52 + 10.92 = 22.44$$

Age of wife when husband age is 29

$$Y = X-3 \Rightarrow 29-3 = 26$$

3. بیلګه: که چېري ارقام په لاندي ډول درکړل شوي وي، د میلان معادلي د x په y او د y په x پیدا کړئ.

$$r = 0.97\,, \quad \bar{x} = 66\,, \bar{Y} = 133\,, \quad \sigma_x = 3.32\,, \sigma_y = 14.2$$

Regression Equation of X onY(I)

$$(X-\bar{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\bar{Y}) \Rightarrow (X-66) = 0.97\frac{3.32}{14.2}(Y-133)$$

$$X-66 = 0.2267(Y-133) \Rightarrow X-66 = 0.2267Y - 30.16$$

$$X = 0.2267Y + 35.84 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X(II)

$$(Y-\bar{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\bar{X}) \Rightarrow (Y-133) = 0.97\frac{14.2}{3.32}(X-66)$$

$$Y-133 = 4.149X - 273.834 \Rightarrow y = 4.149X - 273.83 + 133$$

$$Y = 4.149X - 140.834 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

4. بیلګه: د یوي جوړونکي تصدي د یو شخصي ریکارډ څخه لاندي ارقام محاسبه شوي و:

$$\sum n = 25\,, \sum X^2 = 305460\,, \sum Y^2 = 925085\,, \sum XY = 524860$$

$$, \sum X = 2645\,, \qquad \sum Y = 4620$$

محاسبه کړئ؟

a. معياري انحراف او د پیوستون ضريب
b. د ميلان معادله پيدا کړئ، چې Y څخه تخمين شوي وي کله چې $X = 8$ وي.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{305460}{25} - \left(\frac{2645}{25}\right)^2} = \sqrt{12218.4 - 11193.64}$$

$$= \sqrt{1024.76} = 32.01$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \left(\frac{\sum y}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{925085}{25} - \left(\frac{4620}{25}\right)^2} = \sqrt{37003.4 - 34151.04}$$

$$= \sqrt{2852.36} = 53.41$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)\left(\frac{\sum y}{n}\right)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\frac{524860}{25} - \left(\frac{2645}{25}\right)\left(\frac{4620}{25}\right)}{30.01 \times 53.41}$$

$$= \frac{20994.6 - 19551.84}{1709.654} = \frac{1442.76}{1709.654} = 0.84$$

Regression Equation of X onY

$$(X - \overline{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y}) \Rightarrow (X - 105,8) = 0.84\,\frac{32.01}{53.41}(Y - 184.8)$$

$$X - 105.8 = 0.84Y - 93.08 \Rightarrow X = 0.84Y + 12.08$$

$$X = 0.84Y + 12.08 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

X=0.84(46.90)+12.08

X=23.5

Regression Equation of Y on X

$$(Y - \overline{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X})$$

$$\overline{X} = 105.8 \qquad \overline{Y} = 184.8$$

$$(Y - 184.8) = 0.84\,\frac{53.41}{32.01}(X - 105.8)$$

$$Y - 184.8 = 1.41(X - 105.8) \Rightarrow Y = 35.622 + 1.41X$$

The value of (Y) when (X=23.5)

Y=35.622+1.41(23.5)=68.90

5. بیلګه: که چیري د 200 پلارونو اوسط لوړوالی د 2.5inches معیاري انحراف سره 67.5 inches وي، او د دوي د زامنو اوسط لوړوالي 2.6inches د معیاري انحراف سره 68.2inches وي او د دوي تر منځ د پیوستون ضریب 0.65inches وي د میلان خط معادله یې حاصله کړئ؟

Here $r = 0.65\ ,\ \bar{x} = 67.5\ ,\bar{Y} = 68.2\ ,\ \sigma_x = 2.5\ ,\sigma_y = 2.6$

Regression Equation of X onY(I)

$$(X - \bar{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 67.5) = 0.65\frac{2.5}{2.6}(Y - 68.2)$$

$$X - 67.5 = 0.625(Y - 68.5) \Rightarrow X - 67.5 = 0.625Y - 42.625$$

$$X = 0.625Y - 42.625 + 67.5$$

$$X = 0.625Y + 24.875 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X(II)

$$(Y - \bar{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \bar{X}) \Rightarrow (Y - 68.2) = 0.65\frac{2}{2.5}(X - 65.5)$$

$$Y - 68.2 = 0.676(X - 67.5) \Rightarrow y - 68.2 = 0.676X - 45.6$$

$$Y = 0.676X - 45.63 + 68.2$$

$$Y = 0.676X + 22.57 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

د تشخیص ضریب (co-efficient of Determination)

مخکي له دي چي د تشخیص ضریب باندي بحث وکړو نو لومړی باید مجموعي انحراف و پيژنو:

مجموعي انحراف (Total variation)

مجموعي انحراف د Y او $\bar{Y}$ تر منځ د انحراف د مربعاتو د مجموعي څخه عبارت دي.

$$\text{Total variation} = \sum(Y - \bar{Y})^2$$

مجموعي انحراف په دوه برخو ویشل کیږي، یو یې تشریح شوي انحراف (Explained variation) او بل یې نا تشریح شوي انحراف (Unexplained variation) دی.

تشریح شوي انحراف (Explained variation)
تشریح شوی انحراف د پیشبني شوي $\hat{Y}$ او حسابي اوسط $\bar{Y}$ د انحراف د مربعاتو له مجموعي څخه عبارت دی.

$$Explained\ variation\ = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2$$

نا تشریح شوي انحراف (Unexplained variation):
نا تشریح شوي انحراف د ور کړ شویو قیمتونو Y د او پیشبیني شوي $\hat{Y}$ د انحراف د مربعاتو له محموعي څخه عبارت دی.

$$Unexplained\ variation\ = \sum(Y - \hat{Y})^2$$

نو مجموعي انحراف د تشریح شوي او نا تشریح شوي انحرافاتو له مجموعي څخه عبارت دی.

Total variation = Explained variation+ Unexplained variation

$$\sum(\mathrm{Y} - \bar{\mathrm{Y}})^2 = \sum(\hat{\mathrm{Y}} - \bar{\mathrm{Y}})^2 + \sum(\mathrm{Y} - \hat{\mathrm{Y}})^2$$

مخکي ذکر شو چې د پیوستون ضریب د دوه متحولینو تر منځ د رابطي یو مقیاس څخه عبارت دی او په (r)

توري ښودل کیږي د لاندي فورمول په اساس یې پیدا کولای شو.

$$r=\pm\sqrt{\frac{\sum(\hat{\mathrm{Y}}-\bar{\mathrm{Y}})^2}{\sum(\mathrm{Y}-\bar{\mathrm{Y}})^2}}$$

دا د تابع متحول د انحراف لپاره یو مقیاس دی کوم چې د میلان د کرښي او د تابع متحول په واسطه تشریح شوي دي یا د تشخیص ضریب د پیوستون ضریب مربع ته ویل کیږي او په $(r)^2$ سمبول سره ښودل کیږي.

$$\mathrm{r}^2 = \frac{\text{Explained variation}}{\text{Total variation}} = \frac{\sum(\hat{\mathrm{Y}} - \bar{\mathrm{Y}})^2}{\sum(\mathrm{Y} - \bar{\mathrm{Y}})^2}$$

د تشخیص د ضریب متبادل شکل د محاسبي لپاره په لاندي ډول دي.

$$\mathrm{r}^2 = \frac{\mathrm{a}.\sum \mathrm{Y} + \mathrm{b}\sum \mathrm{XY} - \frac{(\sum \mathrm{Y})^2}{\mathrm{n}}}{\sum \mathrm{Y}^2 - \frac{(\sum \mathrm{Y})^2}{\mathrm{n}}}$$

تشخیص ضریب(co-efficient of Determination) بیا عبارت دی له $(1.00 - \mathrm{r}^2)$ څخه

$$\Rightarrow 1 - r^2 = 1 - \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2}$$

1. بیلګه: لاندي فرضي د میلان موډل په نظر کي و نیسی.

X	1	2	3	4	5
Y	10	8	12	16	20

د میلان د کرښي معادله عبارت ده له $\hat{Y} = 4.8 + 2.8X$

لومړی مرحله: پیشبني شوي ارزښتونه $\hat{Y}$ پیدا کوو.

For/ $x=1 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(1) = 7.6$

For/ $x=2 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(2) = 10.4$

For/ $x=3 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(3) = 13.2$

For/ $x=4 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(4) = 16.0$

For/ $x=5 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(5) = 18.8$

نو ارزښتونه په دي بیلګه کي په لاندي ډول دي.

X	Y	$\hat{Y}$
1	10	7.6
2	8	10.4
3	12	13.2
4	16	16.0
5	20	18.8

دوهمه مرحله: د Y د ارزښتونو اوسط پیدا کوو.

$$\hat{Y} = \frac{10 + 8 + 12 + 16 + 20}{5} = 13.2$$

دریمه مرحله: مجموعي انحراف $\sum(Y - \bar{Y})^2$ پیدا کوو.

$$(10-13.2)^2 = 10.24$$

$$(8-13.2)^2 = 27.04$$

$$(12-13.2)^2 = 1.44$$

$$(16-13.2)^2 = 7.84$$

$$(20-13.2)^2 = 46.24$$

$$\sum(\mathrm{Y}-\overline{\mathrm{Y}})^2 = 92.8$$

خلورمه مرحله: تشریح شوی انحراف $\sum(\widehat{\mathrm{Y}}-\overline{\mathrm{Y}})^2$ پیدا کوو.

$$(7.6-13.2)^2 = 31.36$$

$$(10.4-13.2)^2 = 7.84$$

$$(13.2-13.2)^2 = 0.00$$

$$(16.0-13.2)^2 = 7.84$$

$$(18.8-13.2)^2 = 31.36$$

$$\sum(\widehat{\mathrm{Y}}-\overline{\mathrm{Y}})^2 = 78.4$$

پینځمه مرحله: نا تشریح شوي انحراف $\sum(\mathrm{Y}-\widehat{\mathrm{Y}})^2$ پیدا کوو.

$$(10-7.6)^2 = 5.76$$

$$(8-10.4)^2 = 5.76$$

$$(12-13.2)^2 = 1.44$$

$$(16-16)^2 = 0.00$$

$$(20-18.8)^2 = 1.44$$

$$\sum(Y-\hat{Y})^2 = 14.4$$

Total variation = Explained variation+ Unexplained variation=

=92.5=78.4+14.4

$$r^2 = \frac{78.4}{92.8} = 0.845$$

د تشخیص ضریب معمولاً د فیصدی په وسیله تشریح کیږي؛ نو په دي وجه r^2=84.5% څخه عبارت دی، بله لاره دا ده چي د پیوستون ضریب مربع کړو.

$$\mathrm{r} = 0.919 \Rightarrow \mathrm{r}^2 = (0{,}919)^2 = 0.845$$

نا تشخیص شوی ضریب (co-efficient of Non Determination) عبارت دی له.

$$1.00 - \mathrm{r}^2 = 1 - 0.845 = 0.155 \vee 15.5\%$$

دوهمه طریقه: د پورتني فورمول په عوض یو بل فورمول څخه هم استفاده کولای شو.

X.Y	Y^2	Y	X
10	100	10	1
16	64	8	2
36	144	12	3
64	196	16	4
100	400	20	5
$\sum XY = 226$	$\sum Y^2 = 964$	$\sum Y = 66$	$\sum x = 15$

$$\mathrm{r}^2 = \frac{a.\sum Y + b\sum XY - \frac{(\sum Y)^2}{n}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}} = \frac{4.8(66) + 2.8(226) - \frac{(66)^2}{5}}{964 - \frac{(66)^2}{5}}$$

$$= \frac{316.8 + 632.8 - 871.2}{964 - 871.2} = \frac{78.4}{92.8} \Rightarrow \mathrm{r}^2 = 84.5\%$$

دریمه طریقه: تر ټولو لومړی د پیوستون ضریب (r) محاسبه کوو اړ بیا د پیوستون ضریب مربع (r^2) کوو چي په دي ډول د تشخیص ضریب حاصلیږي.

X	Y	X^2	Y^2	X.Y
1	10	1	100	10
2	8	4	64	16
3	12	9	144	36
4	16	16	196	64
5	20	25	400	100
$\sum x = 15$	$\sum Y = 66$	$\sum X^2 = 964$	$\sum Y^2 = 964$	$\sum XY = 226$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2} = \sqrt{\frac{55}{5} - (\frac{15}{5})^2} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\frac{\sum y}{n})^2} = \sqrt{\frac{964}{5} - (\frac{66}{5})^2} = \sqrt{192.8 - 174.24} = \sqrt{18.56}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)\left(\frac{\sum y}{n}\right)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\frac{226}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)\left(\frac{66}{5}\right)}{\sqrt{2} \times \sqrt{18.56}}$$

$$= \frac{45.2 - 39.6}{\sqrt{37.12}} = \frac{5.6}{6.09} = 0.919$$

$$r = 0.919 \Rightarrow r^2 = (0.919)^2 = 0.845 \vee 84.5\%$$

د تخمین معیاري خطا (Standard Error of the Estimate)

د تخمین معیاري خطا په (S_{est}) سره ښودل کیږي، د Y د ارزښتونو او پیشبینی شویو ارزښتونو ($\hat{Y}$) تر منځ معیاري انحراف دی د تخمین د معیاري خطا لپاره فورمول په لاندي ډول دي.

Standard Error of the Estimate

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2}{n - 2}}$$

څرنګه چې د فرمول څخه معلومیږي چې د تخمین معیاري خطا د معیاري انحراف سره مشابه ده، بلکي دلته اوسط استعمال شوي نه دی.

بیلګه: یو څېړونکی لاندي ډېټا را ټوله کړي ده، چې په دی ډېټا کې د کاپي ماشین د عمر او د دي د مراقبت د مصارفو څرګنده رابطه ده، د میلان معادله عبارت $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$ نو د تخمين معياري خطا پیدا کړئ؟

Machine	Age x(years)	Monthly cost Y
A	1	62
B	2	78
C	3	70
D	4	90
E	4	93
F	6	103

لومړی مرحله: په لاندي ډول یو جدول جوړ کړئ.

Age x(years)	Monthly cost Y	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$
1	62			
2	78			
3	70			
4	90			
4	93			
6	103			

دو همه مرحله: د میلان د کرښي معادله $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$ استعمال کړئ او پیشبیني شوي ارزښت $(\hat{Y})$ د هر (X) لپاره محاسبه کړئ او نتیجه یې د $(\hat{Y})$ په کالم کې ولیکئ.

For/ $x=1 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(1) = 63.70$

For/ $x=2 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(2) = 71.83$

For/ $x=3 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(3) = 79.96$

For/ $x=4 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(4) = 88.09$

For/ x=6⇒ $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(6) = 104.35$

دریمه مرحله: د هر Y نه $(\hat{Y})$ تفریق کړې او $(Y - \hat{Y})$ پر کالم کې ځای پر ځای کړئ.

$$62 - 63.70 = -1.70$$

$$78 - 71.83 = 6.17$$

$$70 - 79.96 = -9.96$$

$$90 - 88.09 = 1.91$$

$$93 - 88.09 = 4.91$$

$$103 - 104.35 = -1.35$$

څلورمه مرحله: د دریمي مرحلې کې د لاس ته راغلو ارقامو $(Y - \hat{Y})$ مربع اخلو او بیا د $(Y - \hat{Y})^2$ کې لیکوو.

پینځمه مرحله: اوس د اخري کالم مجموعه پیدا کړئ او مکمل جدول په لاندې ډول و لیکې.

Age x(years)	Monthly cost Y	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$
1	62	63.70	−1.70	2.89
2	78	71.83	6.17	38.0689
3	70	79.96	−9.96	99.2016
4	90	88.09	1.91	3.6481
4	93	88.09	4.91	24.1081
6	103	104.35	−1.35	1.8225

شپږمه مرحله: اوس د تخمین معیاري انحراف په لاندې ډول پیدا کوو.

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum(Y - \hat{Y})^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{169.7392}{6 - 2}} = 6.51$$

د تخمین معیاري خطا د یو بل فورمول په واسطه هم پیدا کولای شو چې په لاندې ډول دی.

Short- cut Method for finding Standard Error of the Estimate

استاد عبدالاحد ارین

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a\sum Y - b\sum XY}{n-2}}$$

حل:

لومړی مرحله: یو جدول جوړوو

دوهمه مرحله: د X او Y ارزښتونه حاصل ضرب پیدا کوو او نتیجه په دریم کالم کې لیکو.

دریمه مرحله: د Y د ارزښتونو مربع پیدا کوو او نتیجه یې په څلورم کالم کې لیکو.

څلورمه مرحله: اوس د دوهم، دریم او څلورم کالمونو مجموعه پیدا کوو او یو مکمل جدول جوړوو.

X	Y	X.Y	Y^2
1	62	62	3844
2	78	156	6084
3	70	210	4900
4	90	360	8100
4	93	372	8649
6	103	618	10609
	$\sum Y = 496$	$\sum X.Y = 1778$	$\sum Y^2 = 42186$

پینځمه مرحله: د رګریشن د معادلې $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$ څخه a=55.57 او b=8.13 دی

شپږمه مرحله: اوس د تخمین معیاري خطا محاسبه کوو.

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a\sum Y - b\sum XY}{n-2}}$$

$$S_{est} = \sqrt{\frac{42186 - (55.57)(496) - (8.13)(1778)}{6-2}} = 6.48$$

ماخذونه

1. راسخ،ضیاالرحمن (1396) د احصائي بنسټونه، مومند خپرندویه ټولنه.
2. **اصیل، مرادعلي (1395) مبادي تیوریهای عمومي احصائیه و تطبیق آنها در اقتصاد انتشارات سعید تهران**
3. **دودیال، محمدبشیر (1390) احصائیه،ننګرهارپوهنتون، ګودر خپرندویه ټولنه.**
4. **نوري، نورالله** (1392) د احصائي اساسات، مومند خپرندویه ټولنه.
5. **ژیل ګرینون و سوزن ویو ترجمه حمزه ګنجی و مهدي ګنجی (1384) تهران،سوالان**
6. **غلام،سنایي (1390) احصائیه کابل انتشارات سعید**
7. **حمیدي،عبدالباقي (1391) احصائیه عالي، کابل انتشارات سعید**
8. Chaudhry.Sher M.(2010): Introduction to Statistcal Theory Part(I)

ILMI Kitabkhana, Lahor-pakistak

9. Chaudhry.Sher M.(2010): Introduction to Statistcal Theory Part(II)

ILMI Kitabkhana, Lahor-pakistak