

بسم الله الرحمن الرحيم

لومړی څپرکی

## د احصائیی اساسی مفاهیم اود دفعاتو توزیع

احصائیه څشی ده؟

ایا احصائیه د اعدادو جمع کول دي؟ ایا احصائیه د شکلونو رسم او لایه ده؟ ایا د وزگار تیا اوسط یا سلنی محاسبه او یا د نورو شاخصونو محاسبه ده، ایا احصائیه د ټولنی یا طبیعت ځانگړو عددي مقدارونو محاسبه ده؟  
هو! دا ټول سم دي، خو احصائیه د یو علم په توگه معلوماتو ته د مفهوم ورکولو مطالعه او څیړنه ده. د ټولنی د بیلابیلو برخو کسان معلوماتو ته اړتیا لري.  
د بیلگې په توگه مړینه، د کرنې حاصلاتو کچه، روغتیایي پیښې، ترافیکی پیښې او داسې نور... مور دلتا احصائیه موخي ته د رسېدو لپاره کاروڅو معلوماتو ته مفهوم ورکړو او و یې ارزو

### 1.1 د احصائیی تعریف او مفهوم:

احصائیه یوه عربی کلمه ده، چې دشمیرلو په معناده په انګلیسی کی (statistics) بلل کیږی چی دلالتی لغات status څخه اخستل شویدی چی د دولت لپاره د ضرورت وړ او ټولنی لازمه ارقامو او معلوماتو په معناده بن ورځ هم په انګلیسی ژبه کی state دولت ته ویل کیږی د احصائیی لپاره علماو بیلابیل تعرفونه کړیدی په ساده او معمولی مفهوم سره احصائیه د ارقامو او شمیرلو هری هغی مجموعی ته ویل کیږی چی د چاپیریال یادانسانانو ټولنیزو، اقتصادی، سیاسی اونورو فعالیتونو او بنکارندو په اړه وی. د چاپیریال په برخه کی د اوربنت، نودونو، نوری، د نباتاتو، د انسانانو، د بیولوژی، د اوسنیزو، د ټیټونوپه برخه کی د وزگارو او په کاربوحتو وگړو شمیر، د سواد سننه، د بارو عیو کچه، واردات، صادرات، او داسی نوری بیلگی ذکر کولای شو.

(Kendall) او (Yule) وایی: د ډیرو اړتیاو د ټاکلو لپاره په ټاکلو حدودو کی دکمی ارقامو څیړنی ته احصائیه وایی.

که پورته تعریف ته نظر وکړو:

احصائیه په لومړی گام کی اطلاعات (ارقام)، معلومات او مشاهدات راټولوی همدغه ارقام (Data) خام مواد دی، چی بیا تنظیمیږی او په لنډیز سره ارائیه او په واضح ډول سره تشریح کیږی، دهغوی تعبیر او تفسیر اسانه کیږی

په دویم گام کی احصائیه د څیړونکی سره مرسته کوی چی دخپلو څیړنو پایلو ته پراخوالی ورکړی

### 1.2

### د احصائې لنډه تاريخچه:

احصائيه دانسانې ټولنې د لومړي دولت په اندازه لرغونتوب لري کله چې مصر، بابل، کي لومړني دولتونه په ابدائيه بڼه جوړ شول، دا وخت دملاذ څخه (۳۰۵۰) کاله مخکي چې دوي پخپلو قلمرونو کي د دولتي چارو د ضرورت له مخي دنفوسو او نورو منابعو په هکله شميرني کولي په چين کي (۲۰۰۰) کاله مخکي تر ملاذ سر شميرنه شوي په (۱۰۱۷) م کال کي د اوسني فلسطين د نفوس شميرنه شویده په انگليستان کي (۱۳۷۱- ۱۳۱۲) م کال کي ماليه ثبت او د مالي ورکونکو شمير ثبت شويدي په همدې سلسله احصائيه دخلکو د توجه وړ وگرځيده

### 1.3 د احصائې د پلي کولو (تطبيق) ساحه

له احصائې څخه د علومو ديوي څانگي او د ځانگړو ميتودونو او روشنو ديوي ساحي په توگه په لاندې برخو کي گټه اخستل کيږي

- 1- دکرنيزو محصولاتو د توليد او ويشلو په برخه کي
- 2- دنفوس وکړو او کورنيو دځانگړتياو په برخه کي
- 3- د مهاجرتونو مسافرتونو او دهغوي داروند حالاتو په برخه کي
- 4- داقتصادي، ټولنيزو، فزيکي، ودانولو دبنسټونو او دهغي دساتني اوڅارني په برخه کي
- 5- دسياست، ټاکنو، او دانساني حقونو په برخه کي
- 6- دترانسورت او مالياتو درا ټولولو په برخه کي
- 7- دعلمي تحقيقاتو او مطالعاتو سروی دعلومو دبيلابيلو څانگو په برخه کي
- 8- دسوداگري، مارکيټ، دکار ساحي او د عوايدو، لگښتونو دسطحي په برخه کي
- 9- دبنووني اوروزني، په ملکي اونظامي خدمتونو کي دنفوسو دجلب په برخه کي

### 1.4 د احصائې تقسيم بندي

احصايه د ارقامو د توضيح او تشریح له مخي په دوه برخو ويشل کيږي .

1: **تشریحي احصايه (Descriptive statistics)** : دا احصايه دټولو هاغو روشونو او اوصافو څخه عبارت

ده چې د يو جمعيت او يا يوي نموني د اوصافو اومشخصاتو په تشریح او توضیح کي په کار وړل کيږي لکه داوسط،مياني، مود، او معياري انحراف چې داحصائې په همدې برخه کي تشریح کيږي.

۲- **استنباطي احصايه Inferential statistics**: استنباطي احصايه د هاغو روشونو څخه عبارت ده چې د

هغي له لاري د يوي نموني د مربوطه مشخصاتو له مخي د يو جمعيت مشخصات استنباط کيږي.

او یا په بل عبارت استنباطي احصایه هغه احصایي ته وايي چې د جز په تشریح کولو د کل سره سر او کار لري يعني محقق د نموني اوصاف سره سر او کار لري او د مشخصو روشنو په واسطه د نموني مشخصاتو له مخي د جمعیت د مشخصاتو په اړوند خپل حکم صادروي .

### 1.5 جمعیت (population):

یو سټ چې ټول عناصر یې یو یاڅو مشترک خاصیتونه ولری او په یو مشخص وخت او مناسب موقعیت کی قرار ولری جمعیت بلل کیږی یا جمعیت ټولو هغو ارقامو ته ویل کیږی چې دمطالعی او څیړنی لاندی وی او د مطالعی لپاره را ټول شوی وی په دی کی د بوټو ، څارویو ، حشراتو، دحرارت درجه، او نور ټول ارقام راخی

احصائیوی جمعیت دوه ډوله دی : محدود نفوس ( finite population ) د بیلگی په توگه : د هلمند دنوزاد د انارو حاصلات ، د هلمند دناوی ولسوالی دپمبی حاصلات او بل یی بی نهایت نفوس (Infinite population) د بیلگی په توگه د ټوله نړی د انارو حاصلات یا د ټولی نړی دانارو د پخیدو د وخت سنجنس ، په هغو کی د گټورو موادو مقدار او نور مثالونه .

### 1.6 نمونه او نمونه اخستل (sample and sampling):

په ځینو مواردو کی دیو جمعیت یا ټولنی داعضاوو مطالعه ستونزمنه وی ، پر مصرفه او په عمل کی ستونزمن کار دی ، دمثال په توگه دافغانستان د 9 کلنو ماشومانو د استعداد ضریب (IQ) معلومول ستونزمن کار دی نو داحصائی پوهان د ټول جمعیت د مطالعی لپاره نومری جمعیت په څو گروپونو ویشی چې دیوی برخی انتخاب دجمعیت څخه دنمونی (sample) په نوم یادیری او دغی پروسی ته عملی ته نمونه اخستل (sampling) وایی په احصائی کی دجمعیت خصوصیاتو ته پارامتر (parameter) او نمونی خصوصیاتو ته تخمین یا برآورد (Estimates) وایی که په احصائی کی د 100 محصلینو دقد لور والی اندازه کړو او دهغوی اوسط قد په لاس راوړو نو لاس ته راغلی مقدار ته تخمین د ټولو محصلینو وایی.

نمونه اخستل له عناصرو څخه د نموني اخیستلو لپاره، یوازی یوه برخه یې د نموني په توگه مشاهده او اندازه کوو او د نموني پایله له عناصرو سره پرتله کوو ، هر هڅیږنه او ارزونه کی د سمې نموني غوراوی یوه مهمه موضوع ده.

له دی امله د احصائی مهم بحثونه د احصائی نموني اخیستنی نظریاتو او میتودونو ته ځانگړي شوي دي.

نمونه اخیستل په دوو ډلو وېشل کیږي

۱- ساده نمونه اخیستنه

۲- تصادفي نمونه اخیستنه

۱- ساده نموني اخیستنه کی د احصائی په لیتوالتیا او سلیقه شامل دی.

۲- تصادفي نمونه اخیستنه کی د احصائی په لیتوالتیا او سلیقه شامل نه دي.

کيدای شي چې ټول عناصر د نمونې اخيستنې مساوي چانس ولري او د احصائي علم کي تر ډېره له تصادفي نمونه اخيستنې څخه استفاده کيږي.

يعني د دې ډلې ټول عناصر د نمونې اخيستنې عنصر په توگه مساوي چانس لري او د احصائي علم کي تر ډېره بريده تصادفي نمونه اخيسته کارول کيږي.

د بېلگې په توگه که د يو پوهنتون ۰ ۵ زده کړيلان د ونې/قد ټاکلو لپاره د نمونې په توگه غوره کړو او د هغوی د ونې لوړوالی پيدا کړو په دې صورت کي له اټکل څخه تر لاسه شوي معلومات د ټولو زده کړيلانو د قد اوسط بڼيږي.

### 1.7 متحول (Variable)

1. تعريف : هر عنصر چې داندازه گيری وړ وی د متحول په نوم يادېږی
2. تعريف: دمتحول اندازه گيری ته تحول وايی
3. تعريف : که چيری متحولونه يوازی تام قيمتونه واخلی ، نو دغير متمادی متحول په نوم يادېږی لکه : ديوی بنس وځی د استادانوشمير
4. تعريف: که چيری يو متحول د دوو معينو حدونو تر منځ قيمتونه واخلی د متمادی متحول په نوم يادېږی ، لکه دقد جگوال ، وزن ، استعداد.....

### 1.8 خام مواد يا خام اطلاعات (Raw Data)

د دعدادو جمع کول او نمايش دی ، دڅيړنی او سنجس لپاره نوموړی مواد دپوهيدو وړ نه دی يا په بل عبارت دهغه ابتدايه معلوماتو او ارقامو را ټول دی چی په عددی ډول نه وی ترتيب شوی يعنی:

❖ تحليل او تجزيه نه وی

❖ گنگ وی

❖ دپوهيدو وړ نه وی

❖ خشک يا خام ارقام وی

### 1.9 مجموعه (Summation)

په احصائيه کی اکثره وخت د مجموعی څخه استفاده کوو دبيلگی په توگه : که د  $x$  يو متحول ولرو او هغه ته  $x_1, x_2, \dots, x_n$  قيمتونه ورکړو نو په لنډ ډول يی په  $x_i$  سره بڼيو چی  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  چی دی او مجموعه يی په لاندی ډول سره بڼيو

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \dots + x_n$$

۱ - قضیه: دوه یاڅو متحولنو مجموعه د هر متحول دجلا مجموعی څخه عبارت ده

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i$$

ثبوت:

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + \cdots + (x_n + y_n + z_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) + (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i$$

$$\sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i$$

ثبوت:

$$\sum_{i=1}^n cx_i = cx_1 + cx_2 + \dots + cx_n = c(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = c \sum_{i=1}^n x_i$$

لومړی مثال :- که  $x_3 = 6$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_1 = 2$  وي؛ نو:  $\sum_{i=1}^3 x_i$  محاسبه کړئ؟

حل:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 4 + 6 = 12$$

دويم مثال: که  $x_3 = 7$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_1 = 3$  وي لاندې مجموعې پيدا کړئ؟

$$1: \sum_{i=1}^3 x_i \quad 2: \sum_{i=1}^3 2x_i^2 \quad 3: \sum_{i=1}^3 (x_i - i)$$

حل:

$$1: \sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 3 + 5 + 7 = 15$$

$$2: \sum_{i=1}^3 2x_i^2 = 2 \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2(3^2 + 5^2 + 7^2) = 166$$

$$3: \sum_{i=1}^3 (x_i - i) = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) \\ = (3 - 1) + (5 - 2) + (7 - 3) = 2 + 3 + 4 = 9$$

۳-مثال: د جمع د حاصل په شکل یی ولیکی

$$a) \sum_{i=1}^3 (4y_i + 1) \qquad b) \sum_{i=1}^3 2x_i^2$$

$$a) \sum_{i=1}^3 (4y_i + 1) = (4y_1 + 1) + (4y_2 + 1) + (4y_3 + 1) \qquad \text{حل :}$$

$$b) \sum_{i=1}^3 2x_i^2 = (2x_1^2) + (2x_2^2) + (2x_3^2)$$

که  $x_i = 2, 4, 5$  او  $y_i = 1, 3, 4$  یو نو په دی صورت کی لرو چی:

$$\sum_{i=1}^3 (4y_i + 1) = (4 \cdot 1 + 1) + (4 \cdot 3 + 1) + (4 \cdot 4 + 1) = 35$$

$$\sum_{i=1}^3 2x_i^2 = (2 \cdot 2^2) + (2 \cdot 4^2) + (2 \cdot 5^2) = 90$$

$$\sum_{i=1}^n a = na \qquad \text{دیو ثابت عدد } a \text{ مجموعه دهغه } n \text{ برابره کیږی یعنی :}$$

$$\sum_{i=1}^n a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \Rightarrow \sum_{i=1}^n a = na \qquad \text{ثبوت :}$$

$$\sum_{i=1}^3 4 = 3 \cdot 4 = 12 \qquad \text{مثال 4 :}$$

$$\sum_{i=3}^6 3 = (6 - 2)3 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b) = a \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n b = a \sum_{i=1}^n x_i +$$

مثال 6: د 2,5,6,7,11,15,20,22,23 عددونو په سټ کې د 3 اولو عددونو لپاره لاندې مجموعې پیدا کړو

$$\left(\sum_{i=1}^3 x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (2 + 5 + 6)^2 = 13^2 = 169$$

$$\sum_{i=1}^3 (x_i)^2 = 2^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 25 + 36 = 65$$

دپورته مثال څخه نتیجه کېږي چې:  $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 \neq \sum_{i=1}^n (x_i)^2$

د حاصل ضرب لپاره علامه:  $p(1).p(2).p(3) \dots \dots p(n)$  لپاره لرو چې

$$\prod_{k=1}^n p(k) = p(1).p(2) \dots p(n), \quad \prod_{k=1}^n k = 1.2.3 \dots n = n!$$

مثالونه:

$$\prod_{k=1}^n a = a.a.a \dots .a = a^n, \quad \prod_{k=1}^5 k = 1.2.3.4.5 = 5!, \quad \prod_{k=1}^3 3 = 3^3 = 27$$

پیدا باید ولرو چې:  $\sum_{i=1}^n x_i y_i \neq \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i$  مثال دی لوستونکی کار کړي

پوښتنې: که  $x_1 = 2, x_2 = 4, y_1 = 3, y_2 = 1$  وي  $\sum_{i=1}^2 (3x_i - y_i + 4)$  پیدا کړي؟

که  $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 7, x_5 = 8$  وي لاندې مجموعې پیدا کړي؟

$$1: \sum_{i=1}^3 (x_i - 3)^2 \quad 2: \sum_{i=1}^5 (x_i)^2 \quad 3: \sum_{i=1}^3 (x_i^2 - x_i)$$



$$4: \sum_{i=1}^3 \sqrt{x_i} ,$$

$$5: \sum_{i=1}^4 (x_i^2 + 2) ,$$

$$6: \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i}$$

### 1.10 د دفعاتو توزیع (ویش)

مخکې له دې چې مور پیچلی معلومات راټول ، ترتیب او تنظیم کړو، نو لازمه ده چې لاندې مفهومونه وپېژنو

- (1) گراف (Graph) : دهغه شکل څخه عبارت دی چې د متحولینو تر منځ تصویری ارتباط ټینګوی
- (2) خام مواد (Raw data): دهغه ارقامو او راټول شوو معلوماتو څخه عبارت دی چې په عددی ډول نه وی ترتیب شوی
- (3) صنف بندی (Arrays): په صعودی یا نزول ډول دخامو موادو ترتیب کول دی
- (4) وسعت (Range): د صنف د لوی او کوچینی حد تر منځ فرق ته وسعت وایی
- (5) ساحه (Domain): دمتحول هغه قیمتونه دی چې تابع په نوموړی قیمتونو کی تعریف شوی وی
- (6) صنف (Class): هغه افراد ، اشیا ء او حوادث دی چې مشترک خصوصیات او عینی حالت ولری
- (7) دصنف انتروال (Class Interval): د صنف د تحول دساحی څخه عبارت دی
- (8) دطبقی یا صنف حدود (Class Limits): د یوی طبقی اخرنی (انجامی ) اعداد دطبقی د حدودو په نوم یادیری د طبقی کوچینی عدد د ټیټ حد او لوی عدد د لوړ حد په نوم یادیری
- (9) دیوی طبقی خلاصه ساحه (open class Interval): عبارت دهغی طبقی دساحی څخه دی لوړ یا ټیټ حد یی محدود شوی نه وی

**د دفعاتو د توزیع جدول (Frequency Distribution):** د دی لپاره چې خام مواد د هغوی د مربوطه

دفعو سره ولیکو یو جدول ته ضرورت لرو چې لاندی نقطی باید په نظر کی ونیسو

(a) د دی لپاره چې د اشتباهاتو څخه ځان وژ غورو دهری دفعی په عوض یو خط لیکو چې د چوب خط (Tally) په نامه یادیری

(b) وسعت : د صنفونو شمیر چی معمولاً د 5 څخه تر 25 پوری په نظر کی نیول کیږی دتعیین لپاره یی وسعت یا فاصلی ته ضرورت دی چې د لوړ حد او ټیټ حد د تفریق د حاصل څخه عبارت دی یعنی  $R=b-a$

(c) دصنفونو انتروال باید یو شان وی چې معمولاً په c سره بنودل کیږی که دصنفونو شمیر په k سره وښیو نو

دصنفونو انتروال د  $c = \frac{R}{K}$  رابطی په واسطه تعینوو چې باید یو مناسب عدد انتخاب شی که دصنفونو

انتروال او مقدار معلوم نه وی نو لاندی ټکی په پام کی نیسو

1. که  $n$  معلومات راکرل شوی وی نو د  $n = 2^k$  رابطی څخه د  $k$  قیمت پیدا کوو
2. که  $n$  معلومات راکرل شوی وی و، دلاندي رابطی څخه استفاده کوو چی د استورج دقاعدی په نوم یادیری د  $k$  قیمت مناسب انتخابوو  $k = 1 + 3,322 \cdot \log n$
3. کولای شو د  $k$  قیمت پخپله خوښه انتخاب کړو، البته د 5 څخه تر 25 پوری باید انتخاب شی که چیری دصنفونو شمیر د 5 څخه کم وی، نو معلومات خپله معنا دلاسه ورکوی او که صنفونه د 25 څخه زیات شی نو محاسبه یی اوږده او دوخت ضایع ده

لومړی مثال:

مثال: که یو شمیر ارقام په لاندی دفعاتو سره راکړ شوي وي جدول یی ترتیب کړی

11,11,12,12,13,13,13,13,13,14,14,15,15,15,16,16,17,18

ارقام x	F دفعات
18	1
17	1
16	2
15	3
14	2
13	5
12	2
11	2
<b>Total</b>	<b>F=18</b>

دویم مثال: لاندی عددونه د 20 تنه محصلینو دقد اندازه رابنډی تاسی یی جدول ترتیب کړی

حل: 160,163,165,163,170,170,165,175,180,165

لومړی یی په نزولی ډول ترتیبوو 175,160,175,170,170,170,175,165,163,165

دقد اندازه	دفعات
160	2
163	3
165	5
170	5
175	4
180	1

دریم مثال: په یوه ازموینه کې 40 زده کوونکو ګډون کړې او پایلې یې په لاندې ډول اعلان شويدي تاسې یې د دفعاتو د توزیع جدول ترتیب کړی

56 78 62 37 54 39 62 60 28 82  
38 72 62 44 54 42 42 55 57 65  
68 47 42 56 56 55 66 42 52 48  
48 47 41 50 52 47 48 53 68 56

حل: لومړی یې ترتیبوو

28 42 47 48 54 56 62 68

37 42 47 50 54 56 62 68  $R = b - a \Rightarrow R = 82 - 28 = 54$

38 42 47 52 55 56 62 72  $c = \frac{R}{k} = \frac{54+1}{11} = 5 \Rightarrow c = 5$

39 42 48 52 55 57 65 78

41 44 48 53 56 60 66 82

د صنفونو انټروال	شمیر یا Tally	$F_i$
28-32	—	1
33-37	— —	1
38-42	— — —	7
43-47	— — —	4
48-52	— — —	6
53-57	— — — —	10
58-62	— — —	4
63-67	— —	2
68-72	— —	3
73-77	—	0
78-82	— —	2

څلورم مثال: که چېرې په یوه مسابقه کې 80 محصلینو ګډون کړی وی ، د دفعاتو جدول یې ترتیب کړی

استاد عبدالاحد ارین

23 24 18 14 20 24 24 26 23 21  
 16 15 19 20 22 14 13 20 19 27  
 24 22 38 28 34 32 23 19 21 31  
 16 28 19 18 12 27 15 21 25 16  
 30 17 22 29 29 18 25 20 16 11  
 17 12 15 24 25 21 22 17 18 15  
 21 20 23 18 17 15 16 26 23 22  
 11 16 18 20 23 19 17 15 20 10

حل: که و غوارو د پورته ارقامو جدول جوړ کړو ، نو لومړی باید هغه ترتیب کړو چی ترتیب کول یی  
 لوستنکوته پریږدو

که و غوارو په اعشاری ډول صنفونه جوړ کړو ، نو دهر صنف د ټیټ حد څخه 0.5 تفریقوو او دلوړ سره  
 0.5 جمع کوو

$$10 - 0.5 = 9.5 \text{ , and } 14 + 0.5 = 14.5 \quad c = \frac{k}{R} = \frac{28+2}{6} = 5$$

صنفونه Classes	صنفی سرحدونه Class boundaries	شمیریا Tally	دفعات $F_i$
10-14	9.5-14.5		8
15-19	14.5-19.5		28
20-24	19.5-24.5		27
25-29	24.5-29.5		12
30-34	29.5-34.5		4
35-39	34.5-39.5		1
			$\sum F_i=80$

مثال : د 40 تنو محصلينو قد په cm اندازه شوی دی ، جدول یی ترتیب کړی

138 164 150 132 144 125 149 157 146

158 140 147 136 148 142 144 168 126

138 176 163 118 154 165 146 173 142

147 135 153 140 135 161 145 135 142

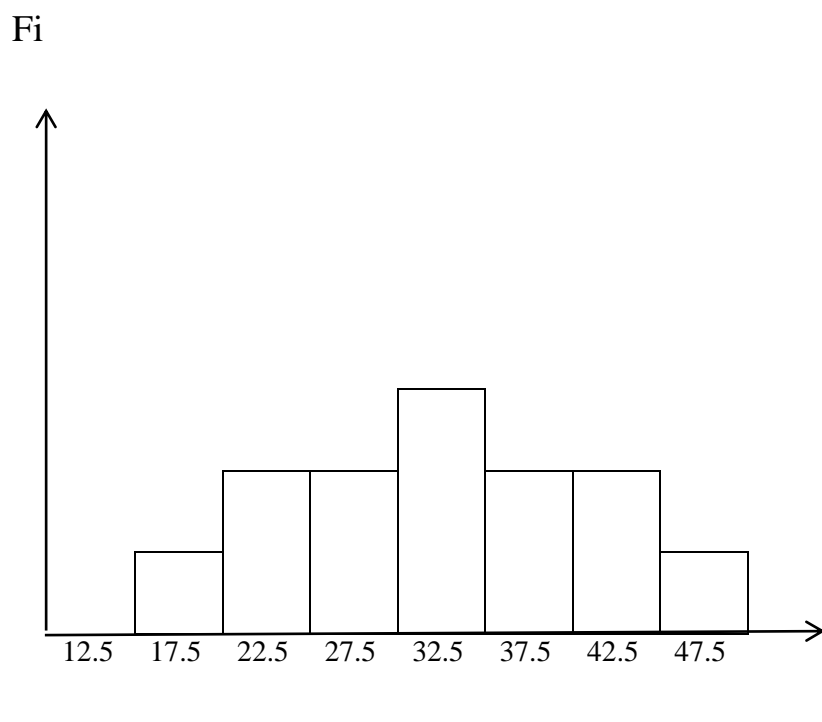
150 156 145 128

ترتیب کول یی د لوستونکو دنده ده

**1.11 گراف:** د دفعاتو د توزیع هندسی تصویر ته گراف وایی، چی اکثره علمی تحقیقات په بڼه ډول تشریح کوی

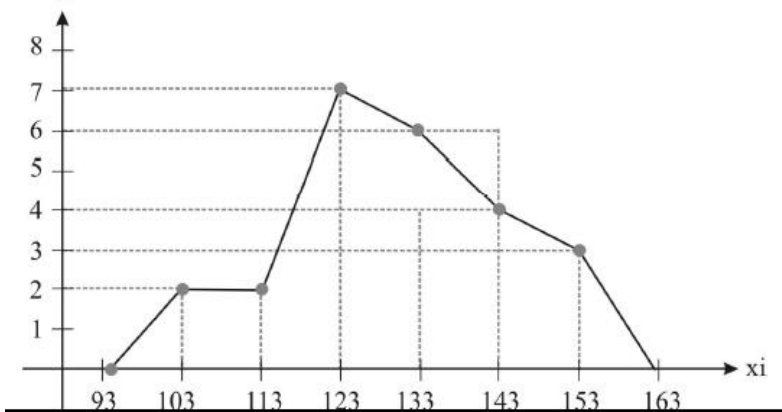
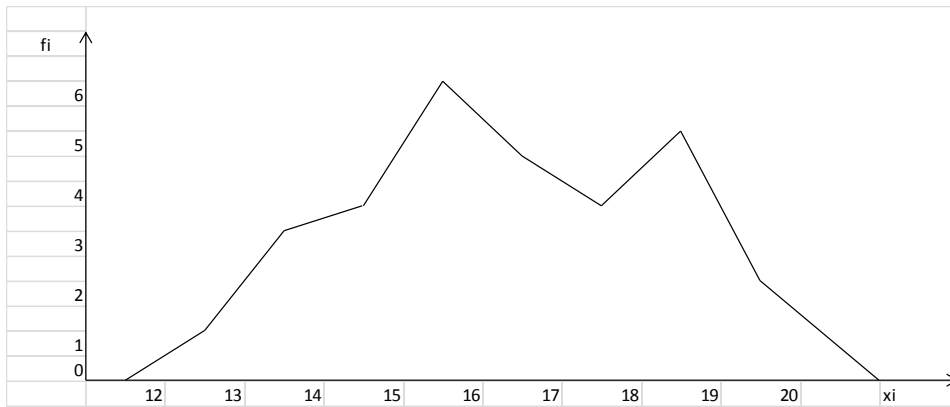
1. هستوگرام گراف (مستطلی گراف) : دغه گراف اکثرأ د متما دی معلوماتو لپاره په کار وړل کیری ، او دغه

مستطیلونو د مجموعی څخه عبارت دی چی قاعده یی  $c = \frac{R}{k}$  په واسطه تعیینیری

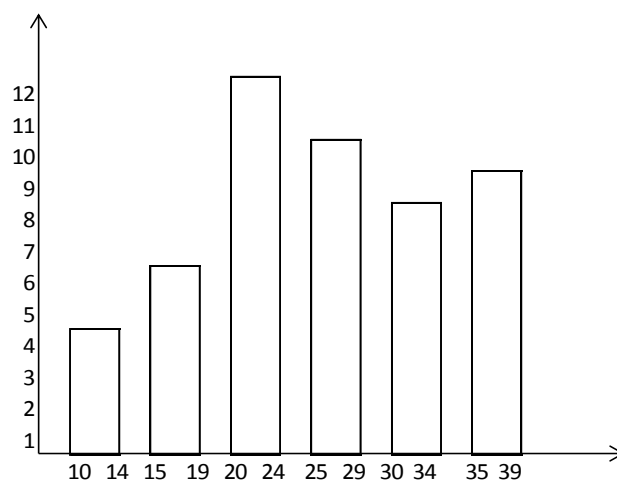


2. د دفعاتو کثیر الاضلاع: دهمدی گراف د ترسیم لپاره د هر مستطیل د قاعدی وسطی نقطه پیدا کوو، دغه

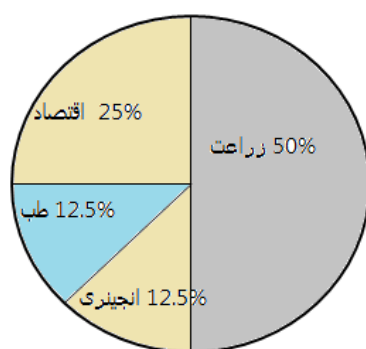
وسطی نقطه د مستطیلونو په پورته برخه کی سره نښلوو چی د دفعاتو کثیر الاضلاع لاسته راخی



3. بار گراف (میلی گراف): دا گراف هم د هستوگرام گراف غوندي دی خو فقت په هستوگرام کی معلومات متمادی وی خو په بار گراف کی غیر متمادی. یادونه باید وشي چی د نوموړی گراف د مستطیلونو ترمنځ فاصله باد یوه اندازه وی



4- پای گراف: دا گراف دیوی دایری څخه عبارت دی چی اکثره د فیصدي لپاره استعمالیری



### 1.12 دفریکونسی پولونه

مطلقه فریکونسی  $F_i$  د معلوماتوکی دهر دیتا (data) د دفعاتو (تکرار) څخه عبارت دی یادونه باید وس چی په صنف بندی شو معلوماتو کی مطلقه مجموعی فریکونسی د طبقه بندی شوو معلوماتو د مجموعی سره مساوی دی یعنی:

$$\sum_{i=1}^k F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_k = N$$

۲- نسبی فریکونسی  $f_i$ : ک دهر طبقی مطلقه فریکونسی د مطلقی فریکونسی پر مجموعی تقسیم کړو نو دهمغی طبقی نسبی فریکونسی په لاس راځی یعنی:

$$f_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^k F_i} = \frac{F_i}{N}$$

دنسبی فریکونسی مجموعه په هر احصایوی جدول کی د (۱) سره مساوی ده

$$\sum_{i=1}^k f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k = 1$$

3- د فیصدی فریکونسی  $p_i$  که دنسبی فریکونسی هر ه طبقه په (100) کی ضرب کړو دهمغه طبقی فیصدی

$$p_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^k F_i} \cdot 100 \text{ یعنی:}$$

او د فیصدی مجموعی فریکونسی په هر جدول کی د (100) سره مساوی ده

$$\sum_{i=1}^k p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k = 100$$

4. تراکمی فریکونسی یا مجموعی فریکونسی (cumulative frequency): د دفعاتو حاصل جمع په  $cf$

سره بنیو د دفعاتو دا مجموع هغه دفعی جمع کوی چی دهغی څخه کښته واقع وی

5. نسبی تراکمی فریکونسی (percentage relative frequency)  $rcf$ : نسبی تراکمی فریکونسی د

$rcf = \frac{cf}{N}$  پواسطه لاسته راځی چی دلته  $rcf$  نسبی تراکمی دفعات ،  $cf$  تراکمی دفعات او  $N$  د دفعاتو

مجموعه راښی او یا داسی چی که د نسبی فریکونسی هر ه طبقه دهغی دکښته طبقی سره جمع کرو نونیی تراکمی فریکونسی په لاس راځی او دنسبی فریکونسی اخره طبقه په هر جدول کی د یو (۱) سره مساوی ده

6. د فیصدی نسبی فریکونسی (percentage relative cumulative frequency):

د  $prcf = \frac{cf}{N} 100$  پواسطه لاسته راځی پورته حالتونه په لاندی جدول کی کتلا شی

$x_i$	$F_i$	$f_i = \frac{F_i}{N}$	$p_i = \frac{F_i}{N} 100$	$cf$	$rcf = \frac{cf}{N}$	$prcf = \frac{cf}{N} 100$
96-99	4	0.16	16	4	0.16	16
99-102	4	0.16	16	8	0.32	32
102-105	11	0.44	44	19	0.76	76
105-108	1	0.04	20	20	0.80	80
108-111	5	0.20	100	25	1.	100
	N=25	1				



مثال: د (مثال: د (30) محصلینو د قد اندازی د سانتی متر په حساب په لاندی ډول دی

169 165 169 158 162 158 167 158 169 167 164 171

167 170 171 162 164 165 165 164 170 169 170 164

165 164 165 169 171 165

دقداندازه	158	162	164	165	167	169	170	171
xi								
دمحصلینوشمیر Fi	3	2	5	6	3	5	3	3
کټگوری	5		14			11		

ډپورته جدول څخه لیدل کیږی چی د 3 تنو قد 158cm، د 2 تنو قد 162cm ..... او بالاخره د 3 تنو قد 171cm دی لیدل کیږی چی زیات محصلین د ماوسط قد لرونکی دی او دلور قد لرونکی تر ټیټ قد لرونکو زیات دی په لاندی جدول کی په ښه ډول لیدل کیږی

لورقد	متوسط قد	ټیټ قد	دمحصلینوگروپ xi
11	14	5	دمحصلینوشمیر fi

مثال: په یوه کارخانه کی 20 تنه نارینه او ښځینه کار کوی

Man: نر woman: ښځه

M W M W M WW M M M

M W M W W M W W M M

الف: دکارکونکو شمیر معلوم کړی حل: الف N=20

ب: دکار کونکو جنسیت x

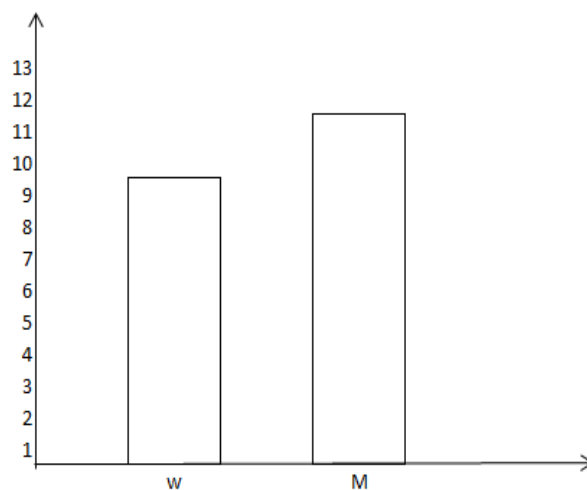
حالت	$x_i$	$F_i$
1	M	11
2	W	9
		20

ج:

ب: متحول راویژنی

ج: جدول ترتیب کری

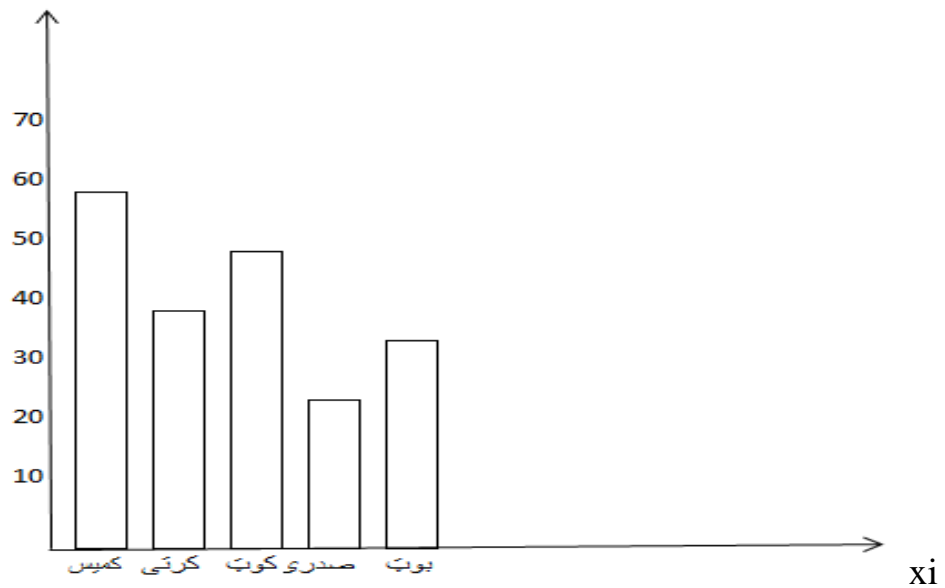
د: گراف پی رسم کری



مثال: دیوی فابریکی خخه لاندی معلومات راکرل سوی دی تاسی پی گراف رسم کری

i	$X_i$	$F_i$
1	کمیس	60
2	کرتی	40
3	کوٹ	50
4	صدری	25
5	بوٹ	35

fi



مثال: د 170 کارکونکو څخه 18 تنه انتخابوو، تر څو دهغوی د اولادو شمیر معلوم کړو

الف: نمونه او جمعیت ، نمونه:  $n=18$  او  $N=170$  جمعیت

i	$x_i$	$F_i$
1	1	5
2	2	4
3	3	5
4	4	3
5	5	1
		18

ب: متحول ، د کارکونکو شمیر  $X$

ج: څرگراف رسم کړی ، د څرگراف رسمول د لوستونکو دنده ده

مثال: د 1000 معلوماتو لپاره څو طبقو ته ضرورت دی؟

حل: د استورج (Sturges) د فورمول څخه کار اخلو

$$k = 1 + 3,3 \cdot \log n \Rightarrow k = 1 + 3,3 \cdot \log 1000$$

$$= 1 + (3,3) \cdot 3 = 1 + 9,9$$

$$k = 10,9 \approx 11 \Rightarrow k = 11$$

مثال: که 300 تنه محصلین ولرو او دهغوی وسعت 4 وی ، نو دطبقو شمیر او د طبقو تر منځ انټروال لاسته راوړی

$$n = 300 , \quad R = 4 , k = 1 + 3,3 \cdot \log 300 = 9,18 \approx 9 \Rightarrow k = 9$$

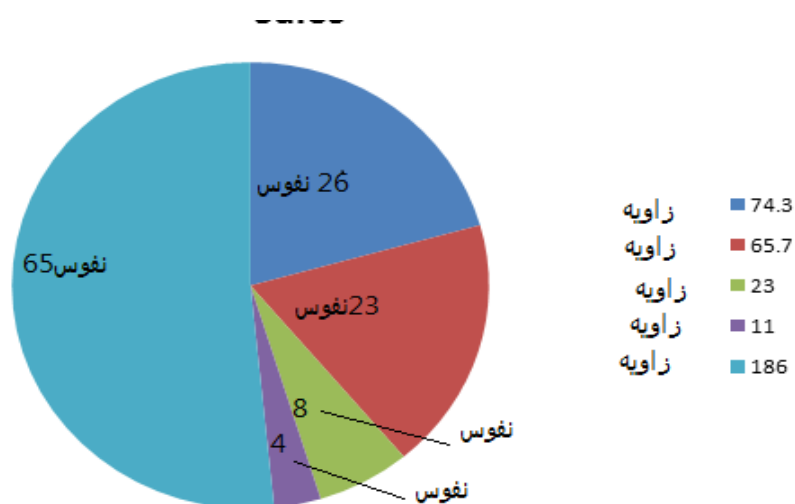
پاته عملیه د لوستونکو دنده ده

مثال: په لاندی جدول کی د هندوستان د ولایتونو نفوس رابندی، تاسی یی گراف رسم کری

ولایتونه	نفوس په ملیون
New Delhi	26
Hyderabad	23
Gujarat	8
Punjab	4
Mumbai	65

ددی سوال دحل لپاره د  $angle = \frac{quantity}{Total} 360^\circ$  فورمول څخه کار اخلو

provinces	Population in million	Angle of sectors دقطاع زاویہ	Comulative angles تراکمی زاویہ
New Delhi	26	$\frac{26}{126} \times 360 = 74.3$	74.3°
Hyderabad	23	$\frac{23}{126} \times 360 = 65.7$	140°
Gujarat	8	$\frac{8}{126} \times 360 = 23$	163°
Punjab	4	$\frac{4}{126} \times 360 = 11$	174°
Mumba	65	$\frac{65}{126} \times 360 = 186$	360°
	126	360	



مہم تکی:

۱- کہ چیری معلومات پہ جدول کی خای پر خای کرو او دخیل لور حدخه کم شی . لاندی کرنی تر سره کوو

دجدول دنوی صنفونوانتروال پہ 'c' سره بنیو او پہ لاندی ٲول عمل کوو  
استاد عبدالاحد ارین

$$\hat{C} = c + \left[ \frac{\text{لور حد جدول} - \text{دمعلوماتو لور حد}}{k} \right]$$

۲- دنویو صنفونو انتروال د  $\hat{C}$  په اندازه نیسو

مثال ۱ که چیری دمعلوماتو په یولیسټ کی لور حد 26 او کوچینی حد پی 10 وی همدارنگه که  $c=3$  او  $k=5$  وی د توزیع جدول پی ترتیب کری!

حل: څنگه چی په جدول کی لور حد 25 او دمعلوماتو لور حد 26 دی نو پورته مرحلی کاروو

i	د صنفونو انتروال
1	[10-13)
2	[13-16)
3	[16-19)
4	[19-22)
5	[22-25)

$$\hat{C} = c + \left[ \frac{\text{لور حد جدول} - \text{دمعلوماتو لور حد}}{k} \right]$$

$$\hat{C} = 3 + \left[ \frac{26 - 25}{5} \right] = 3.2$$

اوس پی جدول ترتیبوو

I	$\hat{C}$
1	10,0 - 13,2
2	13,2 - 16,4
3	16,4 - 19,6
4	19,6 - 22,2
5	22,2 - 26,0

دویم : که معلومات یا اعداد په یو جدول کی ځای پرځای کړو او دخپل لوړ حد څخه زیات شی نولاندی کړنی کاروو

د صنفونو دپیل عدد  $t_1$  په  $t_1$  سره بنیو او له د  $\left[ \frac{\text{دمعلوماتو لوړ حد} - \text{لوړ حد د جدول}}{2} \right]$  - تیټ حد =  $t_1$  فورمول څخه کار اخلو

۲ - جدول د  $t_1$  څخه شروع کوو خو دصنفونو وسعت همغه پخوانی په نظر کی نیسو

مثال ۱ : دیوی کارخانې د 36 کارکونکو دخطا اندازی په لاندی ډول دی .تاسی یی جدول ترتیب کړی

0,5 0,5 0,6 0,7 0,7 0,7 0,8 0,8 0,9 0,9 0,9 0,9 1

1,2 1,3 1,4 1,4 1,4 1,7 1,9 2 2,3 2,3 2,3 2,3 2,5

2,9 2,9 3

$$k = 1 + 3,3 \log n = 1 + 3,3 \log 36 \Rightarrow k = 1 + R = b - a \quad 3 - 0,5 = 2,5$$

$$3,3(1,56) = 6,15 \approx 6 \Rightarrow k = 6, \quad c = \frac{R}{K} = 0,41666. \approx 0,42.$$

i	C
1	[0,50 - 0,92)
2	[0,92- 1,34)
3	[1,34- 1,76)
4	[1,76- 2,18)
5	[2,18- 2,60)
6	[2,60- 3,02)

څنگه چی په جدول کی لوړ عدد (3,02) دی چی دمعلوماتو دلوړ عدد سره توپیر لری نو لاندی عملیه کاروو

$$t'_1 = \text{تیب حد} - \left[ \frac{\text{دمعلواتولور حد} - \text{لور حد دجدول}}{2} \right]$$

$$t'_1 = 0,5 - \left[ \frac{3,02 - 3}{2} \right] = 0,49$$

اوس دویم جدول له 0,49 حخه پیلوو

i	C
1	[0,49- 0,91)
2	[0,91- 1,33)
3	[1,33- 1,75)
4	[1,75- 2,17)
5	[2,17- 2,59)
6	[2,59 - 3,01)



## دويم څپرکی

### 2.1 انحراف يا خوریدل (پراگندگی)

**تعريف:** انحراف په يوه ډاټا کې لومړی د مرکزي ميلان ارقامو محاسبه کول او بيا د ډټا دهر حد څخه د نوموړي مرکزي ميلان تفاضل (تغير يا انحراف) پيدا کوو، چې ددې تغيراتو اوسط ته خپور والي وايي. او يا انحراف د اوسط څخه د تغير درجې ټاکلو ته وايي چې پوه شو چې ډاټا متراکمه ده او که پاشلي.

اوسط يو گټور او مهم مقياس دی اود اړوندو شميرو دلړی د مرکزي تمايل د څرنګوالي په اړه دپام وړ رول لري.

په هغه کې که څه هم وسطي ارزښت په يوازيتوب سره نشي کولای چې د يو فريکونسي د وېشنې بعضي عمده خصوصيات تشریح کړي. ضروري ده چې نور مهم خصوصيات د فريکونسي د وېشنې په وسيله احصايوي مقياسونه تشخيص او په وضاحت سره صورت ونيسي تر څو دهغه د مشکلاتو د پېښېدو او يا د اړوندي موضوع په باره کې ښه تصميم ونيول شي.

که څه هم ديو اوسط عمده ځانګړني دادي چې ديوې لړۍ يا سلسلې له ټولو کتنو (مشاهداتو) يا شميرو څخه په ښه توګه استازيتوب وکړي خود اړوندي سلسلې ټولې شميرې په عمومي ډول د سنجش شوي اوسط په څير ارزښت نلري. داشميرې په متفاوتو اندازو سره له وسطي ارزښت يا مرکزي ارزښت څخه انحراف کوي، البته دانحراف اوخوريدني (پراگندگی) اندازه او څرنګوالي نظر دويشنې ډول او اړوندي سلسلې ته فرق کوي، دڅوډولونو او سطونو دسنجش سربيره نه شي کولای پرته له زياتو معلوماتو د خوریدو (پراگندگی) د څرنګوالي په اړه قضاوت وکړي.

په دې ډول د انحراف په محاسبه کولو کې لومړی د ډاټا د مرکزي ميلان ارقام محاسبه کوو او بيا د ډټا دهر حد څخه د نوموړي مرکزي ميلان تفاضل (تغير يا انحراف) پيدا کوو، چې ددې تغيراتو اوسط ته خپور والي وايي.

### 2.2 دمرکزی ميلان مقياسونه (Measures of central tendency)

مرکزی معيارونه يادمرکزی ميلان مقياسونه هغه اندازی دی چې متوسط مقدار يا دمعلوماتو مرکز ته دتمايل نقطه مشخص کوی . چې معمولاً اوفايده من يی اوسط، ميانه ، او موډ دی

### 2.3 حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

دا د اوسطونوله جملې څخه يو ډير ساده اوسط دی معمولاً يوازی ورته د اوسط اصطلاح کاريری ، خو په تحليلی مسائلو اوخيرنيزو موضوعاتو کې بايد د اشتباه دنه پېښېدو لپاره حسابی اوسط وبلل شی

کله چې دارقامو مجموعه دهغوی په شمير وويشل سی حسابی اوسط لاسته راځی دغه اوسط په احصائوی اوخيرنيزو بحثونو کې معمولاً په  $(\bar{x})$  سره ښودل کيږی په صنف بندي شوی او غير صنف بندي شوی ارقامو کې اوسط فرق کوی

الف: په غیر صنف بندی شوو ارقامو کی حسابی اوسط:

که چیری مشاهدات صنف بندی شوی نه وی یعنی (Non Grouped data) وی د ارقامو مجموعه دار قاموپه

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ شمیر ویشو یعنی:}$$

پاملر نه: د جمعیت اوسط په  $\mu$  او دنمونی اوسط په  $\bar{x}$  سره بنودل کیری

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad \text{یعنی:}$$

مثال ۱: دیوی کارخانی د کارکوونکو د اولادونو شمیر په لاندی ډول دی اوسط یی پیدا کیری

0 0 1 1 1 1 1 2 2 3 4 5 5

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{0+0+1+1+1+1+1+1+2+2+3+4+5+5}{13} = \frac{26}{13} = 2 \Rightarrow \mu = 2$$

مثال ۲: دیوی کارخانی د 80 کار کوونکو څخه د 14 کار کوونکو خطاوی په لاندی ډول دی تاسی یی اوسط

پیدا کیری

0,01 0,01 0,01 0,02 0,02 0,03 0,05 0,07 0,07 0,07 0,08 0,10 0,15  
0,20

$$N=80, \quad n=14 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{14} x_i}{14} = \frac{0,89}{14} = 0,06 \Rightarrow \bar{x} = 0,06$$

ب: په صنف بندی شوو ارقامو کی اوسط (Mean from Group data)

په صنف بندی شوو ارقامو کی د اوسط د معلومولو لپاره دوی طریق یی لرو

$$(1) \text{ تفصیلی طریقه: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad \text{یا} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i f_i)}{n}$$

$$\text{پاملر نه: دلته هم دنمونی اوسط په } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i f_i)}{n} \text{ او د جمعیت اوسط په } \mu = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i f_i)}{n} \text{ سره بنودلی$$

کیری

مثال ۱: د 25 تنو محصلینو دنمر و د توزیع جدول په لاندی ډول دی تاسی یی اوسط پیدا کیری

$X_i$	4	5	7	9	25	مجموعه
$F_i$	6	7	8	4	25	
$X_i F_i$	24	35	56	36	151	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i F_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i F_i)}{25} = \frac{24 + 35 + 56 + 36}{25} = \frac{151}{25} = 6,04 \approx 6 \Rightarrow \bar{x} = 6$$

مثال ۲: په لاندې مشاهداتو کې  $x$  داسې تعین کړی چې دهغوی اوسط 6 وی  $[x, 2x-1, 2x, 3x+1, ]$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i)}{n} = \frac{1+x+2x-1+2x+3x+1}{4} = 6 \Rightarrow \frac{8x}{4}$$

$$6 = \frac{8x}{4} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3, \quad [3,5,6,10]: \text{نو مشاهدات عبارت دی له:}$$

مثال ۳: په لاندې جدول کې معلومات داسې درکړسویډی چې دهغوی اوسط 1,46 دی تاسې یې ورک شوی دفعات پیدا کړی

دورخو شمیر	ترافیکي پېښی
46	0
?	1
?	2
25	3
10	4
5	5
200	مجموعه

حل:

ترافیکی پیننی $X_i$	دور حوشمیر $F_i$	$F_i \cdot x_i$
0	46	0
1	$F_1$	$F_1$
2	$F_2$	$2f_2$
3	25	75
4	10	40
5	5	25
	$86 + F_1 + F_2 = 200$	$140 + F_1 + 2F_2$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i F_i)}{n} = 1,46 \Rightarrow 1,46 = \frac{140 + F_1 + 2F_2}{200} \Rightarrow 140 + F_1 + 2F_2 = 292$$

$$F_1 + 2F_2 = 152 \dots\dots 1 \quad F_1 + F_2 + 86 = 200 \Rightarrow F_1 + F_2 = 114 \dots\dots 2$$

$$F_1 + 2F_2 = 152 \dots\dots 1$$

$$F_1 + F_2 = 114 \dots\dots 2$$

د  $F_2$  قیمت پہ 2رابطہ کی وضع کوو

$$F_2 = 38$$

$$F_1 + 38 = 114 \Rightarrow F_1 = 114 - 38 = 76$$

مثال ۴: پہ لاندی جدول کی ورک شوی رقم پیدا کری

استاد عبدالاحد ارین

دکورکرایه	110	112	113	117	m	125	128	130
دکورونوشمیر	25	17	13	15	14	8	6	2

حل کول بی د لوستونکو دنده ده

مثال ۵: په یو پنځوس (50) کسيزه ټولگي (10) تنه محصلين ناکام شويدي چي دهغوی دنمر و اوسط (2,5) دی دټولگي دټولو محصلينو نمری 281 دی تاسی دکامياب محصلينو دنمر و اوسط پيدا کړی

$$\text{دناکام محصلينو نمری} = (2,5)10 = 25 \quad \text{دبريالی محصلينو نمری} = 281 - 25 = 256$$

$$281 = 50 \text{ تنو نمری} \quad \text{دبريالی محصلينو دنمر و اوسط} = \frac{256}{40} = 4,6$$

مثال ۶: 100 محصلين ازمويني ته حاضر سوی دی او په لاندی جدول کی دناکام محصلينو نمری درکړل شويدي که چيري د 100 محصلينو دنمر و اوسط 68,6 وی تاسی د برياليو محصلينو دنمر و اوسط پيدا کړی

نمری	5	10	15	20	25	30
دمحصلينو شمير	4	6	8	7	3	2

حل:

	Xi	Fi	xi.Fi
	5	4	20
	10	6	60
	15	8	120
	20	7	140
	25	3	75
	30	2	60

30

	مجموعه	30	475
--	--------	----	-----

دناکامانومری = 475

محصلینونمری = 100(68,6) = 6860

دبريالو نمري = 6860 - 475 = 6385

دبريالوشمير = 100 - 30 = 70

$$\frac{6385}{70} = 91.2142$$

مثال ۷: دلاندي جدول خخه ورک شوي دفعه پيداگري که د نومورو معلوماتو اوسط 15,38 وي

xi	10	12	14	16	18	20
Fi	3	7	F	20	8	5

حل يي د لوستونکو دنده ده

مثال ۸: په لاندي جدول کې د 65 تنو محصلينو نمري درکړل شويدي تاسي يي حسابي اوسط پيداگري

نمري	دزده کوونکو دشمير تراکمي دفعات cf
تر 70% زياتي	7
تر 60% زياتي	18
تر 50% زياتي	40
تر 40% زياتي	40
تر 30% زياتي	63
تر 20% زياتي	65

حل: جدول پہ لاندی ڈول ترتیبوو

نمری	$F_i$	$\bar{x}_i$ دصنفونو اوسط	$x_i F_i$
20- 30	2	25	50
30 - 40	23	35	805
40 - 50	0	45	0
50 - 60	22	55	1210
60 - 70	11	65	715
70 - 80	7	75	525
	65		3305

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{3305}{65} = 50,8$$

۲ - لنده طریقہ (فرضی اوسط)

کہ چیری پہ یوہ جدول کی دصنفونو شمیر زیات وی ، نو دهغه محاسبہ کول طولانی وی دکار داسانتیا لپارہ  
د فرضی اوسط خخہ کار اخلو

۱ - دیوی طبقی وسطی نقطہ مبدا فرضوو

۲ - ددی پہ مقابل کی یعنی د انحراف پہ ستون کی صفر لیکو

۳ - دصفر انحراف خخہ پورته نقطہ مثبت او کبنتہ منفی لیکو

۴ - پہ پنجم ستون کی دهغه عناصر دفریکونسی او دفرضی اوسط دانحراف دحاصل ضرب خخہ لاسته

راوری یعنی  $F_i d_i$

۵ - پہ اخر کی د  $\bar{X} = A + \frac{\sum F_i d_i}{\sum F_i} C$  خخہ اوسط لاسته راورو چی A دفرضی اوسط خخہ عبارت دی

د اوسط خواص:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

د اوسط څخه د انحرافاتو مجموعه صفر ده.

که په هره مشاهده کې ثابت حقیقی عدد "a" اضافه شي نو نوی اوسط به  $a\bar{x} +$  وي.

که د هری مشاهده څخه ثابت حقیقی عدد "a" کم سي نو نوی اوسط به  $\bar{x} - a$  وي

که په هره مشاهده کې ثابت حقیقی عدد "a" ضرب سي نو اوسط به  $\bar{x}a$  وي

که هره مشاهده پر ثابت حقیقی عدد "a" ویشل سي نو اوسط به  $\bar{x}/a$  وي

#### 2.4 هندسي اوسط (Geometric Mean):-

هندسي اوسط د حسابي اوسط په اندازه زیات د کارولو ځایونه لري خوبیا هم د ادیوه تحلیل او د تحقیق

مقصد او هدف پوري اړه لري، هندسي اوسط هم نظر د مشاهده د ډول ته فرق کوي، یعنی داچه ایا هر قم

صنفتي شوي که نه؟ دلته بهر یو بیل وگورو.

الف په غیر صنف بندي شوو ارقامو کې هندسي اوسط :-

#### Geometric Mean from ungrouped data

که چیري په  $x_1, x_2, x_3, \dots$  ډول ارقامو کې چه دشمیر نویوه سلسله ده. که مور و غواړو هندسي

اوسط ومومو، نو دلته د دغې سلسلې هندسي اوسط دهغوي د ضرب د حاصل  $n$  ام جذري . دغه اوسط

په GM سره بنیو او په لاندی ډول تعریف سوی دی.

$$G.M = (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n} = [(x_1) \cdot (x_2) \cdot (x_3) \dots (x_n)]^{\frac{1}{n}}$$



G.M = Anti log  $\frac{\sum \log x}{n}$  يعني وليكو، دول يى لاندې شوچه په خاطر كولاى شوچه په لاندې ډول يى وليكو، يعني

ثبوت :-

$$G.M [(x_1). (x_2). (x_3) \dots \dots (x_n)]^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Log G.M} = \log [(x_1). (x_2). (x_3) \dots \dots (x_n)]^{\frac{1}{n}}$$

$$\log G.M = \frac{\log X_1 + \log X_2 + \dots + \log X_n}{n}$$

$$\text{Log.G.M} = \frac{\sum_{i=1}^n \log x_i}{n} \quad \Rightarrow G.M = \text{anti log } \frac{\sum \log x_i}{n}$$

X	Log x
50	1.6990
60	1.7782
70	1.8451
80	1.9031
85	1.9294
90	1.9542
95	1.9777
	13.0867

مثال :- دلسم ټولگي دمضامينو نمريپه لاندي ډول راځړل شوي دي دهغوي هندسي اوسط په لاس راوړي.

70,80,85,90,95,60,50

$$G.M = \sqrt[7]{70, 80, 85, 90, 95, 60, 50} \Rightarrow G.M = 74$$

$$G.M = \text{anti log } \frac{\sum \log x}{n} \quad G.M = \text{anti log } \frac{13.0867}{7} = \text{anti log } 1.8695 = 74$$

$$\Rightarrow G.M = 74$$

ب :- په صنف بندي شوو ارقامو کي هندسي اوسط Geometric Mean from grouped data

په صنف بندي شوو ارقامو کي د هندسي اوسط سنجش ډير ساده دي ، داسي چه د دفعاتو شمير هر ځل د مربوطه

صنف دوسط په طاقت (توان) ليکل کيږي ، بيانوتول ضرب او د ټولو دفعاتو ( $f_i$ ) جذر نياستخراج کيږي ،

$$G.M = \text{anti log } \frac{\sum f \log x}{\sum f} \quad \text{يا} \quad G.M = \sqrt[\sum f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots \dots x_n^{f_n}} \quad \text{فرمول يي دادي .}$$

$$G.M = \sqrt[\sum f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots \dots x_n^{f_n}} \quad \text{ثبوت :-} \quad G.M = [(x_1)^{f_1} \cdot (x_2)^{f_2} \dots \dots (x_n)^{f_n}]^{\frac{1}{\sum f_i}}$$

$$\text{Log G.M} = \frac{1}{\sum f_i} \cdot \log[(x_1)^{f_1} \cdot (x_2)^{f_2} \dots \dots (x_n)^{f_n}] = \frac{F_1 \log x_1 + F_2 \log x_2 + \dots F_n \log x_n}{\sum f_i}$$

$$\text{Log G.M} = \frac{\sum f \log x}{\sum f_i} \Rightarrow \mathbf{G.M} = \mathbf{antilog} \frac{\sum f \log x}{\sum f_i}$$

مثال : - دلاندي معلوماتو هندسي اوسط پيدا كړي

Marks	Number of .student
0-10	8
10-20	12
20-30	20
30-40	4

Marks	No of student	X	Logx	Flogx
0-10	8	5	0.699	5.5920
10-20	12	15	1.1761	14.1132
20-30	20	25	1.3979	27.9580
30-40	4	35	1.5441	6.1763
	$\sum f_i = 44$			53.8395

$$\frac{\sum f \log x}{\sum x} = \text{anti}$$

1	2.00	0.10	0.2	0.01	100	0.25
---	------	------	-----	------	-----	------

G.M=anti log

$$\log \frac{53.8395}{44}$$

$$= \text{antilog } 1.2236 \Rightarrow G. M = 16.73$$

### 2.5 هارمونيكي اوسط (Harmonic mean) :-

دغه ډول اوسط ته ډير كم ضرورت پيښيري. استثناء هغو حالاتو كي چه زمان متحول فرض شي او كيمت

ثابت فرض شي. الف :- (په غير صنف بندي شوو ارقامو كي هارمونيكي اوسط)

كه چيري د  $x_1, x_2, \dots, x_n$  معلومات ولرونو دهغوي هارمونيكي اوسط دلاندي فرمول په واسطه پيداكوو.

$$\text{مثال :- دلاندي معلوماتو هارمونيكي اوسط پيداكري . } H.M = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

1 0.5 10 45 175 0.01 4.0

حل: جدول ترتيبوو

x	1 0.5 10 45 175 0.01 4.0	
$\frac{1}{x}$	1 2.00 0.10 0.2 0.01 100 0.25	103.56

$$H.M = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x}} = \frac{7}{103.56} = 0.07 \Rightarrow H.M = 0.07$$

ب (په صنف بندي شوو ارقامو كي هارمونيكي اوسط) :-

كه چيري معلومات تصنيف شوي وي نو دلاندي فرمول څخه استفاده كوو.

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^n f}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{f}{x}\right)}$$

مثال : - دلاندي معلوماتوڅخه هارمونيكي اوسط په لاس راوړي.

X	F	f/x	
0.01	1	100	
0.5	6	12	
1	12	12	
4	16	4	
10	20	2	
45	9	0.2	
175	5	0.03	
	69	130.23	

حل :-

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^n f}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{f}{x}\right)} = \frac{69}{130.23} = 0.53 \Rightarrow H.M = 0.53$$

نوټ :- يو بل اوسط چه د مربعي اوسط په نامه سره ياديږي . داهم ډير کم کارولکيږي . مربعي اوسط د ساده حسابي اوسط د مربع جذر څخه عبارت دي . يعني

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n}$$

2.6

دحسابي ، هندسي ، او هارمونيک اوسط ارتباط :-

دنومورواوسطونوترمينځ لاندې رابطې وجود لري .

$$H.M \leq G.M \leq A.M$$

$$(G.M)^2 = (A.M)(H.M)$$

(1) قضيه : که  $a > 0$  ،  $b > 0$  وي

الف : که  $a = b$  وي پس لروچه  $\sqrt{a.b} \frac{a+b}{2} =$  دي .

ب : که  $a \neq b$  وي پس لروچه  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a.b}$  دي .

$\frac{a+b}{2}$  ته حسابي اوسط (يا حسابي وسط) او  $\sqrt{a.b}$  ته هندسي اوسط (يا هندسي وسط) وايي .

ثبوت : څرنگه چه  $a > 0$  او  $b > 0$  دي نو  $\sqrt{a} > 0$  او  $\sqrt{b} > 0$  هم صدق کوي .

اوس پورتني دوه غير مساواتونه خواجه خوا تفريقو کوو يعني .

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$$

څرنگه چه دپورتني غير مساوات کينه خوايو مثبت عدد دي نو اطراف مربع کوو. او ديو سلسله لازمو عمليا

توخه وروسته دقضبي (الف) او (ب) برخي حاصليري يعني .

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

$$a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b > 0$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0 = a + b > 2\sqrt{ab}$$

$$\text{اخر مساوات} = \frac{a+b}{2} > 2 \frac{\sqrt{ab}}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

1 مثال :- د [2،50] د دوو عددونو ترمينځ حسابي اوسط، هندسي اوسط محاسبه کړي او بيا يې سره پرتله

کړي وروسته د [2،50] د دوو عددونو او هندسي اوسط له مخيو تناسب تشکيل کړي .

$$\text{حل :} \quad \text{حسابي اوسط د [2،50]} = \frac{50+2}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

$$\text{هندسي اوسط د [2،50]} = \sqrt{50 \cdot 2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{ليدل کيږي چه } 26 > 10 \text{ دي بنا پردي ليکوچي : } \frac{50+2}{2} > \sqrt{50 \cdot 2}$$

اوس د 2، 50، او 10 ترمينځ لاندې تناسب تشکيلوو:

$$\frac{2}{10} = \frac{10}{50} \text{ يا } \frac{10}{2} = \frac{50}{10} \Rightarrow \text{ځکه چې } 100 = 100 \cdot 2.50 = 10 \cdot 10$$

2 مثال :- د [2،2] د دوو عددونو ترمينځ حسابي اوسط، هندسي اوسط محاسبه کړي او بيا يې سره پرتله کړي .

او وروسته د 2، 2، او هندسي له مخي تناسب تشکيل کړي .

حل :-

$$\frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2 = \text{حسابي اوسط}$$

$$\text{هندسي اوسط} = \sqrt{4} = 2 = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{2}{2} = 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \Rightarrow 4 = 4$$

(2) **قضيه** :- که  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$  مثبت عددونه او  $n$  طبعي عدد ( $n \neq 1$ ) وي پس لرو چي .

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}$$

ددي قضيهي دثبوت څخه صرف نظر کوو او يوازي څو توضيحي مثالونه حل کوو.

(3) مثال :- د  $[1, 2, 4]$  دري عددونو تر مينځ حسابي او هندسي اوسطونه محاسبه کړي او وروسته د

$[1, 2, 4]$  او هندسي اوسط له مخيو تناسب هم تشکيل کړي .

$$[1, 2, 4] \text{ حسابي اوسط د } \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,5$$

$$[1, 2, 4] \text{ هندسي اوسط د } \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2,5 > 2 \quad \text{دلته وينوچه}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$$

(دوسطينو حاصل ضرب)  $1 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$  (دطرفينو حاصل ضرب)



41

$$8 = 8$$

(4) مثال:- د [ 1 ، 2 ، 4 ، 32 ] څلورو عددونو تر مینځ حسابي او هندسي اوسطونه محاسبه کړي او بیا یې

سره پرتله کړي وروسته د [ 1 ، 2 ، 4 ، 32 ] عددونو او هندسي اوسط له مخیو تناسب تشکیل کړي .

$$\bar{x} = \frac{1+2+4+32}{4} = \frac{39}{4} = 9,75 \text{ (حسابي اوسط)}$$

$$G_m = \sqrt[4]{1.2.4.32} = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{(4)^4} = 4 \text{ (هندسي اوسط)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{2} = \frac{4}{4} = \frac{4}{32}$$

(دوسطینو حاصل ضرب)  $1.2.4.23 = 4.4.4.4$  (دطرفینو حاصل ضرب)  $256 = 256$

(5) مثال :- د [ 1 ، 2 ، 5 ، 10 ، 1000 ] پنځه عددونو تر مینځ حسابي اوسط او هندسي اوسطونه محاسبه

کړي او بیا یې سره پرتله کړي. حل :-

مثال :- په لاندې معلوماتو کې  $H.M < G.M < A.M$  رابطه ثبوت کړي .

Marks	No student	X	Log x	F log x	$\frac{F}{x}$	$F_x$
0-10	8	5	0.699	0.5920	1.6	40
10-20	12	15	1.1761	14.1132	0.8	180
20-30	20	25	1.3979	27.958	0.8	500
30-40	4	35	1.5441	6.1763	0.11	140
	44			53.8395	3.13	860

حل:

$$A.M = \frac{\sum_{i=1}^n f x}{\sum_{i=1}^n f} = \frac{860}{44} = 19.55$$

$$G.M = \text{anti log } \frac{53.8395}{44} \Rightarrow G.M = \text{anti log } 1.2236 = 16.73$$

$$G.M = 16.73$$

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^n f}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{44}{3.31} = 13.3 \Rightarrow A.M = 19.55 > G.M = 16.73 > H.M = 13.3$$

مثال:- ددوه مشاهدو حسابي اوسط 127.5 او هندسي اوسط يی 60 دي پس هارمونيک اوسط يی پيدا کړي.

$$\text{حل :- } H.M = H G^2 = AxH = (60)^2 = 28.24 \quad H.M = H \frac{G^2}{A} = \frac{3600}{127.5} = 28.24$$

$$\Rightarrow H.M = 28.24$$

## 2.6 (average of position) دموقعيت له پلوه اوسط

رياضيکي اوسط په ټولو مواردو کې د استفادي وړ نه دي خصوصاً په هغه حالت کې چې يو عدمنفي،

صفر، او يو عددي درکه (miss) شوي وي. مثلاً که د شاگردانو د 7 کسيزه گروپ څخه د سوي امتحان

واخلو او لاندې نمري واخلي.  $X = -1, 0, 3, 6, 7, 204$

نو پدې صورت کې  $A.M = 6.5$  دي او د  $(-1)$  او  $(0)$  له وجه څخه هندسي اوسط  $(G.M)$  او هارمونيک

اوسط (H.M) نشومحاسبه کولاي پس دلتهیوبل اوسط چه عبارت دي له میانی، موډ اوداسی نوروڅخه څخه مطالعه کوو.

## 2.8 میانه (Median)

داهم دفریکوینسی په ویش کی دارقامو دمرکزیت دپیداکولو پوه بله طریقه ده میانه دحسابی اوسط په شان کوم الجبري تعریف نلري او دیولر ارقامو یا عددونو دمنځنی حدپیداکول دي یعنی میانه هغه رقم یا نقطه ده چي نیم ارقام یې پورته خواته او نیم ارقام یې بنسخته خواته قرارلري

د دي لپاره چي د  $n$  دیتا ارزښتونو سیټ مینځنی (میانه) ومومو، مور باید لومړی راکول سوی معلومات په ترتیب سره تنظیم کړو. چي دلته میانه د  $n$  په تاق او جفت پوری اړه لری او په لاندی فورمول سره اندازه کیږی.

$$\text{median} = \begin{cases} X_{(0.5(n+1))} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{1}{2}(X_{(0.5n)} + X_{(0.5n+1)}) & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

مثال: لاندی ارزښتونه په روغتون کی د بستر شوي ناروغانو د ویني فشار دي:

117.5 123.8 122.4 122.3 115.8 159.6 110.9 108.2 109.5 115.9 138.6 112.1

د ویني د فشار داوسط ارمقدار موندلو لپاره، مور باید لومړی دوی په صعودی ډول ترتیب کړو

108.2 109.5 110.9 112.1 115.8 115.9 117.5 122.3 122.4 123.8 138.6 159.6.

دلته مشاهدات جفت جفت دی یعنی د  $n$  شمیر فت دی نو.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(x_{(6)} + x_{(7)}) = \frac{1}{2}(115.9 + 117.5) = 116.7.$$

د پورته ملوماتو اوسط په لاندی ډول دی.

$$\bar{x} = \frac{1}{12}(108.2 + 109.5 + 110.9 + \dots + 159.6) = \frac{14566}{12} = 121.38$$

پورته اوسط چي د میانی څخه لوی دی . د 159.6 ارزښت تر اغیزی لاندی راغلی دی . منځنی (میانه) د اوسط په پرتله خورا پیاوړی ده او دلور ارزښت لرونکی ډاټا تر اغیزی لاندی نه راخی .

مثال: د فوتبال یوې لوبډلې په تېرو ۴۴ لوبو کې لاندې شمېر گولونه کړي دي

Number of goals	0	1	2	3	4
Frequency	9	8	15	9	3

لکه څنګه چې  $n = 44$ ، میانه به د 22 او 23 مشاهدو تر منځ نیمه لاره کې پروت وي. ځکه چې دواړه  $x_{(22)}$

او  $x_{(23)}$  2 دي، منځنۍ ارزښت 2 دی.

د ډله ایزو (ګروپ سوی، راتول سوی ملوماتو) معلوماتو لپاره، د منځني (میاني) اټکل کولو تر ټولو اسانه لار د ګرافیکي میتودونو څخه ده.

د میاني زیانونه:

د منځنۍ کارول دوه اصلي زیانونه لري.

په صنف بندۍ (grouped data) سوی ارقامو کې میانه:  
په صنف بندۍ سوو ارقامو (ډاټا) کې میانه د لاندې فورمول په مرسته په لاس راځي

$$Me = L + \left( \frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h$$

L د منځنۍ (میاني) د کلاس ټیټ حد

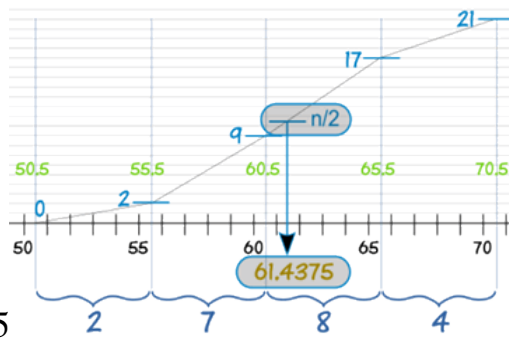
N د ټولۍ تراکمۍ فریکونسی شمیر

$f_0$  د میاني د کلاس څخه د مخکنۍ کلاس تراکمۍ فریکونسی

$f_1$  د میاني د طبقې فریکونسی

$h =$  د صنفونو انټروال

مثال:



- $L = 60.5$
- $N = 21$
- $f_0 = 2 + 7 = 9$
- $f_1 = 8$
- $h = 5$

$$Me = L + \left( \frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h$$

$$Me = 60.5 + \left( \frac{21/2 - 9}{8} \right) \times 5 = 60.5 + 0.9375$$

$$= 61.4375$$

1 بېلگه: د لسم ټولگي د 50 هلکانو د لوړوالي په اړه یوه سروې په یوه ښوونځي کې ترسره شوی او لاندې

معلومات ترلاسه شوي دي. میانه یې پیدا کړی

Height (in cm)	120- 130	130- 140	140- 150	150- 160	160- 170	Total
Number of boys	2	8	12	20	8	50

حل : د دې لپاره چې میانه پیدا کړو موږ تراکمی فریکونسی ته اړتیا لرو ، او د پیدا کولو لپاره یې لاندې جدول ترتیبوو

Class Intervals	No. of boys ( $f_i$ )	Cumulative frequency (c)
120-130	2	2
130-140	8	2 + 8 = 10
140-150	12	10 + 12 = 22
150-160	20	22 + 20 = 42
160-170	8	42 + 8 = 50

Median class 150-160

$$f_1 = 20, f_0 = 22$$

$$, \quad Me = L + \left( \frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h \quad N = 50, \quad L = 150, \quad h = 10$$

$$Me = 150 + \left( \frac{50/2 - 22}{20} \right) \times 10 = 150 + 1.5 = 151.5$$

## 2.9 مود (Mode)

مود دیو لړ ارقامو هغه نقطه ده چې تر ټولو لوړه او زیاته فریکوینسي ولري.

دمثال په توگه: 11,11,12,12,13,13,13,13,14,15,15,16,16,13

دارقامو مود 13 دی ځکه چې فریکوینسي یې 5 ده که چیرې دارقامو فریکوینسي سره مساوي وي نو مود محاسبه کیدلای شي .

دمثال په ډول: 20, 25, 2, 7, 16, 19 مود نلري

2, 2, 2, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 19, 19, 19

ارقام مود نلري حُكه چي ٽول اعداديوشان فريكوينسي لري ددي امكان شته دي چي يو لڙ ارقام يومود، دوه موده اويا څوموده ولري. دمثال په توگه دا ارقام ولرو.

د مثال: په ډول دا ارقام لرو 11,11,12,12,12,13,13,13,14,14,14,14,5

په دي حالت كې مود دهغو دوه همجوارو قيمتونو حسابي اوسط دي چي يو شان فريكوينسي ولري او قيمت يې زيات دي يعني 13 او 14 يو شان فريكوينسي لري او فريكوينسي يې ترنورو لوړه ده هر يو يې مود دي يعني پورتنې ارقام دوه موده دي

$$\text{Mod} = \{13, 14\}$$

مثال: د 5,6,7,1,6,8,5,6,6 مود 6 دي يعني  $\text{Mod} = 6$

مثال: لاندې ارقامو مود پيدا كړي؟

$$A = \{5, 5, 5, 5, \}$$

$$B = \{10, 20, 30, 40\}$$

$$C = \{19, 20, 19, 25\}$$
 حل

$$\text{Mode (A)} = 5$$

Mode (B) تعريف شوي نه دي

$$\text{Mode (C)} = 19$$

2 بيلگه : دلاندې ارقامو مود پيدا كړي

$$A = \{21, 22, 29, 35, 21, 21\}$$

$$B = \{2, 5, 1, 1/2, 1, 1/2, 2, 0, 5, 1/2\} \quad C = \{100, 95, 100, 95, 85, 90\}$$

دارقامو مودونه په لاندې ډول دي .

$$\text{Mode (A)} = 21$$

$$\text{Mode (B)} = 1/2$$

$$\text{Mode (c)} = \{100, 95\}$$

ليدل کيږي چې د C سيټ دوه موده دي که هغه مرتب کړو لیکو چې .

$$C = \{80, 85, 90, 95, 95, 100, 100\}$$

$$\text{Mode}(c) = \frac{95 + 100}{2} = \frac{195}{2} = 97.5$$

که یو سيټ دوه موده وي نو دمحساباتو له پاره بيا له پورتنی میتود څخه کار اخلو که ارقام تصنیف شوي وی نو د مود محاسبه ددې فورمول په مرسته په لاس راځي .

$$\text{Mode} = L_1 + \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)$$

چې دلته L دفریکوینسي دهغه صنف لاندیني سرحد دی چې مودپکې قرارلري  $\Delta_1$  دمود دصنف فریکوینسي فرق دمخکني همسایه سره .

$\Delta_2$  دمود دصنف دفریکوینسي فرق دوروستني (ورپسي) همسایه سره .

C دمود دصنف صنفی عرض دی .

مثال : که ( 4-10 ) جدول په پام کې ونیسو نو



$$L_1 = 144.5 \quad \Delta_1 = 12 - 9 = \Delta_2 = 12 - 5 = 7. c = 9$$

$$Mod = 144.5 + \frac{3}{3+7} 9$$

$$Mod = 144.5 + \frac{27}{10} = 144.5 + 2.7 = 147.2$$

که دمود دپاسني سرحد څخه کار واخلو نودمود پيدا کولو لپاره له دې فورمول څخه کار اخلو

$$Mod = l_2 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} . c$$

$$Mod = 153.5 - \left( \frac{7}{3+7} \right) . 9 = 153.5 - \frac{7}{9} . 9$$

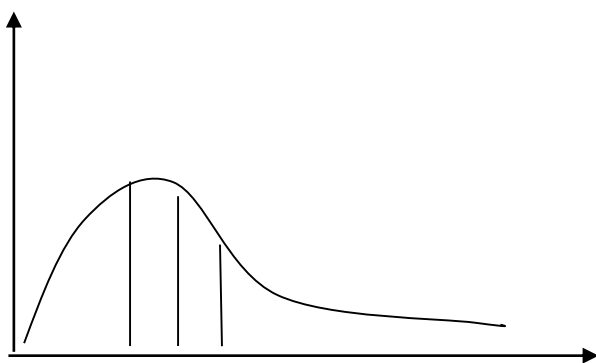
$$Mod = 153.5 - \frac{63}{10} = 153.5 - 6.3$$

$$Mod = 147.2$$

په منحنی کې د اوسط ، میانه او مود مقایسه :-

1 - که چیرې دار قامو د سیټ د دفعاتو درسم شوي منحنی لمن بڼې طرف ته پراختیا ولري نو میانه به له

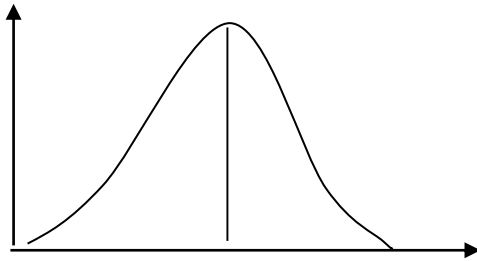
ریاضیکي اوسط څخه کوچني وي



$$Mo < Me < Mean$$

2 – که چیري دار قامو دویش منحنی متناظر ( Symmetric ) وی یعنی دواړو خواوو ته یو برابر وي نو په

دي صورت کيا وسط او میانه یو پر بل منطبق دي . لکه



$$\bar{x} = Mo = Me$$

3 – که چیري دار قامو د دفعاتو د گراف کوروالي ( انحراف Skewed ) چپ طرف ته وي نو اوسط به یې کیني

خواته اوتر میانی کوچني وي .

دا اوسط ، میانی او مود تر منځ اړیکه :

1 – که چیري توزیع متناظر وي نو اوسط ، میانه او مود یوله بل سره مساوي دي .

$$\text{mean} = \text{median} = \text{mode}$$

2- که چیري توزیع متناظر نه وي نو دلاندې فرمولونو څخه استفاده کیري .

$$\text{Mode} = \text{mean} - 3(\text{mean} - \text{median})$$

$$= 3\text{median} - 2\text{mean}$$

$$\text{Mean} - \text{mode} = 3(\text{mean} - \text{median})$$

$$\text{Mode} = 3\text{median} - 2\text{mean}$$

مثال :- دلاندي معلوماتوڅخه مود پيدا کړي . همدارنگه يي داوسط اومياني سره رابطه پيدا کړي .

Class	13-17	18-22	23-27	28-32	33-37	38-42	
Fi		1	1	2	3	2	1

### 2.9 پراختيا (وسعت) Range

دخوريدو (پراگندگي) ډير ساده مقياس دی د اړوندي سلسلي د کوچني او لوي عدد تر منځ له توپير څخه عبارت دی، او يا د اعدادو په يوه لړۍ کې دلوري نمري او ټيټي نمري ترمنځ له تفاضل يعني بڼه والي څخه عبارت دی، چې په سمبوليکه بڼه پدې ډول بنودل کېږي.

$$R = X_{max} - X_{min}$$

په دې رابطه کې R پراختيا (وسعت)،  $X_{max}$  لوړه نمره او  $X_{min}$  ټيټه نمره بڼي.

که چېرې د يوې ازمويني نمري د دفعاتو د وپشنې په بڼه راپور ورکړل شوي وي. په دې صورت کې د نمرې پراختيا (وسعت) د ټيټي او لوړي وپشنې ترمنځ له بڼه والي (تفاضل) څخه عبارت دی. پراختيا (وسعت) لکه نوري اندازي د واټن خور بدل بڼي.

پراخوالي يا وسعت په لاندي شمېرو کې 2,3,5,7,11,29,35 عبارت دی له:

$$35 - 2 = 33$$

مثال: د 10 شاگردانو د نورو ريكارډ په لاندي ډول دي فاصله يي پيدا کړي؟

30, 20, 23, 44, 60, 75, 90, 40, 50, 51

$$X_{max} = 90$$

$$\text{Range} = X_{max} - X_{min}$$

$$X_{min} = 20$$

$$\text{Range} = 90 - 20 = 70$$

په فاصله کې د انحراف ضريب

په فاصله کې د انحراف ضريب دلاندي فورمول پواسطه پيدا کولای شو:

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} \Rightarrow CR = \frac{R}{X_{max} + X_{min}}$$

2,4,8,10,16,20,6

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \frac{20 - 2}{20 + 2} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11} = 0.082$$

په تصنيف شوو ارقامو کې پراخوالي يا وسعت د کوچني ټولګي د بنسټني حد ترمنځ او د لوي ټولګي د پورتنې حد تر منځ له توپير څخه عبارت دی.

د مثال په ډول: د 142 کورنيو د کلني عايد پراختيا په 1385 کال کې نظر جدول ته له

$$69.99 - 66.0 = 3.99$$

څخه عبارت دی يعني 3.99 افغاني دي.

دپراخوالي (وسعت) د سنجش پيرودل (اخيستل) په يوه سلسله اړوندو شميرو کې دهغه په ساده والي پوري تړلي دي په ځينو ځايونو کې په خاصه توګه اعظمي او اصغري حد، قيمتونو تحول په مارکېټ کې يا د اوربست د حرارت درجه، د توليد د کيفيت يا جنسيت کنټرول، يا حتا داوسط په اټکل يا تخمين کې په کار پيري.

په غير متمادي ډاټا کې د فاصلي محاسبه:

په غير متمادي ډاټا کې د فاصلي د محاسبې په وخت کې د دفعاتو د ستون څخه صرف نظر کېږي. يعني د فاصلي محاسبه يوازي د ارقامو په ستون کې اجرا کېږي.

مثال: د لاندي ډټا څخه فاصله او د فاصلي ضريب محاسبه کړئ؟

$x_i$	43	64	78	96	100	150	230	240	261
$f_i$	100	105	91	82	61	31	70	88	67

$$Range = X_{max} - X_{min}$$

$$R = 261 - 43 = 218$$

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \frac{261 - 43}{261 + 43} = \frac{218}{304} = 0.7171$$

په متمادي ډاټا کې د فاصلي محاسبه:

مثال: د لاندي ډټا څخه فاصله او د فاصلي ضريب محاسبه کړئ؟

Marks	No of students
10 – 20	8
20 – 30	10
30 – 40	12
40 – 50	8
50 – 60	4

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \frac{60 - 10}{60 + 10} = \frac{50}{70} = 0.714$$

د پراختيا (وسعت) بندي گڼي:

1. دا طريقه ډيره اسانه ده.
2. دا فقط د مشاهدو دوو عددونو ته ضرورت لري.

بايد وويل شي چې دا په هغو حالاتو كې چې د ټولو مشاهدو د پيل او پای اعداد مهم و برېښي بڼه كار وركوي لكه: د تودوخي د درجي فرق، په ماركيټ كې د بيو د اعظمي حد بدلونونه، د يوې كرونډې ډير لور او كم حاصل ترمنځ فرق، د اورښت د لوري او ټيټي اندازې فاصله، د زده كوونكو د نكاوت او نمر و ترمنځ تو پير او نور مثالونه.

د پراختيا (وسعت) نيمگړتياوې:

**پراختيا (وسعت) نظر لاندې څو دليلونو ته لږ د استعمال وړ دي.**

1. ډېراختيا (وسعت) برخه په دوه اعظمي او اصغري ارزښت پورې اړوندېږي، چې د اعدادو خورتيا په توگه نشي توضيح كولاى .
2. په منځني ډول د هرې مشاهدې تر منځ تفاوت او انحراف نشي ښودلاى.
3. د پراختيا (وسعت) ارزښت په زياتره اعدادو يا په غير عادي ارزښتونو كې شديداً متاثيره كېږي.

لكه په دوو لاندې لړيو كې:

3	5	6	7	10	12	15	18
3	8	8	8	9	9	9	18

$$Range_1 = 18 - 3 = 15$$

$$Range_2 = 18 - 3 = 15$$

د  $15 = 18 - 3$  پراختیا (وسعت) څرنګه چې لری یې له ځانه لري د بیلا بیلو خوړیدو لرونکي ده. د پراختیا (وسعت) ارزښت نظر دنموني اندازې ته له حده وتلي (فاحش) بدلون پیدا کوي. په پورته یادوشو دوو لریو کې که چېرې دوه وروستي یا انتهایي عددونه حذف کړو.

5	6	7	10	12	15
8	8	8	9	9	9

$$Range_1 = 15 - 5 = 10$$

$$Range_2 = 9 - 8 = 1$$

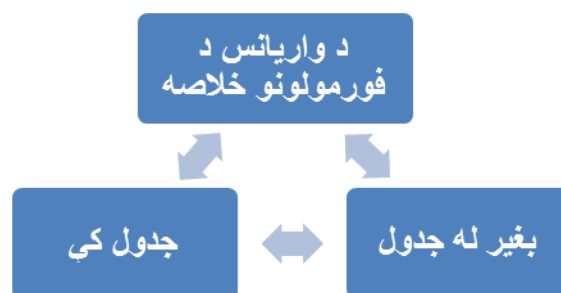
پراختیا (وسعت) په لومړی لری کې  $15 - 5 = 10$  او په ودیمه لری کې  $9 - 8 = 1$  دی.

## 2.10 پراختیا (خوړیدل) (dispersion)

### واریانس (Variance)

دا اصطلاح په 1918م کال کې د (R.A. Fisher) په واسطه معرفی شوه. واریانس هم د انحراف یو مهم مقیاس دی.

واریانس په لغت کې خپوروالی ته وایي. چې ریاضیکي تعریف په لاندی ډول دی.



بغیر له جدول

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum x_i^2)}{n}}{n-1} \quad 1. \text{ نمونہ}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum x_i^2)}{n}}{N} \quad 2. \text{ جمعیت}$$

جدول کی

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k X_i^2 F_i - \frac{(\sum x_i^2)}{n}}{n-1} \quad 1. \text{ نمونہ}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k X_i^2 F_i - \frac{(\sum x_i^2)}{N}}{N} \quad 2. \text{ جمعیت}$$

د پورته فورمولو څخه يو ثبوتو او يايي زړه ته رانيژدی لوستونکو ته د بني زدکړی په موخه پريژدو.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu^2)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i + \mu^2 - 2x \cdot \mu)}{N}$$

$$= \frac{\sum X_i^2 + \mu^2 \sum 1 - 2\mu \sum X_i}{N} = \frac{\sum X_i^2 + N\mu^2 - 2\left(\frac{\sum X_i}{N}\right) \cdot \sum X_i}{N}$$

$$= \frac{\sum X_i^2 + N \frac{(\sum x_i^2)}{N^2} - \frac{2(\sum X_i^2)}{N}}{N} = \frac{\sum X_i^2 + \frac{(\sum X_i^2)}{N} - \frac{(\sum X_i^2)}{N}}{N} = \frac{\sum x_i^2 + \frac{-(\sum X_i^2)}{N}}{N}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i^2)}{N}}{N}$$

لومړی مثال: په ۱۳۷۹ کال کې ۱۵ کتابتونونو په لاندې ډول کتابونه چاپ کړي د هغوی واریانس محاسبه

کړی.

1 2 2 3 4 4 5 6 8 9 9 10 10 10 11

حل:

$X_i$	1	2	2	3	4	5	6	8	9	9	10	10	10	11	94
$X_i^2$	1	4	4	9	16	25	36	64	81	81	100	100	100	121	758

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2 - \frac{(\sum X_i^2)}{15}}{15} = \frac{758 - \frac{(94)^2}{15}}{15} = 11.27$$

$$\mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{N} \Rightarrow \mu = \frac{94}{15} = 6.27$$

دوهمه طریقه:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(1-6.27)^2 + 18.23 + \dots + 22.37}{15} = 11.26 \quad \sigma^2 = 11.26$$

دویم مثال: په هلمند ولایت کې د یوې کارخانې د ۸۰ کارکوونکو څخه د ۱۴ تنو خطاوي په لاندې ډول دی،

واریانس یې پیدا کړ.

0.01    0.01    0.01    0.02    0.02    0.03    0.05

0.07    0.07    0.07    0.08    0.10    0.15    0.20

حل:

$$N=80 \quad , \quad n=14$$



$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}}{N - 1} = \frac{0.0981 - \frac{(0.89)^2}{14}}{14 - 1} = 0.003 \quad s^2 = 0.003$$

درېيم مثال: که چيری د ۳۰ گروپونو شرح په لاندې ډول وی، واریانس یی پیدا کړ.

I	$X_i$	$f_i$
1	0	5
2	1	7
3	2	11
4	3	4
5	4	2
6	5	1
		30

حل:

I	$X_i$	$f_i$	$X_i^2$	$X_i f_i$	$f_i X_i^2$
1	0	5	0	0	0
2	1	7	1	7	7
3	2	11	4	22	44
4	3	4	9	12	36
5	4	2	16	8	32
6	5	1	25	5	25
		30		54	144

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 X_i^2 f_i - \frac{(\sum X_i f_i)^2}{30}}{30} = \frac{144 - \frac{(54)^2}{30}}{30} \quad \sigma^2 = 1.56$$

د واریانس ضریب

د واریانس ضریب چې په C.V شکل سره بنودل کیږي عبارت دی له:

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

مثال : یوه کارخانه د موټرو دوه ډوله ټایرونه تولیدوي. د A ډول لپاره اوسط عمر 10000 کیلومتره او د انحراف معیار یې 2000 کیلومتره او د B ډول ټایر لپاره متوسط عمر 11000 کیلومتره او معیاري انحراف یې 1000 کیلومتره دی. کوم ټایر بهتر دی؟

$$A = C.V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} \times 100 = \frac{2000}{10000} \times 100 = 20\%$$

$$B = C.V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} \times 100 = \frac{1000}{11000} \times 100 = 9\%$$

د B نوعه ټایر بهتر دی، ځکه هم د هغې اوسط عمر ډیر دي او هم د هغې د تغیر ضریب کوچنی دی.

## 2.11 وسطي انحراف

وسطي انحراف یا انحراف نظر اوسط ته څرنګه چې له نامه څخه یې څرګندېږي، دیوي لری د انحراف له حسابي اوسط یا دیوي سلسلي شمېرو له مطلقه توپیر نظر یوه وسطي عدد ته لکه حسابي اوسط یا له میدیان څخه عبارت دی.

که څه هم په عمل کې حسابي اوسط زیاتره د یو وسطي ارزښت په توګه په کار اچول کېږي خو د تیوري له پلوه د اعدادو د انحراف مجموع نظر میدیان ته لږه اندازه ده، (البته مطلقه توپیر) بڼه ده چې په سنجش کې انحراف استعمال شي. په هر حال هغه ډول اوسط چې دوسطي انحراف په سنجش کې په کار اچول کېږي باید څرګند شي.

وسطي انحراف په تصنیف شوو اعدادو کې چې  $\bar{X}$  وسطي ارزښت وي د لاندي فورمول په مرسته ویشل کېږي.

$$MD = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{n} = \frac{\sum |X|}{n} = \frac{\sum |d|}{n} \dots (2)$$

پدې ځای کې: MD وسطي انحراف، X دیوي لری یا سلسلي شمیري یا اعداد،  $\bar{X}$  حسابي اوسط، n د اعدادو یا کتنو (مشاهداتو) اندازه او d یا  $X_1 - \bar{X} = X$

عمودي کرښي (خطوط) مطلقه ارزښت (پرتله له اشاري څخه) افاده کوي.

مثال: د 2,3,6,8,11 اعدادو وسطي انحراف پیدا کړئ.

لومړی: باید د شمېرو حسابي اوسط سنجش شي :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{2 + 3 + 6 + 8 + 11}{6} = 6$$

ورسته د اعدادو مطلقه انحراف نظر اوسط ته محاسبه کوو.

$$MD = \frac{|2 - 6| + |3 - 6| + |6 - 6| + |11 - 6| + |8 - 6|}{5} = 2.8$$

يعني ورڪرل شوي اعداد د 2.8 په اندازہ له حسابي اوسط څخه انحراف لري، وسطي انحراف کولای شونظر  
مديان ته هم سنجش کړو يعني.

$$AD = \frac{\sum |X - Med|}{n} \dots (3)$$

مثلاً: په پورته اعدادو کې مديان 6 دي څرنگه چې  $x = Med$  په دي مثال کې دواړه ډوله وسطي ارزښت  
مساوي دي .

مثالونه که ډاټا صنف بندي شوي نه وي:

مثال: لاندي د ازمويني نمر و لپاره وسطي انحراف او مياڼي څخه محاسبه کړئ او همدارنگه د وسطي  
انحراف ضريب محاسبه کړئ؟

32, 36, 37, 39, 36, 41, 48, 36

حل: مور لومړی ورکړل شوي نمرې په صعودي ډول ترتيبو او مېانه يې پيدا کوو.

32, 36, 36, 37, 39, 41, 45, 46, 48

$$Med = \frac{9 + 1}{2} = 5^{th} term$$

$$Med = 39 \text{ Marks}$$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum xi}{n} = \frac{32 + 36 + 36 + 37 + 39 + 41 + 45 + 46 + 48}{9} \\ &= \frac{360}{9} = 40 \end{aligned}$$

$X_i$	$xi - \bar{x}$	$ xi - \bar{x} $	$ xi - Med $
32	-8	8	7
36	-4	4	3
36	-4	4	3
37	-3	3	2
39	-1	1	0
41	1	1	2
45	5	5	6
46	6	6	7
48	8	8	9
$\sum = 360$	0	40	39

$$MD = \frac{\sum |xi - \bar{x}|}{n} = \frac{40}{9} = 4.4 \text{ Marks}$$

$$MD = \frac{\sum |xi - Med|}{n} = \frac{39}{9} = 4.3 \text{ Marks}$$

$$CMD = \frac{MD}{\bar{x}} = \frac{4.4}{40} = 0.11$$

$$CMD = \frac{MD}{Med} = \frac{4.3}{39} = 0.11$$

مثال: په لاندې ډول د 10 شاگردانو د احصائېي نومرې راکړل شوېدي وسطي انحراف يې پېداکړئ؟

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100}{10} = \frac{550}{10} = 55$$

$$MD = \frac{\sum |xi - \bar{x}|}{n} = \frac{45 + 35 + 25 + 15 + 5 + 5 + 15 + 25 + 35 + 45}{10} = 25$$

**2.12** په غیر صنف بندي سوی داتا کی وسطي انحراف:

مثال: د کرنيز اقتصاد دپيارتمنت 90 شاگردانو 15% نومرو صنفې تيست نتیجه په لاندې ډول راکړې شوېده، وسطي انحراف يې له حسابي اوسط څخه په لاس راوړئ؟

$x$	$fi$	$xi$	$fi \cdot xi$	$ xi - \bar{x} $	$fi xi - \bar{x} $
1 - 3	10	2	20	6	60
4 - 6	20	5	100	3	60
7 - 9	30	8	240	0	0
10 - 12	20	11	220	3	60
13 - 15	10	14	140	6	60
	$\sum fi = 90$	-----	$\sum fi \cdot xi = 720$	-----	$\sum fi xi - \bar{x}  = 240$

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{720}{90} = 8$$

$$\bar{X} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{240}{90} = 2.6$$

مثال: ديوي علمي څيړني لپاره د بيلا بيلو بوټو د 100 ټوټو اندازه په لاندې جدول کې ورکړل شوي ده،  
وسطي انحراف يې وسنجوئ؟

$X$	$fi$	$xi$	$fi \cdot xi$	$ xi - \bar{x} $	$fi xi - \bar{x} $
40 – 59.9	1	45	45	36.6	36.6
50 – 59.9	5	55	275	26.6	133.0
60 – 59.9	11	65	715	16.6	182.6
70 – 79.9	26	75	1950	6.6	171.6
80 – 89.9	33	85	2805	3.4	112.2
90 – 99.9	16	95	1520	13.4	214.4
100 – 109.9	7	105	735	24.4	163.8
110 – 119.9	1	115	115	33.4	33.4
	$\sum fi = 100$	-----	$\sum fi \cdot xi = 8160$	-----	$\sum fi xi - \bar{x}  = 1047.6$

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{8160}{100} = 81.6$$

$$MD = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{1047.6}{100} = 10.476$$

همدارنگه وسطي انحراف په تصنيف شوو اعدادو کې کولای شوي لاندینيو فورمولونوله جملې څخه ديو فورمول په مرسته سنجش کړو.

$$MD = \frac{\sum f|x - \bar{x}|}{f} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} \dots (4)$$

$$AD = \frac{\sum f|X - Med|}{\sum f} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} \dots (5)$$

په دواړو پورتنیو فورمولونو کې  $f$  د ټولگیو فریکونسي،  $X$  د ټولگیو وسط،  $\bar{X}$  او  $Med$  په ترتیب سره حسابي اوسط او داروندي وېشني میدیان دي.

دوسطي انحراف سنجش نسبتاً ساده او عام فهمه دي اما داستعمال موارد ېې محدود دي. دوسطي انحراف استعمال دکوچنیو نمونو په اړه په صورت کې چې دقیق اوجامع تحلیلونوته اړتیا نه وي گټوردي په تصنیف شویو اعدادو او لویو نمونو کې په ندرت سره استعمالیږي.

دالجبر له نظره د مطلقه توپيرونو په کار اچول دسوال قابلیت لري. ځکه چې ددې توپيرونو مجموعه په هغه

صورت کې چې اشاري ته ونیول شي مساوي په صفر یا هم تقریباً صفر ته نږدې دی

### 2.13 معیاري انحراف یا استندرد انحراف

معیاري یا استندرد انحراف د انحراف ډیر مهم مقياس دي او نظر اوسط ته د انحراف یوه ځانگړي بڼه ده. د معیاري انحراف او وسطی انحراف تر منځ توپیر دادي چې په لومړني کې د انحراف مربع نظر حسابي اوسط ته سنجول کېږي، په داسې حال کې چې دویم یې مطلقه انحراف څخه کار اخلي. معیاري انحراف دبل مهم مقياس مربع جذریعني وریانس څخه عبارت دي او یا معیاري انحراف دانحرافاتومربع جذري

معیاري انحراف او وریانس په یوسلسله اعدادوکې دلاندي فورمولونوپه مرسته سنجش کېږي:

$$\delta^2 = \frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n}}$$

په دې فورمول کې  $\delta$  (دیونان دژبي کوچني توري دسیگما په نوم) معیاري انحراف او  $\delta^2$  واریانس افاده کوي.

دمثال په ډول: د 2,3,6,8,11 اعدادو واریانس اومعیاري انحراف په لاندي توگه لاسته راځي.

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\delta^2 = \frac{(2 - 6)^2 + (3 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (11 - 6)^2 + (8 - 6)^2}{5} = \frac{54}{5} = 10.8$$

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{10.8} = 3.29$$

دويم مثال: په يوه صنفې ازموينه کې زده کوونکو لاندې نمرې لاسته راوړي دي.

4,6,8,10,12

ددغو نمرو د معياري انحراف څرگنده ده، د نوموړو نمرو انحرافي محاسبه په لاندې جدول کې ښودل شوېده.

$X$	$X - \bar{X}$	$X^2$	$\bar{X} = \frac{40}{5} = 8$
12	$12 - 8 = 4$	16	
10	2	4	
8	0	0	
6	-2	4	
4	-4	16	
$\sum X = 40$	$\sum (X - \bar{X}) = 0$	$\sum X^2 = 40$	

که چېرې د  $\sum X^2$  او  $N$  قیمتونه د معياري انحراف په فورمول کې وضع کړو نو وبه لرو.

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}} \dots (7)$$

$$S = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} = 2.814$$

د (7) فورمولونو تطبيق په بعضي حالاتو کې په ځانگړي توگه کله چې د اعدادو تعداد زيات اوږد شي يا د څو اشارو درلودونکي وي نو د زيات وخت او زحمت ته ضرورت لري. لدې وجې ښه طريقه هم وجود لري.

هر کله چې مخکنيو فورمولونو ته پراخوالي ورکړو نو لور چې:

$$\sum (X - \bar{X})^2 = \sum (X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)$$

$$\sum X^2 - 2\bar{X} \sum X + n\bar{X}^2$$

$$\sum X^2 - 2\bar{X} \sum X + \bar{X} \sum X$$

$$\sum X^2 - \bar{X} \sum X$$

$$\sum X^2 - \left(\frac{\sum \bar{X}}{n}\right)^2$$

نظر دي رابطي ته کولای شو چي (7) فورمول د دوهم ځل لپاره پدي ډول وليکو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\sum X^2 - \frac{\sum X^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2} \dots (8)$$

لکه 2,4,6,8,11 په شميرو کي:

$$\delta = \sqrt{\frac{234}{5} - \left(\frac{30}{5}\right)^2} = \sqrt{90.8} = 3.29$$

هرکله چي د يو لړۍ اعدادو انحراف نظر فرضي ثابت (A) ته وسنجول شي، نو معياري انحراف کولای شو د لاندي فورمول په وسيله تر لاسه کړو.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d^2}{n}\right)^2} \dots (9)$$

$$d = X - A \wedge X = A + d$$

ثبوت:

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{\sum (A + d)}{n} = \frac{nA}{n} + \frac{\sum d}{n} = A + d$$

$$X - \bar{X} = (A + d) - (A + \bar{d}) = d - \bar{d}$$

$$\delta = \frac{\sum (d - \bar{d})^2}{n} \dots (10)$$

نظر مخکي نو عمليو ته کولای شو چي (8) فورمول په اړه وليکو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d^2}{n}\right)^2}$$

مثلاً، د 5 مخکنيو شميرو په اړه لرو چي:

$x$	$d$	$d^2$
2	-1	1
3	0	0



	65	
6	3	9
8	5	25
11	8	64
جمع	15	99

$$d = x - A \wedge A = 3$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{99}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2}$$

$$\delta = \sqrt{19.8} = 3.29$$

د تصنيف شوو شميرو معياري انحراف پورتنيو فورمولونو ته ورته (مشابه) هم کولای شو په څولارو سنجش کړو. په هغه صورت کي چي د تولگي وسط او اړوندي فريکونسي گاني په کار واچوو کولای شوله لاندي فورمول څخه استفاده وکړو.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{\sum f}} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}} \dots (11)$$

په دي ځای کي  $f$  فريکونسي گاني،  $X$  د تولگي وسط او  $\bar{X}$  داروندي وپشني حسابي اوسط دي او  $d = x - \bar{x}$  وضع شوي دي. دافورمول څرنګه چي دمخکني فورمول په اړه ورکړل شوي دي کيداي شي داسي وليکل شي:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fX}{\sum f}\right)^2} \dots (12)$$

همدارنګه کولای شو چي لنډ فورمولونه هم را وباسو. که چيري د اعدادو انحراف د  $(A)$  د يو فرضي اوسط په توګه وسنجول شي يعني  $d = X - A$  وي (يعني د (10) فورمول سره ورته) نو وبه لرو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \dots (13)$$

او که انحراف د تولگيو د موقیعت په نظر يعني د تولگي د واټن په حدونو څرګند کړو د تولگيو د ګډ واټن په صورت کي لیکو چي:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f d'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f d'}{\sum f}\right)^2} \cdot C \dots (14)$$

په دې ځای کې د  $d'$  د ټولګي د ګډ واټن په نظر انحراف او  $C$  د ټولګيو ګډ واټن دی. باید یادونه وشي چې د (11) او (14) فورمولونو د واټن ځوابونه ورته یا مشابه وي.

د مثال په ډول، په دې ځای کې د (12) او (14) فورمولونه د 142 کورنیو د کلني عاید په وېشنه کې د ټولګي د واټن په واحدونو په لنډه طریقه تطبیق کړو.

د (12) فورمولونو تطبیق او عملیه په (1) جدول کې او همدارنګه (14) د فورمولونو تطبیق او عملیه په (2) جدول کې په لنډه توګه وړاندې شویده.

(12) فورمول نظر (1) جدول دارنګه لیکلای شو:

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\frac{\sum f X^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f X}{\sum f}\right)^2} \\ &= \frac{653396.89}{142} - \left(\frac{9631.50}{142}\right)^2 \\ &= 4601.3865 - 4600.5698 \\ &= 0.8169 = 0.90 \end{aligned}$$

د (12) فورمول هم د انحراف د معیاري شکل تعریف لري. ددې فورمولونو تطبیق د زیات وخت نیول او ډیر کار ته ضرورت لري. په ځانګړي توګه کله چې عددونه اوږده او د کلاسونو تعداد زیات شي نو د (12) او (13) فورمولونه په دواړو حالاتو کې که فاصله مساوي وي او که نا مساوي کولای شو چې په کار یوسو. په هغه صورت کې چې د کلاسونو فاصله ګډه وي نو د (14) فورمول په تصنیف شوو اعدادو کې د معیاري انحراف لپاره لنډ ترینه او موثره طریقه ده.

(1) جدول د 142 کورنیو د کلني وسطي عاید د معیاري انحراف سنجش په کال 1355 کې

کلني وسطي عاید	فريکونسي	د ټولګي وسط	$fX$	$fX^2$
زر افغانی	$f$	$X$		
66.00-66.49	11	66.25	72875	48279.69
66.50-66.99	15	66.75	1001.25	66833.44
67.00-67.49	24	67.25	1614.00	108451.50
67.50-67.99	40	67.75	2710.00	183602.50
68.00-68.49	20	68.25	1365.00	43161.25
68.50-68.99	14	68.75	962.50	66171.88
69.00-69.49	11	69.25	761.75	52751.19
69.50-69.99	7	69.75	488.26	34055.44
مجموعه	142		9631.50	653396.89

(2) جدول د 142 کورنیو د کلني عاید په وېشنه کې د معیاري انحراف سنجش د ټولګي په واحدونو په لنډه طریقه تطبیق کړو.

کلني وسطي عاید زر افغانی	فریکونسي $f$	$d'$	$fd'$	$fd'^2$
66.00-66.49	11	3	33	99
66.50-66.99	15	2	30	60
67.00-67.49	24	1	24	24
67.50-67.99	40	0	0	0
68.00-68.49	20	1	20	20
68.50-68.99	14	2	28	56
69.00-69.49	11	3	33	99
69.50-69.99	7	4	28	112
مجموعه	142		22	470

نظر (2) جدول ته (14) فورمول حل کولای شو:

$$\delta = c. \sqrt{\frac{fd'^2}{f} - \left(\frac{fd'}{f}\right)^2} = 0.5 \sqrt{\frac{470}{142} - \left(\frac{22}{142}\right)^2} = 0.5(1.81) - 0.15 = 0.83 \text{ (زر افغانی)}$$

په تصنیف شوو اعدادو کې معمولاً د معیاري انحراف ارزش یوڅه لږ لوړ دی. نظر په معیاري انحراف کې په هغو اعدادو کې چې تصنیف شوي نه وي شنجول کېږي.

له تحلیلي نگاه څخه د کلاسونو د فاصلو اندازه په تصنیف شوو اعدادو کې باید کوچني وي د معیاري انحراف له ربع څخه.

له تشریحي نگاه څخه سربیره پر تیروتنو کولای شو د کلاسونو د فاصلو اندازه حتی د معیاري انحراف نیمایي شي.

### 2.13 نسبي انحراف (د انحراف ضريب)

کولای شو دوه یا زیاتې لړۍ (سلسلې) د اړوندو لړیو د اعدادو د خوریدني (پراگندگۍ) د څرنګوالي د پوهیدو په غرض چې د پوره یا تقریباً ورته اوسطونو لرونکې وي پرتله (مقایسه) کړو، په ځینو حالاتو کې بیلا بیلې وېشنې بیل یا متفاوت اوسطونه لري او یا په بیلا بیلو واحدونو باندې څرګندېږي. په دې حالت کې د هغوی د معیاري انحراف پر تلنه نا ممکنه وي د بیګي په ډول د طب د ډاکترانو د کلني عاید د وېشنې معیاري انحراف 1500 افغانۍ او د پوهنتون د استادانو معیاري انحراف 1000 افغانۍ وي پدې به دلالت ونکړي چې انحراف د طب د ډاکترانو په عاید کې د 150 سلنې په اندازې، انحراف د پوهنتون د استادانو په کلني عاید کې وي، یواځې په هغه حالت کې کولای شو تعبیر کړو چې په دواړو ګروپونو کې د کلني عاید اوسط مساوي وي. که د لومړني ګروپ د کلني عاید اوسط مثلاً 75000 او د دویمي 36000 وي د استادانو په عاید کې نسبي انحراف نظر د طب د ډاکترانو عاید ته زیات دي. په حقیقت کې د انحراف د دوو مطلقه ارزښتونو په منځ کې توپیر له له متفاوتو اوسطونو سره په یوازیتوب (تنهایی) سره پرتلني اساس نشي کېدای. د مقیاسونو په دې حالت کې باید مطلقه انحراف په نسبي انحراف تبدیل شي، ترڅو د اړوندو ویشنو د پرتلني امکان میسر شي.

په دې ځای کې دري ډوله د نسبي انحراف مقیاس مطالعه کېږي.

- د معیاري انحراف ضريب
- د وسطي انحراف ضريب
- د کوارټیلونو د انحراف ضريب

د معیاري انحراف ضريب

د نسبي انحراف له مقیاسونو څخه یو مقیاس چې په عمل کې زیات په کار اچول کېږي د نسبي انحراف ضريب دی، دا ضريب معمولاً په  $V$  افاده کېږي او پر حسابي اوسط باندې د معیاري انحراف له نسبت څخه عبارت دی یعنې:

$$V = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{حسابي اوسط}} = \frac{\delta}{\bar{X}} \dots\dots\dots (15)$$

مثال د طب د ډاکترانو او د پوهنتون د استادانو د کلني عاید په اړه د انحراف ضریبونه عبارت دی له:

$$V_1 = \frac{1500}{75000} = 0.2 \text{ یا } 2\%$$

$$V_2 = \frac{1000}{36000} = 0.028 \text{ یا } 2.8\%$$

### 2.14 د وسطي انحراف ضريب

د بلې خوریدني نسبي مقیاس چې ډیر زیات معمول دی د وسطي انحراف د ضريب په نوم یادېږي چې لاندې په  $V_a$  باندې اعاده شويدي چې پر حسابي اوسط باندې له وسطي انحراف څخه عبارت دی.

$$V_a = \frac{\text{وسطي انحراف}}{\text{حسابي اوسط}} = \frac{MD}{\bar{X}}$$

که په یوه وېشنه کې د  $\bar{X}$  حسابي اوسط او د  $MD$  وسطي انحراف د هغو طریقو په اساس چې مخکې مطالعه شويدي پیدا کړو. د  $(V_a)$  د وسطي انحراف ضریب هم په هغوی کې ویشو او په نسبت یا معمولاً په فیصدي یې څرگندوو.

د مثال په ډول په 2,3,6,8,11 پنځو عددونو کې څرنگه چې مو مخکې ولیدل.

$$\bar{X} = 6$$

$$MD = 2.8$$

د وسطي انحراف ضریب په دې اعدادو کې عبارت دی له:

$$V_a = \frac{MD}{\bar{X}} = \frac{2.8}{6} = 0.0466 \text{ یا } 46.6\%$$

هرکله چې وسطي انحراف نظر میدیان ته وسنجول شي د (3) فورمول به ولیدل شي، نو کولای شو چې (16) فورمول دارنگه ولیکو:

$$V_a = \frac{AD}{\bar{X}} \dots (16)$$

په ځانگړي توگه په بعضي ځایونو او حالاتو کې، د دوو سرته رسیدلو کلاسونو په وروستیو کې یوه وېشنه خلاصیږي، او یا دغیر هادي ارزښتونو وېشنه وجود لري.

مثال: دلاندې دفعاتو توزیع لپاره چې په هره ونه کې دمنو شمیر ښيي، وسطي انحراف یې محاسبه کړئ؟

Classes	65-84	85-104	105-124	125-144	145-164	165-184	185-204
$f_i$	9	10	17	10	5	4	5

حل:

classes	$x_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$f_i  x_i - \bar{x} $
65-84	74.5	9	610.5	-48.0	432.0
85-104	94.5	10	945.0	-28.0	280.0
105-124	114.5	17	1946.5	-8.0	136.0
125-144	134.5	10	1345.0	12.0	120.0
145-164	154.5	5	772.5	32.0	160.0
165-184	174.5	4	698.0	52.0	208.0
185-204	194.5	5	972.5	72.0	360.0
		$\sum f_i = 60$	7350		1696.0

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{7350.0}{60} = 122.5gr$$

$$MD = \frac{\sum fi|x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{1696.0}{60} = 28.27gr$$

### 2.15 کوانتیل Quantiles

مخکې مو وویل چې میانه معلومات په دوومساوی برخو ویشی، په همدې ترتیب کولی شو چې معلومات په څلورو، لسو او یاسلو مساوی برخو وویشو.

د کوانتیل ډولونه: 1. کوارتیل 2. ډسایل 3. پرسنتایل

1. کوارتیل (Quartiles): که چیرې معلومات په څلورومساوی برخو وویشل شي، هرې یوې برخې ته کوارتیل ویل کیږي .

عموماً دوه ډوله کوارتیل وجود لري  $Q_1$  ته لومړی کوارتیل او  $Q_3$  ته درېیم کوارتیل وایل کیږي .

همدارنگه  $Q_1$  او  $Q_3$  ته تیب او لوړ کوارتیل په ترتیب سره وایي. دویم کوارتیل  $Q_2$  ته میانه وایي.

کوارتیل دلاندې فورمولونو پواسطه پیدا کوو.

$$Q_1 = \text{رقم ارزښت} \frac{n+1}{4} \quad Q_2 = \text{رقم ارزښت} \frac{2(n+1)}{4} \quad Q_3 = \text{رقم ارزښت} \frac{3(n+1)}{4}$$

لومړی مثال: دلاندې مشاهداتو څخه تیب کوارتیل ، دویم کوارتیل او لوړ کوارتیل په لاس راوړئ

15 , 20 , 25 , 25 , 25 , 30 , 30 , 35 , 35 , 40 , 45

حل:

$$\frac{n+1}{4} = c$$

$$\frac{11+1}{4} = 3 \Rightarrow r = 3^w = 0 \text{ (a)}$$

$$Q_1 = (1 - w)X_r + w \cdot x_{r+1} = (1 - 0)X_3 + 0 \cdot X_4 = X_3 \quad Q_1 = 25$$

$$b) \frac{2(n+1)}{4} = C \Rightarrow \frac{2(11+1)}{4} = 6, r = 6^w = 0$$

$$Q_2 = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0)X_6 + 0 \cdot X_7 = X_6$$

$$Q_2 = X_6 = Me = 30$$

$$c) \frac{3(n+1)}{4} = C \Rightarrow \frac{3(11+1)}{4} = 9, r = 9^w = 0$$

$$Q_3 = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0)X_9 + 0 \cdot X_{10} = X_9 \quad Q_3 = X_9 \Rightarrow Q_3 = 35$$

د کوارتیل انحراف ضریب

د انحراف ضریب نظر کوارتیلونو ته چې لاندې په  $V_q$  سره افاده شوي د هغوی په مجموعي باندې د دریم کوارتیل او لومړی کوارتیل د توپیر له نسبت څخه عبارت دی یعنې:

$$V_q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \dots (17)$$

د مخکنیو انحرافونو ضریبونه کولای شو په کسري، اعشاري، یا څرنګه چې زیات معمول دي په فیصدي یې څرګندوو.

د مثال په ډول لکه څرنګه چې مخکې هم ولیدل شول د 142 کورنیو وسطي کلي عاید په وشنه کې.

$$Q_3 = 68.41$$

$$Q_1 = 67.21$$

نو وروسته پدې وېشنه کې:

$$V_q = \frac{68.41 - 67.21}{68.41 + 67.21} = \frac{1.20}{135.62} = 0.009 = 0.9\%$$

په لنډه توګه باید ووايو دوه یا زیاتي وېشنې د انحراف او خوریدني له پلوه یواځي هغه وخت پرتله کولای شو چې د کټ مټ اوسط یا تقریبا د اوسط لرونکي وي او په ورته (مشابه) واحد باندې افاده شوی وي پرته له دې باید د نسبي انحراف مقیاسونه په کار واچول شي.

د ویشنو د پرتلني (مقایسي) پر وخت باید خپله مقیاس په کار واچول. شي او نشو کولای  $V$  یوه وېشنه یا  $V_a$  او  $V_q$  له بلي وېشنې سره پرتله کړو، او همدارنگه نشو کولای  $\delta$  یوه وېشنه یا  $AD$  او  $QD$  له بلي وېشنې سره پرتله کړو.

**2. ديسايل (Deciles):** په دی کې معلومات په لسو مساوی برخو وېشل کېږی او په  $D_1, D_2, \dots, D_9$  یی وېشو. پنځم ديسايل د میانی څخه عبارت دی.

$$D_1 = \text{د } \frac{n+1}{10} \text{ رقم ارزښت}$$

$$D_2 = \text{د } \frac{2(n+1)}{10} \text{ رقم ارزښت}$$

.....

.....

$$D_9 = \text{د } \frac{9(n+1)}{10} \text{ رقم ارزښت}$$

**لومړی مثال:** په لاندی معلوماتو کې  $D_3$  او  $D_5$  پیدا کړی.

82, 53, 54, 62, 60, 63, 46

لومړی معلومات په صعودی ډول تر تیبوو.

46, 53, 54, 60, 62, 63, 82

$$a) \quad \frac{3(n+1)}{10} = C \Rightarrow 3 \frac{(7+1)}{10} = 2.4$$

$$r = 2 \quad w = 0.4$$

$$D_3 = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0.4)X_2 + 0.4 \cdot X_3$$



$$D_3 = 0.6(53) + 0.4(54) = 31.8 + 21.6 = 53.4$$

$$b) \frac{5(n+1)}{10} = C \Rightarrow 5 \frac{(7+1)}{10} = 4$$

$$D_5 = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0)X_4 + w \cdot X_5 = X_4$$

$$D_5 = 60$$

3 . پرسنتیل (Percentiles): په دی کی معلومات په سلو مساوی برخو وپشل کیری او په  $P_1$  ,  $P_2$  .....  $P_{99}$  یی بنیو،  $P_{50}$  د میانی څخه عبارت دی.

$$P_1 = \text{رقم ارزښت} \frac{(n+1)}{100} \text{ د}$$

$$P_2 = \text{رقم ارزښت} \frac{2(n+1)}{100} \text{ د}$$

.....

.....

$$P_{99} = \text{رقم ارزښت} \frac{99(n+1)}{100} \text{ د}$$

لومړی مثال: په لاندی معلوماتو کی  $P_{30}$  او  $P_{60}$  پیدا کړئ.

82, 53, 54, 62, 60, 63, 46

لومړی معلومات په صعودی ډول تر تیبوو.

46, 53, 54, 60, 62, 63, 82

$$a) \frac{30(n+1)}{100} = C \Rightarrow \frac{30(7+1)}{100} = 2.4 \quad r = 2^w = 0.4$$

$$P_{30} = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0.4)X_2 + 0.4 \cdot X_3$$

$$= 0.6(53) + 0.4(54) = 53.4 \Rightarrow P_{30} = 53.4$$

$$b) \frac{60(n+1)}{100} = C \Rightarrow \frac{60(7+1)}{100} = 4.8 \quad r = 4^w = 0.8$$

$$P_{60} = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0.8)X_4 + 0.8 \cdot X_5$$

$$P_{60} = 0.2(60) + 0.8(62) \Rightarrow P_{60} = 61.6$$

## دریم فصل

تصادفی متحول او د هغه واریانس، دریاښی امید او معیاری انحراف

### 3.1 دا احتمالاتو تابع

تعریف ۱: فرضو چې  $X$  یو اتفاقي متحول او  $x_1, x_2, \dots, x_n$  دنوموړي اتفاقي متحول ارزښتونه دي پدې صورت

کې دنوموړي متحول دا احتمالاتو تابع دی چې  $X$  متحول د هر یوه ارزښت د تحقیق پیدا کولو احتمال توضیح کوي

یابه بل عبارت: احتمال ددې چې  $X$  اتفاقي متحول د  $x_i$  ارزښت ولري دا احتمالاتو په تیوري کې دا احتمالاتو

دتابع په نامه یادېږي په ریاضیکي توګه کولای شو هغه په لاندې ډول سره افاده کړو:

$$F_x(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

تعریف ۲: هغه تصادفی متحول چې په احصایه او احتمالاتو کې تر څیړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغه

تابع څخه دی چې دتعریف ناحیه یې نمونې فضضاء او دقیمتونو ناحیه یې حقیقی اعداد وی

که ،  $p(X = x_i)$  ولرو نو  $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)] \dots [x_n, f(x_n)]$  ته د مجزا (کسسته) احتمال

تابع وایی.

د تجمعی او پیوسته احتمال تابع په  $F(x) = p(X \leq x)$  بڼه بنودل کېږي.

دیوه اتفاقي متحول دا احتمالاتو تابع لاندېني مشخصات لري :

$$1) P(X = x_i) = F_x(x_i) \geq 0 \quad 1) \quad 2) \sum_{i=1}^n F_x(x_i) = 1$$

### 3.2 د ریاضی تمه (امید) (math expectation)

که  $x$  ناڅاپی مجزا متحول وی په دی حالت کی اوسط (expected value) چی د  $x$  تصادفی مجزا

$$E(X) = \sum_x x P(X = x) \quad \text{متحول چی د } E(X) \text{ په بڼه بنودل کیری عبارت دی له}$$

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) \dots x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \dots \dots \dots * \quad \text{یا}$$

که  $f(x_i) = p_i$  سره وښیو چی احتمال دی نو د ریاضی امید په لاندی ډول هم لیکلای سو

$$+x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad E = E(x) = x_1 p_1$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \dots \dots \dots **$$

په هغه صورت کی چی  $X$  لایتناهی قیمتونه واخلی د ریاضی امید یی په لاندی ډول دی

$$E = E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

په پورته فورمول کی  $p$  احتمال دی

$$E(X^k) = \sum_x x^k P(X = x) \quad \text{همدا ډول که } k \text{ یو مثبت عدد وي نو:}$$

که تصادفی متحول د  $n$  مقدار سره راکړل سوی وی او احتمال یی یوشان وی یعنی  $p_j = 1/n$  نو په دی صورت د ریاضی امید (اوسط) عبارت دی له

$$E = x_1 \left(\frac{1}{n}\right) + x_2 \left(\frac{1}{n}\right) + x_3 \left(\frac{1}{n}\right) + \dots + x_n \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$$

تعریف: که چیری  $X$  یو تصادفی متغیر وي، د  $X$  واریانس د  $V(X)$  په بڼه بنودل کیری او داسی تعریف شویدی

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \text{یا}$$

معیاری انحراف عبارت له:  $\sigma = \sqrt{V(X)}$

مثال: د لاندی جدول کی په پنځه نمری تیسټ کی په ترتیب سره د ۲، ۳، ۴، ۵ نمر و اخستلو احتمال درکړی

سوی دی د ریاضی امید یی پیدا کړی (د نمر و اخستلو احتمالی اوسط) پیدا کړی

$x$	2	3	4	5
$p$	0.2	0.4	0.3	0.1

حل:  $E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 2(0.2) + 3(0.4) + 4(0.3) + 5(0.1) = 3.3$

د پورته احتمال پر بنسټ ویلای سو چی په پنځه نمری ازموینه کی به ۳، ۳ نمری و اخستل سی

دریاضی د امید خواص:

په هغه صورت کی چی متحولین  $x, y$  تصادفی وی او  $c$  حقیقی عدد وی

- 1)  $E(cx) = cE(x)$
2.  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
3.  $E(XY) = E(X)E(Y)$
- (۴)  $E(a) = a$
- (۵)  $E(aX + b) = aE(X) + b$

$$1. E(cx) = \sum_x cf(x) = c \sum_x xf(x) = cE(x)$$

تیورم: د یو شمیر تصادفی متغیرونو د مجموعی امید (نمه) مساوی ده د هغوی د امیدونو د مجموعی سره

ثبوت: راځی چی د  $x$  او  $y$  تصادفی متغیرونه په پام کی ونیسو. داسی چی  $x$  د  $x_1$  د مقادرو څخه دی

او  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  همدانگه د  $y$  لپاره  $j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 E(x+y) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (x_i + y_j) P_{ij} = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i P_{ij} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m y_j P_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^m x_i \left( \sum_{j=1}^n P_{ij} \right) + \sum_{j=1}^m y_j \left( \sum_{i=1}^n P_{ij} \right) \\
 &= \sum_i x_i P_{ij} + \sum_j y_j P_{ij} = E(x) + E(y)
 \end{aligned}$$

$$\therefore E(x+y) = E(x) + E(y)$$

$$\text{Since } \sum_{j=1}^n P_{ij} = P_j \text{ and } \sum_{i=1}^m P_{ij} = P_i .$$

د پورته ثبوت پر بنسټ لرو  $E(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) + \dots + E(x_n)$ :

يا په لنډ ډول:

$$2. E(x+y) = \sum \sum (x+y) f(x,y) = \sum \sum x f(x,y) + \sum \sum y f(x,y) = E(x) + E(Y)$$

ټيورم: د يو شمير خپلواکو تصادفي متحولونو د حاصل ضرب رياضيکي تمه د دوی د تمو له حاصل ضرب سره مساوي ده.

$$E(xy) = \sum_j \sum_i x_i y_j P_{ij}$$

يعنی:

$$P_{ij} = P_i P_j \quad \text{لرو} \quad \text{ثبوت: د قانون په اساس}$$

$$\sum_j \sum_i x_i P_i y_j P_j = \sum_i x_i P_i \sum_j y_j P_j = \sum_i P_i x_i E(y) = E(y) \sum_i P_i x_i = E(x) E(y)$$

$$3. E(xy) = \sum \sum xy f(x,y) = \sum_x [x f(x) \sum_y y f(y)] = \sum_x [x f(x) E(y)] = E(x) E(y): \text{ يا}$$

د پورته ثبوت پر بنسټ ليکلای سو.  $E(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n) = E(x_1) \cdot E(x_2) \cdot E(x_3) \dots E(x_n)$ .

يادونه:  $E(x, y) = E(x) E(y)$  د  $x$  او  $y$  خپلواکي تضمين نه کوي.

تعریف: کہ چیری X یو تصادفی متغیر وی، د X واریانس د  $V(X)$  په بڼه بنودل کیږی او داسی تعریف شویدی

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \text{یا}$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

معیاری انحراف عبارت له :

$$\begin{aligned} V(x) &= \sigma^2 = E[(x - E(x))^2] = E[(x - \mu)^2] = \\ &= \sum_{\text{all } x} (x - \mu)^2 p(x) = \sum_{\text{all } x} (x^2 - 2x\mu + \mu^2) p(x) = \\ &= \sum_{\text{all } x} x^2 p(x) - 2\mu \sum_{\text{all } x} xp(x) + \mu^2 \sum_{\text{all } x} p(x) = \\ &= E[x^2] - 2\mu(\mu) + \mu^2 (1) = E[x^2] - \mu^2 = E[x^2] - [E[x]]^2 \end{aligned}$$

$$\text{Standard Deviation : } \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

$$\dots \text{***} V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - [E[x]]^2$$

د واریانس ځینی خواص:

$$(a) V(a) = 0 \quad (b) V(aX \pm b) = a^2 V(X)$$

$$(c) V(aX + bY) = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 + 2ab \sigma_{XY}.$$

د برنولی په توزیع کی دریاضی امید او واریانس

د برنولی په توزیع کی چی  $p$  کامیابی او  $q$  ناکامی نومول سویده د  $x=0$  لپاره ناکامی او د  $x=1$  لپاره

کامیابی ده چی په لاندی ډول ده

X	0	1
P	Q	P

$$f(1) = p(x=1) = p, \quad f(0) = p(x=0) = q = 1-p, \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$, \quad f(x) = \{p, \quad x=1\} f(x) = \{p^x(1-p)^{1-x}, x=0, \}$$

$$E(X) = \sum_x xP(x) = (0)(1-p) + (1)(p) = p$$

$$Var(X) = \sum_x (x-p)^2 P(x) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2(p)$$

$$= p(1-p)(p+1-p) = p(1-p) = pq$$

### 3.3 دبینومیل توزیع دریاوسی امید او واریانس Mean and variance of the Binomial

**distribution** -وه حده توزیع دبرنولی دتوزیع په شان ده چی د  $n$  تجربولپاره یی احتمال یوشان دی او په

$B(n,p)$  سره بنودل کیږی < چی  $p$  احتمال او  $n$  دتجربوشمیر دی او د  $k$  کامیابیو لپاره په لاندی ډول لیکل

کیږی

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + \dots + p = np$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n) = np(1-p) = npq$$

یا :

$$Mean = \mu = \sum_{x=0}^n x \cdot b(x;n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^n x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=1}^n \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{(n-x)} \\
&= np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{(n-x)}
\end{aligned}$$

Put  $y = x - 1$ ,  $\therefore x = 1 + y$

When  $x = 1$  implies  $y = 0$

$x = 1$  implies  $y = x - 1$

$$\begin{aligned}
&= np \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y q^{(n-y-1)} \\
&= np (q + p)^{(n-1)}
\end{aligned}$$

So,  $\mu = np$  is Mean of Binomial distribution.

### 3.4 د بینومیل توزیع واریانس Variance of the Binomial Distribution

$$\begin{aligned}
E(X)^2 &= \sum_{x=0}^n x^2 b(x, n, p) \\
&= \sum_{x=0}^n [x(x-1) + x] b(x, n, p) \\
&= \sum_{x=0}^n x(x-1) b(x, n, p) + \sum_{x=0}^n x b(x, n, p) \\
&= \sum_{x=0}^n x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)} + \mu \\
&= \sum_{x=2}^n \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x q^{(n-x)} + np \\
&= n(n-1) p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{(x-2)} q^{(n-x)} + np
\end{aligned}$$

$y = x - 2$   $\therefore x = 2 + y$

$x = 2 \implies y = 0$

$\Leftarrow x = n$  implies  $y = n - 2$

$$= n(n-1) p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y!(n-2-y)!} p^y q^{(n-2-y)} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} {}^{(n-2)}C_y p^y q^{(n-2-y)} + np$$

$$= n(n-1)p^2 (q+p)^{n-2} + np$$

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2$$

$$= np(1-p)$$

∴

$$\sigma^2 = npq \quad , \quad \sigma = +\sqrt{npq} .$$

مثال : که یوه سکه شپږ ځل و غورل سی دشیر راتلو لپاره یی امیدریاضی او واریانس حساب کری  
حل:

$$E(x) = \mu = np = 6 \left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$Var(x) = \sigma^2 = npq = 6 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = 1.5$$

$$\text{standard } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.5} = 1.22$$

مثال: که دوی سکی یو ځای و غورځول سی دشیر راتلو لپاره یی د ریاضی امید او واریانس پیداگری

حل:

X = x	0	1	2	Total
P(X = x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\text{Mean: } \mu = E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\begin{aligned}\text{Variance: } \sigma^2 &= V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{2}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - (1)^2 \\ &= \frac{2}{4} + 1 - 1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

مثال: دلاندى جدول څخه واريانس ، اوسط(اميد رياضى) سندر د انحراف پيدا كړى

$x_i$	1	2	3	4	5
$p_i$	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = (1 \times 0.1) + (2 \times 0.1) + (3 \times 0.2) + (4 \times 0.4) + (5 \times 0.2) = 3.5$$

$$E(X^2) = (1^2 \times 0.1) + (2^2 \times 0.1) + (3^2 \times 0.2) + (4^2 \times 0.4) + (5^2 \times 0.2) = 13.7$$

$$V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - [E[x]]^2 = 13.7 - (3.5)^2 = 1.45$$

$$\text{Standard deviation } \sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{1.45} = 1.20$$

### 3.5 دپواسن دا احتمال توزیع

په احصایه کې د پواسون توزیع د احتمال توزیع ده چې په یو مشخص وخت کې د یوې پېښې د څوځلې د احتمال لپاره کارول کېږي ، یا په بل عبارت د شمیرلو توزیع ده.

دا نوم د فرانسوي ریاضي دان سیمون دنیس پواسون (Simeon Denis Poisson) په ویاړ پر یادې توزیع ایښودل سوی دی.

استاد عبدالاحد ارین

دپواسن توزیع دلمدا د پرامتر سره په لاندی دی ډول ده  $f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ , for  $x = 0, 2, 3, \dots$  چی

یو صحیح مثبت عدد دی

دپواسن تقرب د بینومیل توزیع ته:

### Poisson Approximation to Binomial Distribution Theorem:

**Statement** بیان:  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  او  $np = \lambda$  محدود عدد دی، چی لمدال یو غیری صفری محدود عدد دی،

$$b(x, n, p) \rightarrow \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

**Proof:** Let us consider  $b(x, n, p)$  so that  $b(x, n, p) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(x-1))}{x!} p^x q^{n-x}$$

and given  $np = \lambda \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$  also  $q = 1 - p = 1 - \frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(x-1))}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(x-1))}{n^x} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \left(\frac{n}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{n-2}{n}\right) \dots \left(\frac{n-(x-1)}{n}\right) \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$b(x, n, p) = {}^n C_x p^x q^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} \left(\frac{n}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{n-2}{n}\right) \dots \left(\frac{n-(x-1)}{n}\right) \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x} \text{----- (1)}$$

Now as  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{x-1}{n} \rightarrow 0$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x \rightarrow 1 \text{ and } \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda} \rightarrow e^{-\lambda}$$

$\therefore$  from equation (1)  $b(x, n, p) \rightarrow \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ .

This completes the proof of the Poisson's Approximation to Binomial distribution theorem.

Note: 1.  $e^\lambda = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$

2. Show that  $\sum_{x=0}^{\infty} f(x, \lambda) = 1$

For that consider  $\sum_{x=0}^{\infty} f(x, \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1$

3.  $\lambda > 0$  is called the parameter of the Poisson Distribution.

4.  $P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

Applications of Poisson distribution:

Poisson distribution is applicable when n is very large and p is very small. Hence some of the applications of Poisson distribution are as follows:

1. Number of faulty blades produced by a reputed firm
2. Number of deaths from a disease such as heart attack or cancer.
3. Number of telephone calls received at a particular telephone exchange.
4. Number of cars passing a crossing per minute.
5. Number of printing mistake in a page of a book.

**Mean and Variance of Poisson distribution:**

Mean  $\mu = E(X)$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x, \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda$$

Therefore Mean =  $\mu = \lambda$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x, \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} [x(x-1) + x] f(x, \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) f(x, \lambda) + \sum_{x=0}^{\infty} x f(x, \lambda)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} + \lambda = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$\therefore E(X^2) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{Variance} = V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \quad \therefore \text{variance} = \lambda$$

$$\text{Standard Deviation} = \text{S.D.} = \sqrt{\text{Variance}} = \sqrt{\lambda}$$

**Note :** In a Poisson distribution mean always equal to the variance.

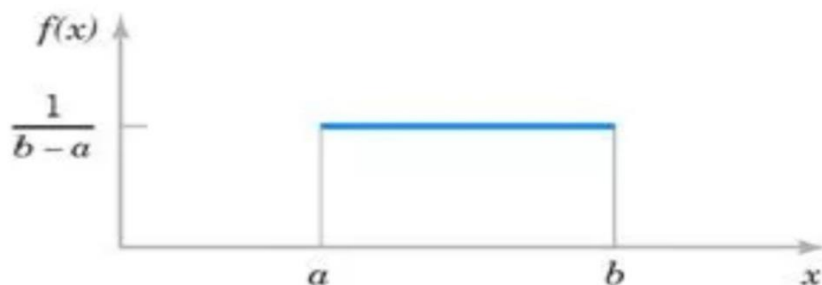
دیکنواخته (متصل) تصادفی متحولینو واریانس او اومیدریاضی:

په دی تابع کی ،  $x$  په  $[a, b]$  انتروال کی قرار لری او متحول یکنواخته (متصل) وی چی ریاضیکی بنودنه

یی په لاندی ډول ده ، یادونه باید وشي چی دریاضی امید په متصل او منفصل متحولینو کی یو ډول تعبیر لری

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = b - a$$



$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{b-a} \right]_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$Var(x) = DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{DX} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

مثال په  $[0,1]$  انټروال کې درياضي امید او واریانس خودی؟

حل:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var(x) = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(0-1)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

**نورمال توزیع:**

د  $x$  تصادفی متحول د  $f(x)$  تراکمی تابع سره د نورمال توزیع لرونکی دی که تابع په لاندې ډول راکړل سوی وی

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

تصادفی متحول چې د نورمال توزیع لرونکی وی په لنډ ډول په  $X \sim N(\mu, \sigma)$  شکل بنودل کیږی چې  $\mu$  د متحول امید یا اوسط،  $\sigma$  معیاری انحراف رابنی، یعنی نورمال توزیع کاملاً د معیاری انحراف او اوسط په واسطه مشخص کیږی

د  $f(x)$  تراکمی تابع دلاندې خواصو لرونکی ده

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad -1$$

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad -2$$

-3 د  $f(x)$  تابع د  $x = \mu$  قیمت سره اعظمی ده.

$$f(x + \mu) = f(-x + \mu) \quad -4$$

په  $\mu$  پر شاوخوا متناظره ده، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{او} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad -5$$

مثال:

د  $X$  تصادفی متحول توزیع د  $X \sim N(30,9)$  په شکل راکړل سویده احتمال یی داسی پیدا کړی چې  $X$  په  $[24,43]$  انټروال کې قیمت واخلي .

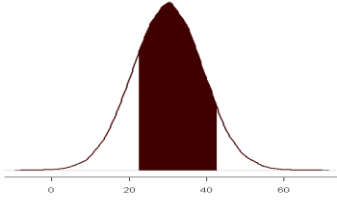
حل: لرو چې

$$P(24 \leq X \leq 43)$$



د تعريف په اساس اود نورمال توزیع په نظر کی نیولو سره لرو چی:

$$P(24 \leq X \leq 43) = \frac{1}{9\sqrt{2\pi}} \int_{24}^{43} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-30}{9}\right)^2\right) dx$$



$$P(24 \leq X \leq 43)$$

د محاسبی څخه وروسته پورته انتگرال 0.6737 کیږی .

معنا دا چی د  $X$  تصادفی متحول په احتمال د 0.6737 په یاد سوی انټروال کی قیمت اخلی

## څلورم څپرکی

### دمیلان تحلیل

### (The Regression Analysis)

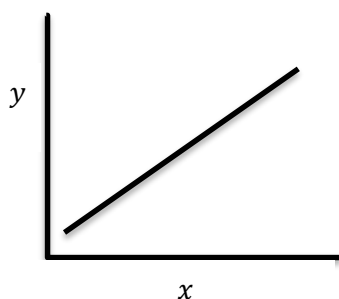
میلان اصطلاح په 1885م کال (frances Galton) په واسطه لومړی معرفي شوه، کوم چې دې اولادونو او والدینو د قدونو افادې موضوع څېړله، دې د اوموندله چې دلور قد لرونکی والدینو اولادونه لورقد او د تیبټ قد لرونکي والدین د تیبټ قد اولادونه لري، دغه پېښه یې د اوسط خواته د میلان Regress Toward (the Average) په نوم یاده کړه، دغه مرکزي اوزانونو میلان د گالټن له خوا د یو تمایل په نوم ونومول شو.

ځینې وخت یو مستقل متحول (Independent variable) او یو تابع متحول (Dependent variable) وي،

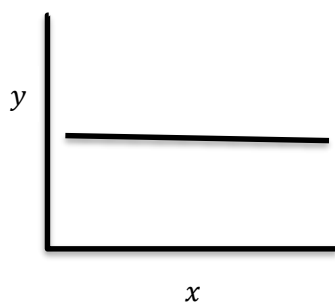
چې دیته ساده یا یو اړخیزه میلان (simple Regression) ویل کیږي که مستقل یا د تابع متحولین څو وی، په داسې حال کې د څو مستقلو متحولینو لرونکي میلانونه د څو گوني یا څوار خیزه میلان (Multiple Regression) په نوم یادېږي.

د بیلگې په ډول د بوټو وده د ځمکې د حاصلخیزې، د سرو تطبیق، اورښت، د تخم کیفیت او نورو پوري اړه لري.

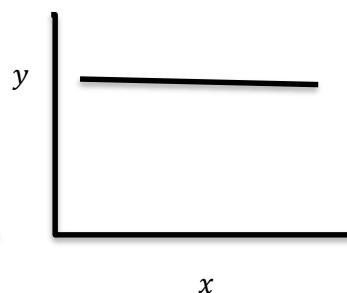
یا د یو تن فشار د هغې وزن، عمر اونورو پوري اړه لري،



Positive Slope



Zero Slope



Negative Slope

دمیلان بیلگې عبارت دي له:

- د نباتاتو حاصل او تولید چې د سرې په مختلفو اندازو شنه شوي وی.
- د پلاستیک کلکوالي د تودوخې په مقابل کې د وخت د مختلفو دورانونو لپاره

په پورتنیو بیلگو کې په یو مقیاس کې بدلون مطالعه شوی دی د یو مشخص بدلون د بل متحول سره، چې د تجربه کوونکي په واسطه انتخاب شوی دی.

**تعریف:** میلان یو احصائیوي تیوري ده، په کوم کې چې مونږ د یو متحول د ارزښتونو اټکل کوو او د دې په وسیله د بل متحول ارزښتونه پیژندل کیري .

فر ضوو چې دکال په پیل کې یو شاگرد له اوسط څخه زیاتی نمری اخستی دی اودکال په پای کې یې هم له اوسط څخه زیاتی نمری اخستی دی اوکه دکال په پیل کې له اوسط څخه کمی نمری اوهم یې دکال په پای کې له اوسط څخه کمی نمری اخستی وی ؛ نووایو چې دانمری یو دبل سره مثبت ارتباط لری اوکله دا سی حالت واقع کیري چې دیو متحول لوړې نمری دبل متحول دکوچنیونمر و سره جوړه شوی وی؛ نووایو چې دا دواړه متحوله یو دبل سره منفی ارتباط لری .

دارتباط ضریب دمتحولینو درابطو ترمنځ یوشاخص دی چې مختلف ډولونه لری؛ خو دهغوی اکثریت ځینی مشترک صفتونه لری که دوه متحوله په خپل منځ کې مثبته رابطه ولری نو دهغوی دارتباط ضریب مثبت یودی اوکه منفی رابطه ولری نو دارتباط ضریب منفی یودی اوکه دوه متحوله په خپل منځ کې هیڅ ارتباط ونه لری، نودارتباط ضریب یې صفر دی .

په دی ډول که دارتباط ضریب په  $r$  وښیونو:

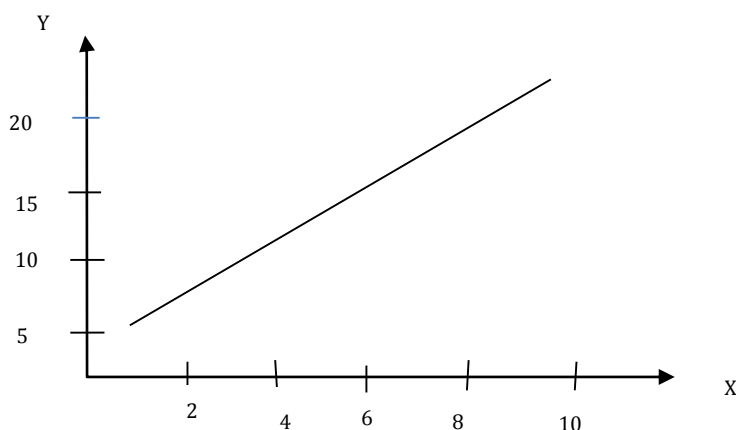
$$-1 \leq r \leq +1$$

په لنډه توگه که  $r = 1$  وی نو ددوه متحولینو تر منځ ارتباط کاملاً مثبت اوکه  $r = -1$  نوارتباط یې کاملاً منفی اوکه  $r = 0$  وی نو د دواړو متحولینو ترمنځ ارتباط وجود نه لری

د بیلگی په ډول: که د یو شمیر زده کوونکو د دوو ازموینو پایلی په پام کې ونیسو د لومړی ازموینی پایلی په  $x$  او ددویمی ازموینی پایلی په  $y$  وښیو، د  $x$  او  $y$  تر منځ رابطه دقایمو مختصاتو په افقی او عمودی محور باندی ښودلای شو داسی چې دنمر و هره جوړه په قایمو مختصاتو کې یوه نقطه ورکوی .

دنمر و لا ندی جدول د هغی د گراف سره په څو حالاتو کې په پام کې نیسو:

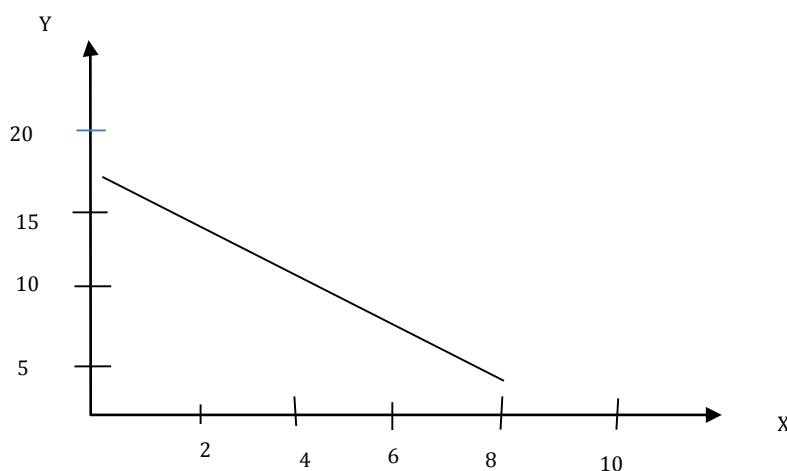
X	1	3	4	6	7	8	10
Y	4	8	10	14	16	18	22



گراف بنیوی چی نقطی په یو مستقیم خط قرار لری او د دوی ترمنځ رابطه  $r = 1$  ده.

اوکه دا جدول په پام کی ونیسو:

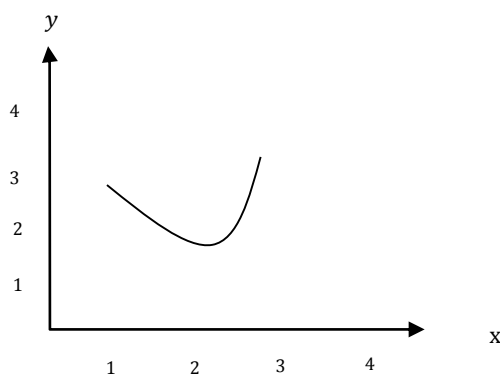
X	1	2	4	5	7	8
Y	16	14	10	8	4	2



په دی شکل کی د X او Y ترمنځ رابطه منفی ده یعنی  $r = -1$

په نورو حالاتو کی چی نفطی په بشپړ توگه په مستقیم خط نه وی، کیدای شی چی رابطه مثبت، کیدای شی رابطه منفی او کیدای شی هیڅ رابطه موجوده نشی او یا دا چی رابطه د منحنی خط په شکل وی لکه:

X	1	2	3	4
Y	3	2	4	5



ترسیم شوی کرنبه چی هر خومره مستقیمه وی، یا مستقیم والی ته نردی وی، دار تباط د درجی لوړوالی بنکاره کوی، که چیری د دوه متحولینو ترمنځ د بشپړ والی رابطه وجود ولری ټولی نقطی (قیمتونه) په یو مستقیم قرار نیسی، په داسی حالت کی د مستقل متحول له مخی د تابع متحول د تگلوری او قیمتونو پیشگویی ډیره اسانه ده، یعنی د بعدی قیمتونو دپیش بینی لپاره صرف له  $Y$  سره د یو موازی په رسمولو مور د  $X$  مربوط قیمت پیدا کولی شو، مگر په عمل کی د کرنی په سکټور کی ځینی وخت د دوو متحولینو تر منځ رابطه مکمله نه وی، یعنی ټول نقاط په یوه مستقیم نه واقع کیږی، نو په داسی مواردو کی د پیشگویی لپاره مهمه خبره دا ده چی مور داسی نقاط په نښه کرای شو، چی تر ممکنه حده د  $X$  د قیمتونو له مخی د  $Y$  پیشگویی خطا اصغری وی، نو که چیری داسی فرض کړو چی  $\hat{Y}$  پیشگویی شوی قیمتونه (نقاط) موجودوی، نو د واقعی  $(Y)$  قیمتونو او  $\hat{Y}$  ترمنځ تفاوت ته د پیشگویی خطا ویل کیږی چی هغه په لاندی ډول بنودل کیږی .

$$e = Y - \hat{Y}$$

کله چی له  $\hat{Y}$  څخه  $Y$  کوچنی وی، نو د پیشگویی خطا منفی ځواب ورکوی، خو د دی برعکس مثبت ځواب راوځی او که دواړه قیمتونه برابر وی، ځواب صفر یعنی خطا هیڅ وجود نه لری،

**مثال:** د یو زده کوونکی د نمر و پیش بینی د ورکړ شویو معلوماتو په اساس .

X	Y	X <sup>2</sup>	Y <sup>2</sup>	X·Y	$\hat{Y}$	e	$(Y - \hat{Y})^2$
7	19	49	369	133	18.4	0.6	0.36
6	15	36	225	90	16.6	-1.6	2.56
5	17	25	289	85	14.8	2.2	4.84
4	13	16	169	52	13.0	0	0
4	11	16	121	44	13.0	-2.2	4
3	13	9	169	39	11.2	1.8	3.24
2	7	4	49	14	9.4	-2.4	5.76
1	9	1	81	9	7.6	1.4	1.96
$=32\sum X$	$=104\sum Y$	$=156\sum X^2$	$=1446\sum Y^2$	$Y=466\sum X \cdot$	$=104\sum \hat{Y}$	$=0\sum e$	$\sum (Y - \hat{Y})^2$ $= 22$

دلته يوه مشاهده چې د  $X$  نمره يې 4 ده،  $Y - \hat{Y} = 0$  شوی، چې هيڅ خطا نه بلل کيږي يوه بله مشاهده چې هلته هم  $X = 4$  خو  $Y = 11$  دی، د هغې پيشگويي شوی نمره 13 ده په دې ځای کې دلته دارتباط ضريب موندلو لپاره فورمول لرو.

$$r = \frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2 \sum Y^2}}$$

دوه متحولينو خطي رابطه او معادله:

ددي له پاره چې يو متحول دبل متحول له مخې پيشگويي کړای شي؛ نو بايد د دواړو متحولينو ترمنځ درواپتو په هکله پوره معلومات ولرو يعنې لومړی د يو جمعيت د ټولو غړو په هکله چې د اندازه کيږي په هکله يې کومې پايلې موجودې وې ترکتني لاندې ونيول شي او وروسته د دې متحول له مخې د بل متحول لپاره پيشگويي کيدای شي. د پيشگويي په پروسه کې يوه مهمه فرضيه موجوده ده او هغه بايد مور ترکتني لاندې ونيسو چې د دوه متحولينو ترمنځ خطي رابطه ده. دا رابطه د يو مستقيم خط معادله ده چې  $Y = a + bx$  شکل لري

په دې معادله کې  $(x)$  مستقل متحول او  $Y$  د  $(x)$  متحول تابع دي،  $a$  او  $b$  ثابت عددونه دي چې  $a$  ته عمودي قاطع (Intercept) او  $b$  د مستقل متحول ضريب دی، چې ورته د مستقيم خط ميلان هم ويلای شو. چې همدا د دوه متحولينو تر مينځ يوه خطي رابطه بلل کيږي، او گراف يې د مستقيم خط شکل ځانته غوره کوي.

### Equation for a Straight line

#### Slope

$$\text{Dependent } v \leftarrow Y = a + bX \rightarrow \text{independent } v$$

#### Intercept

په دې ډول مونږ د  $(X)$  د بدلونونو له مخې  $Y$  پيشبيني کولای شو که چېرې  $(X = 0)$  شي؛ نو  $Y = a$  کيږي،  $(a)$  د گراف په ساحه کې د  $Y$  د محور په امتداد قيمتونه اخلي،  $(b)$  د رسم شوي مستقيم خط ميلان دي چې همدې ته د ميلان ضريب وايي. پوهيږو چې د مستقيم خط دترسيم لپاره کاپی ده چې دهغه دوه نقطې وپيژندل شي، که  $X$  ته د  $x_1$  او  $x_2$  قيمتونه ورکړو نو  $Y$  د  $y_1$  او  $y_2$  قيمتونه اخلي

$$y_1 = a + bx_1$$

$$y_2 = a + bx_2$$

$$y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1)$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

چی b دستقیم خط میل دی همدا رنگه که  $y_1 = a + bx_1$  له  $y = a + bx$  خخه تفریق کرونو لرو :

$$y - y_1 = b(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چی میل او یوه نقطه یی ورکړ شوی وی .

مثال:

X	2	3	5	7	9	10
Y	1	3	7	11	15	17

ارقام ورکړ شوی دی د دی ارقاموترمنخ خطی رابطه موجوده ده ، د هغی معادله په لاس راوړی.

$$x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = 3$$

$$y_1 = 1 \quad \wedge \quad y_2 = 3$$

$$y - 1 = \frac{3-1}{3-2} (x - 2) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 2) \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \Rightarrow y - y_1$$

$$y = 2x - 3$$

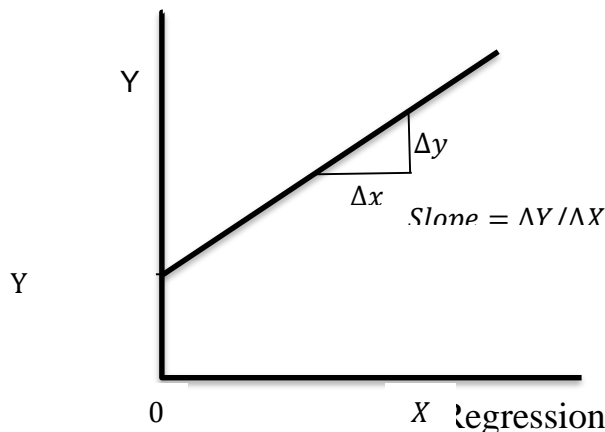
$$y = a + bx \Rightarrow y = -3 + 2x$$

$$a = -3 \quad \wedge \quad b = 2$$

### The Slope of Straight line

$$b = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

د خطي گرافونو د ترسيم لپاره دوه لاري شتون لري، لومړي دا چي مستقل متحول ته بېلا بېل قېمتونه ورکول کيږي، او له دې لاري د تابع متحول ارزښتونه يا قېمتونه څرگنديږي بله طريقه دا ده چي په وضعيه کمياتو کې دوه داسې ټکي چې دواړه محورونه (عمودي او افقي) قطع کړي معلوم او دواړو ټکو تر مينځ مستقيمه کرښه رسمېږي، يعني د دغه ډول خط په لاس راوړلو لپاره صرف د دوه نقطو د قېمت موجوديت کفايت کوي، په دې ډول روابطو کې د متحولينو تر مينځ خطي ارتباط (Linear Correlation) وجود لري.



د ميلان ضريب (Regression Co-efficient)  $X$  په  $Y$  د ميلان دوه ضريبونه وجود لري:

1. د ميلان ضريب د  $X$  په  $Y$  (Regression Co-efficient of  $X$  on  $Y$ )
2. د ميلان ضريب د  $Y$  په  $X$  (Regression Co-efficient of  $Y$  on  $X$ )

د ميلان ضريب  $b_{yx}$  او  $b_{xy}$  باندې بنودل کيږي.

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \wedge b_{yx} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad b_{xy} = r$$

د ميلان معادلي (Regression Equations)

يادونه: هغه معادله چې د متحولينو ترمنځ ارتباط افاده کوي د تخمين ياسنجش دمعادلي په نامه ياديږي.

$$y = a + bx$$

د  $y$  ترټولو ښه تخمين د  $a$  او  $b$  په ارزښت پوري اړه لري که د  $y$  ترټولو ښه تخمين په  $\hat{y}$  وښيو. چي، نومعادله يې عبارت ده له  $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$  ...2 په پورتنی شکل کې د تخمين بنودل شوی دی، لازمه ده چې  $a$



او  $b$  داسی تعین شی ترخو د مشاهداتو د انحرافاتو د مربعاتو مجموعہ اصغری وی یعنی  $\sum (y - y_i)^2$  اصغری شی. د دی موخی لپاره کہ 1 معادلہ پہ پام کی ونیسو لومری لیکلای شو .

$$\begin{aligned} &= \sum (a + bx) = \sum a + \sum bx = \sum a + b \sum x \sum y \\ &= na + b \sum x \dots \dots 3 \sum y \end{aligned}$$

اویا د 1 معادلہ دواړه خواوی په  $x$  کی ضربوو.

$$Xy = x(a + bx) \Rightarrow xy = xa + bx^2$$

$$= a \sum x + b \sum x^2 \dots \dots 4 \sum xy$$

دریمی معادلہ څخه د  $b$  قیمت په څلورمه معادلہ کی وضع کوو.

$$b = \frac{\sum y - na}{\sum x}$$

$$= a \sum x + \frac{\sum y - na}{\sum x} \cdot \sum x^2 \sum xy$$

دواړه خواوی په  $x$  ضربوو.

$$\sum x \cdot \sum xy = a \left( \sum x \right)^2 + \sum y \cdot \sum x^2 - na \sum x^2$$

$$\sum x \cdot \sum xy = a \left[ \left( \sum x \right)^2 - n \sum x^2 \right] + \sum y \cdot \sum x^2$$

$$a \left[ \left( \sum x \right)^2 - n \sum x^2 \right] = \sum x \cdot \sum xy - \sum y \cdot \sum x^2$$

$$\hat{a} = \frac{\sum y \cdot \sum x^2 - \sum x \cdot \sum xy}{n \cdot \sum x^2 - \left( \sum x \right)^2}$$

اوس که دی دریمی معادلہ څخه د  $a$  قیمت په څلورمه معادلہ کی وضع کړو په لاس راځی چی :

$$na = \sum y - b \sum x$$

$$a = \frac{\sum y - b \sum x}{n}$$

$$\sum xy = \frac{\sum x (\sum y - b \sum x)}{n} + b \sum x^2$$

$$n \cdot \sum xy = \sum x \cdot \sum y - b (\sum x)^2 + nb \sum x^2$$

$$n \cdot \sum xy = \sum x \cdot \sum y - b [(\sum x)^2 - n \sum x^2]$$

$$b [(\sum x)^2 - n \sum x^2] = \sum x \cdot \sum y - n \sum xy$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum xy - (\sum x) (\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

په دی ډول په لاس راغلل:  $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

دامعاده دنارمل معادلی (normal equation) په نامه یادیری.

مثال: د 8 زده کوونکو د پوهنتون او لیسې د دورې د نمر و لپاره لاندې جدول جوړوو که  $x_i$  د لیسې د دورې او  $y_i$  د پوهنتون د دورې نمرې وي نولیکو چی:

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i \cdot y_i$	$y_i^2$
85	2.3	7225	195.5	5.29
65	1.2	4225	78.0	1.44
73	1.5	5329	109.5	2.25
90	1.9	1800	171.0	3.61
82	1.8	6724	147.6	3.24
80	2.0	6400	160.0	4.00
68	1.3	4624	88.4	1.69
88	2.1	7744	184.8	4.41
$\sum x_i = 631$	$\sum y_i = 14.1$	$\sum x_i^2 = 50371$	$\sum x_i y_i = 1134.8$	$\sum y_i^2 = 25.93$

$$(\sum x_i)^2 = (631)^2 = 398161$$

$$(\sum y_i)^2 = (14.1)^2 = 198.81$$

$$\sum x_i \cdot \sum y_i = 631 \cdot 14.1 = 8897.1$$

ددى قيمتونوڭخه په استفاده ليكلای شو:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum y \cdot \sum x^2 - \sum x \cdot \sum xy}{n \cdot \sum x^2 - (\sum x)^2} \\ &= \frac{14.1(50371) - (631)(1134.8)}{8 \cdot (50371) - 398161} \\ &= \frac{710231.1 - 716058.8}{402968 - 398161} = \frac{-5827.7}{4807} = -1.2 \Rightarrow \hat{a} = -1.2 \\ \hat{b} &= \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \\ &= \frac{8(1134.8) - 631 \cdot 14.1}{4807} = \frac{9078.4 - 8897.1}{4807} = \frac{181.3}{4807} = 0.037 \end{aligned}$$

نو نارمل معادله عبارت ده له:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

$$\Rightarrow \hat{y} = -1.2 + 0.037x$$

$$\hat{y} = -1.2 + 0.037 \cdot 81 = -1.2 + 2.99 \Rightarrow \hat{y} = 1.79$$

د ميلان معادلې د ميلان د كرنسو الجبري افادې دي، دلته دوه د ميلان معادلې وجود لري

۱. دمیلان معادله د X په Y (Regression Co-efficient of X on Y)

۲. دمیلان معادله د Y په X (Regression Co-efficient of Y on X)

1. Regression equation of (X) on (Y)

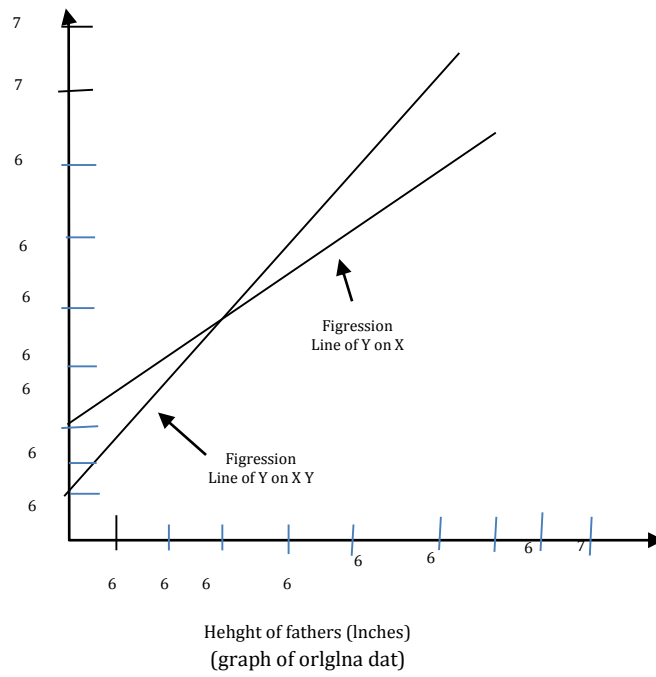
$$(x - \bar{x}) = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y})$$

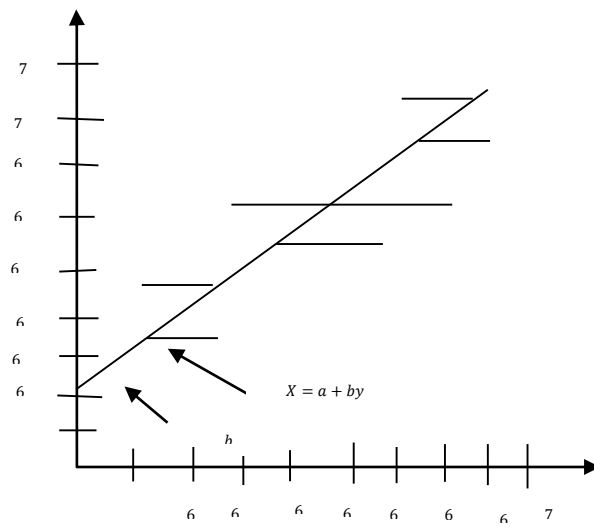
$$(x - \bar{x}) = b_{xy} (y - \bar{y})$$

2. Regression equation of (Y) on (X)

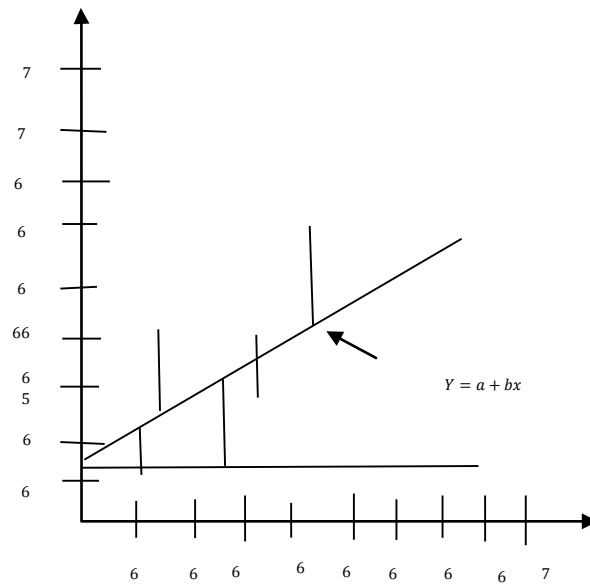
$$(y - \bar{y}) = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

$$(y - \bar{y}) = b_{yx}(x - \bar{x})$$





Height of  $(x, y, \dots)$  is minimum



Height of  $(x, y, \dots)$  is minimum

Regression of  $y$  on  $x$   $\sum (y - y_c)^2$  is minimum

1. بیلگه: لاندی د عرضی او تقاضا د ارقامو لپاره د پیوستون ضریب، د میلان ضریب او دمیلان معادلی محاسبه کری؟

Supply      400      200      700      100      500      300      600

Demand      50      60      20      70      40      30      10

حل:

X	Y	dx	dx <sup>2</sup>	Dy	dy <sup>2</sup>	Dxdy
400	50	0	0	10	100	0
200	60	-200	40000	20	400	-4000
700	20	300	90000	-20	400	-6000
100	70	-300	90000	30	900	-9000
500	40	100	10000	0	0	0
300	30	-100	10000	-10	100	1000
600	10	200	40000	-30	900	-6000
2800	280	0	280,000	0	2800	-24000

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2800}{7} = 400$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{280}{7} = 40$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{n}} = \sqrt{\frac{280000}{7}} = \sqrt{40000} = 200$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(Y - \bar{Y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dy^2}{n}} = \sqrt{\frac{2800}{7}} = \sqrt{400} = 20$$

$$r = \frac{\sum dx \cdot dy}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-24000}{7 \times 200 \times 20} = \frac{-24000}{28000} = -0.857$$

Regression coefficient of X on Y

$$b_{xy} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0.857 \frac{200}{20} = -8.57$$

Regression coefficient of Y on X

$$b_{yx} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -0.857 \frac{20}{200} = -0.0857$$

Regression Equation of X on Y

$$(X - \bar{X}) = b_{xy}(Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 400) = -8.57(Y - 40)$$

$$X - 400 = -8.57Y + 342.8$$

$$X = -8.57Y + 724.8 \quad \dots \dots \dots (I)$$

Regression Equation of Y on X

$$(Y - \bar{Y}) = b_{yx}(X - \bar{X}) \Rightarrow (Y - 40) = -0.0857(X - 400)$$

$$Y - 40 = -0.0857X + 34.28$$

$$Y = 74.28 - 0.0857X \quad \dots \dots \dots (II)$$

**2. بیلگه:** د خاوند او بنځي د عمر و نو تر منځ د پیوستون ضریب 0.80 دی، د خاوند اوسط عمر 25 کاله

او د بنځي اوسط عمر 22 کاله و، دلته معیاري انحرافونه 4 او 5 کلونه وو نو:

**a.** د میلان معادلي یې تشکیل کړئ

**b.** د خاوند عمر په هغه صورت کې پیدا کړئ چې بنځه 18 کاله عمر ولري

**c.** د بنځي عمر پیدا کړئ په هغه صورت کې چې خاوند یې 29 کاله عمر ولري

$$r = 0.8, \bar{x} = 25, \bar{y} = 22, \delta_x = 4, \delta_y = 5$$

Regression Equation of X on Y

$$(X - \bar{X}) = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 25) = 0.8 \frac{4}{5} (Y - 22)$$

$$X - 25 = 0.64Y - 14.08 \Rightarrow X = 0.64Y - 14.08 + 25$$

$$X = 0.64Y + 10.92 \quad \dots \dots \dots (I)$$

## Regression Equation of Y on X

$$(Y - \bar{Y}) = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{X}) \Rightarrow (Y - 22) = 0.8 \frac{5}{4} (X - 25)$$

$$Y - 22 = 1(X - 25) \Rightarrow y - 22 = X - 25$$

$$Y = X - 3 \quad \dots \dots \dots (II)$$

Age of husband when wife age is 18

$$X = 0.64Y + 10.92 = 0.64(18) + 10.92$$

$$\Rightarrow 11.52 + 10.92 = 22.44$$

Age of wife when husband age is 29

$$Y = X - 3 \Rightarrow 29 - 3 = 26$$

3. **بیلگه:** که چېرې ارقام په لاندې ډول درکړل شوي وي، د میلان معادلي د x په y او د y په x پیدا کړئ.

$$r = 0.97, \bar{x} = 66, \bar{y} = 133, \sigma_x = 3.32, \sigma_y = 14.2$$

## Regression Equation of X on Y(I)

$$(X - \bar{X}) = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 66) = 0.97 \frac{3.32}{14.2} (Y - 133)$$

$$X - 66 = 0.2267(Y - 133) \Rightarrow X - 66 = 0.2267Y - 30.16$$

$$X = 0.2267Y + 35.84 \quad \dots \dots \dots (I)$$

## Regression Equation of Y on X(II)

$$(Y - \bar{Y}) = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{X}) \Rightarrow (Y - 133) = 0.97 \frac{14.2}{3.32} (X - 66)$$

$$Y - 133 = 4.149X - 273.834 \Rightarrow y = 4.149X - 273.83 + 133$$

$$Y = 4.149X - 140.834 \quad \dots \dots \dots (II)$$

4. **بیلگه:** د یوې جوړونکې تصدې د یو شخصي ریکارډ څخه لاندې ارقام محاسبه شوي و:

$$\sum n = 25, \sum X^2 = 305460, \sum Y^2 = 925085, \sum XY = 524860$$

$$, \sum X = 2645, \sum Y = 4620$$



محاسبه کړئ؟

a. معیاري انحراف او د پیوستون ضریب

b. د میلان معادله پیدا کړئ، چې  $Y$  څخه تخمین شوي وي کله چې  $X = 8$  وي.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{305460}{25} - \left(\frac{2645}{25}\right)^2} = \sqrt{12218.4 - 11193.64}$$

$$= \sqrt{1024.76} = 32.01$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \left(\frac{\sum y}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{925085}{25} - \left(\frac{4620}{25}\right)^2} = \sqrt{37003.4 - 34151.04}$$

$$= \sqrt{2852.36} = 53.41$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)\left(\frac{\sum y}{n}\right)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\frac{524860}{25} - \left(\frac{2645}{25}\right)\left(\frac{4620}{25}\right)}{30.01 \times 53.41}$$

$$= \frac{20994.6 - 19551.84}{1709.654} = \frac{1442.76}{1709.654} = 0.84$$

Regression Equation of X on Y

$$(X - \bar{X}) = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 105.8) = 0.84 \frac{32.01}{53.41} (Y - 184.8)$$

$$X - 105.8 = 0.84Y - 93.08 \Rightarrow X = 0.84Y + 12.08$$

$$X = 0.84Y + 12.08 \quad \dots \dots \dots (I)$$

$$X = 0.84(46.90) + 12.08$$

$$X = 23.5$$

Regression Equation of Y on X

$$(Y - \bar{Y}) = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{X})$$

$$\bar{X} = 105.8 \quad \bar{Y} = 184.8$$

$$(Y - 184.8) = 0.84 \frac{53.41}{32.01} (X - 105.8)$$

$$Y - 184.8 = 1.41(X - 105.8) \Rightarrow Y = 35.622 + 1.41X$$

The value of (Y) when (X=23.5)

$$Y = 35.622 + 1.41(23.5) = 68.90$$

5. بیلگه: که چیري د 200 پلارونو اوسط لوړوالی د 2.5inches معیاري انحراف سره 67.5 inches وي، او د دوي د زامنو اوسط لوړوالي 2.6inches د معیاري انحراف سره 68.2inches وي او د دوي تر منځ د پیوستون ضریب 0.65inches وي د میلان خط معادله یې حاصله کړئ؟

$$\text{Here } r = 0.65, \bar{x} = 67.5, \bar{y} = 68.2, \sigma_x = 2.5, \sigma_y = 2.6$$

Regression Equation of X on Y(I)

$$(X - \bar{X}) = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 67.5) = 0.65 \frac{2.5}{2.6} (Y - 68.2)$$

$$X - 67.5 = 0.625(Y - 68.2) \Rightarrow X - 67.5 = 0.625Y - 42.625$$

$$X = 0.625Y - 42.625 + 67.5$$

$$X = 0.625Y + 24.875 \quad \dots \dots \dots \text{(I)}$$

Regression Equation of Y on X(II)

$$(Y - \bar{Y}) = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{X}) \Rightarrow (Y - 68.2) = 0.65 \frac{2}{2.5} (X - 67.5)$$

$$Y - 68.2 = 0.676(X - 67.5) \Rightarrow Y - 68.2 = 0.676X - 45.6$$

$$Y = 0.676X - 45.6 + 68.2$$

$$Y = 0.676X + 22.57 \quad \dots \dots \dots \text{(II)}$$

د تشخیص ضریب (co-efficient of Determination)

مخکې له دې چې د تشخیص ضریب باندي بحث وکړو نو لومړی باید مجموعي انحراف و پيژنو:

مجموعي انحراف (Total variation)

مجموعي انحراف د Y او  $\bar{Y}$  تر منځ د انحراف د مربعاتو د مجموعي څخه عبارت دي.

$$\text{Total variation} = \sum(Y - \bar{Y})^2$$

مجموعي انحراف په دوه برخو ویشل کيږي، یو یې تشریح شوي انحراف (Explained variation) او بل یې نا تشریح شوي انحراف (Unexplained variation) دی.

تشریح شوي انحراف (Explained variation) تشریح شوي انحراف د پیشبني شوي  $\hat{Y}$  او حسابي اوسط  $\bar{Y}$  د انحراف د مربعاتو له مجموعي څخه عبارت دی.

$$\text{Explained variation} = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2$$

نا تشریح شوي انحراف (Unexplained variation):  
نا تشریح شوي انحراف د ور کړ شويو قیمتونو  $Y$  د او پیشبني شوي  $\hat{Y}$  د انحراف د مربعاتو له مجموعي څخه عبارت دی.

$$\text{Unexplained variation} = \sum(Y - \hat{Y})^2$$

نو مجموعي انحراف د تشریح شوي او نا تشریح شوي انحرافاتو له مجموعي څخه عبارت دی.

$$\text{Total variation} = \text{Explained variation} + \text{Unexplained variation}$$

$$\sum(Y - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2 + \sum(Y - \hat{Y})^2$$

مخکي ذکر شو چې د پیوستون ضریب د دوه متحولینو تر منځ د رابطي یو مقياس څخه عبارت دی او په (r) توري بنودل کيږي د لاندې فورمول په اساس یې پیدا کولای شو.

$$r = \pm \sqrt{\frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2}}$$

دا د تابع متحول د انحراف لپاره یو مقياس دی کوم چې د میلان د کرني او د تابع متحول په واسطه تشریح شوي دي یا د تشخیص ضریب د پیوستون ضریب مربع ته ویل کيږي او په  $(r)^2$  سمبول سره بنودل کيږي.

$$r^2 = \frac{\text{Explained variation}}{\text{Total variation}} = \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2}$$

د تشخیص د ضریب متبادل شکل د محاسبي لپاره په لاندې ډول دي.

$$r^2 = \frac{a \cdot \sum Y + b \sum XY - \frac{(\sum Y)^2}{n}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}}$$

تشخیص ضریب (co-efficient of Determination) بیا عبارت دی له  $(1.00 - r^2)$  څخه

$$\Rightarrow 1 - r^2 = 1 - \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2}$$

1. بیلگه: لاندی فرضی د میلان مودل په نظر کې و نیسی.

X	1	2	3	4	5
Y	10	8	12	16	20

د میلان د کرښې معادله عبارت ده له  $\hat{Y} = 4.8 + 2.8X$

لومړۍ مرحله: پېشېني شوي ارزښتونه  $\hat{Y}$  پیدا کوو.

$$\text{For/ } x=1 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(1) = 7.6$$

$$\text{For/ } x=2 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(2) = 10.4$$

$$\text{For/ } x=3 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(3) = 13.2$$

$$\text{For/ } x=4 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(4) = 16.0$$

$$\text{For/ } x=5 \Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(5) = 18.8$$

نو ارزښتونه په دې بیلگه کې په لاندې ډول دي.

X	Y	$\hat{Y}$
1	10	7.6
2	8	10.4
3	12	13.2
4	16	16.0
5	20	18.8

دوهمه مرحله: د Y د ارزښتونو اوسط پیدا کوو.

$$\hat{Y} = \frac{10 + 8 + 12 + 16 + 20}{5} = 13.2$$

دریمه مرحله: مجموعي انحراف  $\sum(Y - \bar{Y})^2$  پیدا کوو.

$$(10 - 13.2)^2 = 10.24$$

$$(8 - 13.2)^2 = 27.04$$

$$(12 - 13.2)^2 = 1.44$$

$$(16 - 13.2)^2 = 7.84$$

$$(20 - 13.2)^2 = 46.24$$

$$\sum (Y - \bar{Y})^2 = 92.8$$

خلورمه مرحله: تشریح شوی انحراف  $\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2$  پیدا کوو.

$$(7.6 - 13.2)^2 = 31.36$$

$$(10.4 - 13.2)^2 = 7.84$$

$$(13.2 - 13.2)^2 = 0.00$$

$$(16.0 - 13.2)^2 = 7.84$$

$$(18.8 - 13.2)^2 = 31.36$$

$$\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 78.4$$

پینخمه مرحله: نا تشریح شوی انحراف  $\sum (Y - \hat{Y})^2$  پیدا کوو.

$$(10 - 7.6)^2 = 5.76$$

$$(8 - 10.4)^2 = 5.76$$

$$(12 - 13.2)^2 = 1.44$$

$$(16 - 16)^2 = 0.00$$

$$(20 - 18.8)^2 = 1.44$$

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = 14.4$$

Total variation = Explained variation+ Unexplained variation=

$$=92.5=78.4+14.4$$

$$r^2 = \frac{78.4}{92.8} = 0.845$$

د تشخیص ضریب معمولاً د فیصدی په وسیله تشریح کیږي؛ نو په دې وجه  $r^2 = 84.5\%$  څخه عبارت دی، بله لاره دا ده چې د پیوستون ضریب مربع کړو.

$$r = 0.919 \Rightarrow r^2 = (0.919)^2 = 0.845$$

نا تشخیص شوی ضریب (co-efficient of Non Determination) عبارت دی له.

$$1.00 - r^2 = 1 - 0.845 = 0.155 \vee 15.5\%$$

دوهمه طریقه: د پورتنی فورمول په عوض یو بل فورمول څخه هم استفاده کولای شو.

X	Y	Y <sup>2</sup>	X.Y
1	10	100	10
2	8	64	16
3	12	144	36
4	16	196	64
5	20	400	100
$\sum x = 15$	$\sum Y = 66$	$\sum Y^2 = 964$	$\sum XY = 226$

$$r^2 = \frac{a \cdot \sum Y + b \sum XY - \frac{(\sum Y)^2}{n}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}} = \frac{4.8(66) + 2.8(226) - \frac{(66)^2}{5}}{964 - \frac{(66)^2}{5}}$$

$$= \frac{316.8 + 632.8 - 871.2}{964 - 871.2} = \frac{78.4}{92.8} \Rightarrow r^2 = 84.5\%$$

**دریمه طریقه:** تر ټولو لومړی د پیوستون ضریب (r) محاسبه کوو اړ بیا د پیوستون ضریب مربع ( $r^2$ )

کوو چې په دې ډول د تشخیص ضریب حاصلیږي.

X	Y	X <sup>2</sup>	Y <sup>2</sup>	X.Y
1	10	1	100	10
2	8	4	64	16
3	12	9	144	36
4	16	16	196	64
5	20	25	400	100
$\sum x = 15$	$\sum Y = 66$	$\sum X^2 = 964$	$\sum Y^2 = 964$	$\sum XY = 226$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{55}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \left(\frac{\sum y}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{964}{5} - \left(\frac{66}{5}\right)^2} = \sqrt{192.8 - 174.24} = \sqrt{18.56}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)\left(\frac{\sum y}{n}\right)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\frac{226}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)\left(\frac{66}{5}\right)}{\sqrt{2} \times \sqrt{18.56}}$$

$$= \frac{45.2 - 39.6}{\sqrt{37.12}} = \frac{5.6}{6.09} = 0.919$$

$$r = 0.919 \Rightarrow r^2 = (0.919)^2 = 0.845 \vee 84.5\%$$

د تخمین معیاري خطا (Standard Error of the Estimate)

د تخمین معیاري خطا په ( $S_{est}$ ) سره بنودل کيږي، د  $Y$  د ارزښتونو او پیشبینی شویو ارزښتونو ( $\hat{Y}$ ) تر منځ معیاري انحراف دی د تخمین د معیاري خطا لپاره فورمول په لاندې ډول دي.

Standard Error of the Estimate

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - 2}}$$

څرنگه چې د فرمول څخه معلوميږي چې د تخمین معیاري خطا د معیاري انحراف سره مشابه ده، بلکې دلته اوسط استعمال شوي نه دي.

**بیلگه:** یو څیرونکی لاندې ډټا را ټوله کړې ده، چې په دی ډټا کې د کاپي ماشین د عمر او د دي د مراقبت د مصارفو څرگنده رابطه ده، د میلان معادله عبارت  $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$  نو د تخمین معیاري خطا پیدا کړئ؟

Machine	Age x(years)	Monthly cost Y
A	1	62
B	2	78
C	3	70
D	4	90
E	4	93
F	6	103

لومړۍ مرحله: په لاندې ډول یو جدول جوړ کړئ.

Age x(years)	Monthly cost Y	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$
1	62			
2	78			
3	70			
4	90			
4	93			
6	103			

دوهمه مرحله: د میلان د کرني معادله  $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$  استعمال کړئ او پیشبیني شوي ارزښت ( $\hat{Y}$ ) د هر (X) لپاره محاسبه کړئ او نتیجه یې د ( $\hat{Y}$ ) په کالم کې ولیکئ.

$$\text{For/ } x=1 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(1) = 63.70$$

$$\text{For/ } x=2 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(2) = 71.83$$

$$\text{For/ } x=3 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(3) = 79.96$$

$$\text{For/ } x=4 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(4) = 88.09$$



$$\text{For/ } x=6 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(6) = 104.35$$

دریمه مرحله: د هر  $Y$  نه  $(\hat{Y})$  تفریق کړي او  $(Y - \hat{Y})$  پر کالم کې ځای پر ځای کړئ.

$$62 - 63.70 = -1.70$$

$$78 - 71.83 = 6.17$$

$$70 - 79.96 = -9.96$$

$$90 - 88.09 = 1.91$$

$$93 - 88.09 = 4.91$$

$$103 - 104.35 = -1.35$$

څلورمه مرحله: د دریمي مرحلي کې د لاس ته راغلو ارقامو  $(Y - \hat{Y})$  مربع اخلو او بیا د  $(Y - \hat{Y})^2$  کې لیکوو.

پینځمه مرحله: اوس د اخري کالم مجموعه پیدا کړئ او مکمل جدول په لاندې ډول و لیکئ.

Age x(years)	Monthly cost Y	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$
1	62	63.70	-1.70	2.89
2	78	71.83	6.17	38.0689
3	70	79.96	-9.96	99.2016
4	90	88.09	1.91	3.6481
4	93	88.09	4.91	24.1081
6	103	104.35	-1.35	1.8225

شپږمه مرحله: اوس د تخمین معیاري انحراف په لاندې ډول پیدا کوو.

$$S_{\text{est}} = \sqrt{\frac{\sum(Y - \hat{Y})^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{169.7392}{6 - 2}} = 6.51$$

د تخمین معیاري خطا د یو بل فورمول په واسطه هم پیدا کولای شو چې په لاندې ډول دی.

Short-cut Method for finding Standard Error of the Estimate

$$S_{\text{est}} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a \sum Y - b \sum XY}{n - 2}}$$

حل:

لومری مرحله: یو جدول جوړوو

دوهمه مرحله: د X او Y ارزښتونه حاصل ضرب پیدا کوو او نتیجه په دریم کالم کې لیکو.

دریمه مرحله: د Y د ارزښتونو مربع پیدا کوو او نتیجه یې په څلورم کالم کې لیکو.

څلورمه مرحله: اوس د دوهم، دریم او څلورم کالمونو مجموعه پیدا کوو او یو مکمل جدول جوړوو.

X	Y	X.Y	Y <sup>2</sup>
1	62	62	3844
2	78	156	6084
3	70	210	4900
4	90	360	8100
4	93	372	8649
6	103	618	10609
	$\sum Y = 496$	$\sum X.Y = 1778$	$\sum Y^2 = 42186$

پینځمه مرحله: د رگریشن د معادلي  $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$  څخه  $a=55.57$  او  $b=8.13$  دی

شپږمه مرحله: اوس د تخمین معیاري خطا محاسبه کوو.

$$S_{\text{est}} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a \sum Y - b \sum XY}{n - 2}}$$

$$S_{\text{est}} = \sqrt{\frac{42186 - (55.57)(496) - (8.13)(1778)}{6 - 2}} = 6.48$$

ماخذونه

1. راسخ، ضياء الرحمن (1396) د احصائي بنسټونه، مومند خپرندويه ټولنه.
2. اصيل، مراد علي (1395) مبادي تيوريهاي عمومي احصائيه و تطبيق آنها در اقتصاد انتشارات سعيد تهران
3. دوديال، محمد بشير (1390) احصائيه، ننگرهار پوهنتون، گودر خپرندويه ټولنه.
4. نوري، نورالله (1392) د احصائي اساسات، مومند خپرندويه ټولنه.
5. ژيل گرینون و سوزن ويو ترجمه حمزه گنجی و مهدي گنجی (1384) تهران، سوالان
6. غلام، سنایي (1390) احصائيه کابل انتشارات سعيد
7. حميدي، عبدالباقي (1391) احصائيه عالي، کابل انتشارات سعيد
8. Chaudhry.Sher M.(2010): Introduction to Statistcal Theory Part(I)  
ILMI Kitabkhana, Lahor-pakistak
9. Chaudhry.Sher M.(2010): Introduction to Statistcal Theory Part(II)  
ILMI Kitabkhana, Lahor-pakistak

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**