د فرمولونو ټولګه

لیکونکی:

داکتر ماخان (میرۍ) شینواری

2016

د فرمولونو ټولګه

راټولوونکی :   ډاکتر ماخان میرزی شینواری

سریزه: بې له سریزې

ویناسم اند یا - منطق **Aussagenlogik**

سم اندیزې ترنې

ویېنډول	لیکنډول	نخښه ونه
Aنه BاوA B یاA B یا Aیا له A لاس ته راځي B و ته ورته ده	$\neg A$ $A \wedge B$ $A \vee B$ $A \not\equiv B$ $A \Rightarrow B$ $A \Leftrightarrow B$	نه والی د او ترنه د یا ترنه ناورته والی(انتیوالتخ) ترې لاس ته راتلنه ورته والی

لارې یا قوانین

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

Morgansche Regeln   د مورګان لار یا - قانون

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Distributivgesetze دېستریبوتیو قانو

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee \neg A = w \qquad A \wedge \neg A = f$$

weitere Regelnنورقوانین

$$A \vee w = w \qquad A \wedge w = A$$

$$A \vee f = A \qquad A \wedge f = f$$

کوانتورونه Quantoren   د شتون – یا موجودیت کوانتور: $\exists$ (لږ تر لږه یو...شته)

ټولکوانتور : $\forall$ (د ټولو ... لپاره)

Mengen ډېرۍ

د ډېريو کاروني يا - عمليې Mengenoperationen

يولنه: $A \cup B$

غوڅې يا تقاطع : $A \cap B$

کمبنت يا تفريق: $A \backslash B$

سيومتريک کمبنت : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

قوانين

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

د مورګان قانون Morgansche Regeln

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Distributivgesetze ډېستربوتيوقانون

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

اړيکي

Relation $a\ R\ b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B$

هنداريزې reflexiv: $(a,a) \in R$

: سيومتريک symmetrisch: $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

:انتي سيومتريک antisymmetrisch: $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

ترانزيتيو يا پسې تلوني transitiv: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

:

توتال يا تول

total: $(a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

ورته يا اکويوالنت اړيکې : هنداريزې،سيومتريک اوترانزتيو

نيم نظم : هنداريزې، او ترانزيتيو

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv

Halbordnung: reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Kombinatorik کومبيناتوريک

د بينوم ضريبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}$$

قوانين

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\,, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}\,, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}\,, \quad k > 0$$

کمبينيشنونه		mit Reihenfolge د پرلپسي لړئ سره	ohne Reihenfolge بې له پرلپسي لړئ

	د تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
	بي له تکراره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

کمپلکس یا گډوله اعدا یا – گڼونه komplexe Zahlen

Betrag ارزښت (مطلق)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ارګومنت (د x ارزښتونه)Argument

$\sin\varphi = y/r$ او $\cos\varphi = x/r$

قطبي بڼهPolarform :

$$x + \mathrm{i}y = z = r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
y	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$	**اویلر-مویوري**
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\lvert z_2\rvert^2}\, z_1\,\overline{z_2} = (r_1/r_2)\, e^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$	وېش
$z^{1/n} = r^{1/n} e^{\mathrm{i}\varphi/n} e^{2\pi\mathrm{i}k/n}$	رېښه
$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$ $\lvert z-a\rvert = s\,\lvert z-b\rvert \Leftrightarrow \lvert z-w\rvert = r$ $w = \frac{1}{1-s^2}\,a - \frac{s^2}{1-s^2}\,b, \quad r = \frac{s}{\lvert 1-s^2\rvert}\,\lvert b-a\rvert$	منځنی ولاړه یا –عمود ګردئ – یا دایرهمساوات

Vektoren وکتورونه

Betrag
(مطلق) ارزښت

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dreiecksungleichung
درېګوډي نامساوات

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

Skalarprodukt
سکالار ضرب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$$

Vektorprodukt
وکتوري ضرب

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$$

Grassmann-Identität
د ګرسمن کتمتوالی

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a}$$

Lagrange-Identität
د لاګرانژ کتمتوالی

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Spatprodukt
شپات ضرب

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$$

ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

zyklische Vertauschung:

Vektor inوکتورونه په
$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$
ONB
کې

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}$$

Polarkoordinaten
قطبيكواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi\,, \qquad r \geq 0,\ \varphi \in (-\pi, \pi]$$

Zylinderkoordinaten
توته يي يا استووانه يي
كواوردیناتونه

$$x = \varrho\cos\varphi \qquad \varrho \geq 0$$

$$y = \varrho\sin\varphi \quad , \qquad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$z = z \qquad z \in \mathbb{R}$$

Kugelkoordinaten
غونډوسكي يا غونډاري
كواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta \qquad r \geq 0$$

$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta \quad , \qquad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$z = r\cos\vartheta \qquad \vartheta \in [0, \pi]$$

(Autor: M. Reble)

Geraden und Ebenen (هوارې) كرښې او سطحې

كرښهGerade

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$$

د پارامتربڼه: Parameterform

$$(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = 0$$

مومنتن يا لحضوييڼهMomentenform:

سطحهEbene

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

: پارامتر بڼه Parameterform

: $\vec{x} \cdot \vec{n} = h$ د هسينورمال بڼه Hesse-Normalform

Abstand Punkt-Gerade
واټن ټكى- كرښه

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand windschiefer
واټن بادي ماېل

کرښهGeraden

$$d = \frac{|[(\vec{q}-\vec{p}), \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Abstand Punkt-Ebene
واټن ټکی- سطحه

$$d = |\vec{p}\cdot\vec{n} - h|/|\vec{n}|$$

لیکونکی : مېبیل

Ellipse , Parabel, Hyperbel هګئ(ایلیپس)، پارابول،های پارابل

ایلیپسي یا هګی: دوه سوزون ټکو(نقطه محراق) ته واټن

$$F_\pm = (\pm f, 0)$$

*konstant*ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2(\varphi)}$$

Parabelپارابول

یوه سوزون ټکي $F = (0, f)$ او وړون کرښي $g : y = -f$ ته برابر واټن

$$4fy = x^2$$

$$r = \frac{4f\,\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$

هاپارابول : دوه سوزون ټکو ته کمښت یا تفریق

$$F_\pm = (\pm f, 0)$$

ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

ليكونكى:م. ربل

(Autor: M. Reble)

Funktionen توابع يا ځيرونه

Exponentialfunktion
اکسپوننشل تابع

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y\,, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$b^x = e^{x \ln b}$$

Logarithmen
لوګاريتمونه

$$\ln 1 = 0\,, \quad \ln e = 1$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$\log_a y = \ln y / \ln a$$

Trigonometrische Funktionen
تريګونږمتريکي توابع

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

هایپارابول توابعHyperbelfunktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

پرلپسي اولړۍ**Folgen und Reihen**

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

پولي ته تلنه Konvergenz:

د a_n پوله بلل کيږي: a

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

د پولي ته تلني نظم p :Konvergenz-Ordnung

$$|a_{n+1} - a_n| \le c\,|a_n - a|^p$$

Cauchy-Kriterium
کوشي-قضيه

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \forall n, m > n_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

د همغږیزوالي قضیه Monotonie-Kriterium: ر ابندي همغږيزې پرلپسي پولي ته تلونکي دي.

د پرتلي قضيه Vergleichs-Kriterium:

$$c_n \to a \Rightarrow b_n \to a \quad \text{او} \quad a_n \le b_n \le c_n, \quad a_n \to a$$

ځانګړي پوله ارزښتونه

Spezielle Grenzwerte $(n \to \infty)$

$$\begin{array}{rcll|rcll}
(1+\frac{a}{n})^n & \to & e^a & & \sqrt[n]{n} & \to & 1 & \\
\sqrt[n]{a} & \to & 1 & (a>0) & \sqrt[n]{n!} & \to & \infty & \\
\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} & \to & \frac{1}{e} & & \frac{a^n}{n!} & \to & 0 & \\
\frac{n!}{n^n} & \to & 0 & & \frac{n^k}{a^n} & \to & 0 & (a>1) \\
a^n\, n^k & \to & 0 & (|a|<1) & & & &
\end{array}$$

د $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ لپاره اړینه قضیه

په لړیوکي پولي ته تلنه

د مایورانت قضیه $|a_n| < b_n$ او $\sum b_n$ پولي ته ځي

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$$

د وېش قضيه

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$$

د ريښي قضيه

$$a_n, b_n > 0,\ a_n/b_n \to c > 0$$

دپرتله کوني قضيه

$$\Rightarrow a_n, b_n$$

همغه یا برابرپولي ته د تلني حالت لري

د انتیگرال قضیه $a_n = f(n)$ او $f(x)$ همغږیزلوېدونکي دي

له دې لاس ته راځي $\Rightarrow \int_c^{\infty} f(x)\, dx$ او $\sum_n a_n$ همغه دپولي ته تلني حالت لري.

د لاییبنیخ Leibniz قضیه : a_n اترنیري کیږي او $|a_n|$ همغږیزه صفرپرلپسي ده.

ځانګړي لړئ

Spezielle Reihen

$$\begin{array}{rcl|rcl}
\sum_{k=1}^{n} k & = & \frac{n(n+1)}{2} & \sum_{k=1}^{n} k^2 & = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{k=0}^{n} x^k & = & \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \sum_{k=0}^{\infty} x^k & = & \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1) \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & = & e^x & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} & = & -\ln(1-x) \quad (|x|<1) \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} & = & \sin x & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} & = & \cos x
\end{array}$$

Harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \le 1$

هارموني لړي د لپاره پولي ته ځي د لپاره پولط ته نه ځي یا پوله نه لري

(Autor: M. Reble)

Differentiationدفرنشيشن

Linearität
کرښیزوالی

$$(r\, f(x) + s\, g(x))' = r\, f'(x) + s\, g'(x)$$

Produktregel
د ضرب قانون

$$(f\, g)' = f'\, g + f\, g'$$

Quotientenregel
د وېش قانون

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

Kettenregel
ځنځيري قانون

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Umkehrfunktion
معکوس تابع(په ځتې-)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,, \quad y = f(x)$$

Logarithmische

Ableitung

لوګاريتمي مشتق

$$f'(x) = f(x)\,(\ln f(x))'\,, \quad f(x) > 0$$

Leibniz-Regel
د لايبنيځ قانون

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\,g^{(k)}$$

غوره مشتقونه:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	x^n	$n\,x^{n-1}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$a^x\ (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln \lvert x \rvert$	$1/x$	$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x\ (\lvert x \rvert < 1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\arccos x\ (\lvert x \rvert < 1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{arcosh} x\ (x > 1)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{artanh} x\ (\lvert x \rvert < 1)$	$1/(1-x^2)$		

Mittelwertsatz

منځارزښت جمله

$$\exists c \in (a,b)\ :\ f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Verallgemeinerter

Mittelwertsatz

تولیزه منځ ارزښت قضیه

$$\exists c \in (a,b)\ :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regel von l'Hospital
د ل، پیتال قاعده

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \left(\text{bei } \tfrac{0}{0} \text{ und } \tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

Satz von Taylor
د تیلور جمله

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

Newton-Verfahren

د نیوټن تلنلار

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Leibniz-Regel
د لا یبنیځ قانون

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)\,dx + b'(t)\,f(b(t),t) - a'(t)\,f(a(t),t)$$

Extremum
افراطیت

Notwendig اړین :

$$f'(x) = 0$$

د مینیموم(مکسیموم) لپاره پوره کېدونکي شرطونه : ورزیا یا برعلاوه

$$f''(x) > 0\ (< 0)$$

Wendepunkt
اوړونټکی

$f''(x) = 0$
: ; اړين Notwendig
$f'''(x) \neq 0$
پوره کېدونکي: ورزيات

(Autor: M. Reble)

Integration اينتيګرېشن

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

partielle Integration
ټوټه اينتيګرېشن

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Substitution
بدلون يا تعويض

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,, \qquad y = g(x)\,, dy = g'(x)dx$$

wichtige Substitutionen
غوره بدلونونه

$\sqrt{a^2 - x^2}$
Subst.: $x = a \sin t$

$\sqrt{a^2 + x^2}$
Subst.: $x = a \sinh t$

$R(\sin x, \cos x)$ Subst.: $t = \tan \frac{x}{2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

لومړنئ توابع

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n\ (n \neq -1)$	$x^{n+1}/(n+1)$	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		

ډکی یا حجم

څرخیدونی بدن یا –جسم: حرخون د x په محور:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

څرخون د y په محور (د f همغږیزچګیدونکي لپاره):

$$V = 2\pi \int_0^b x(f(b) - f(x))\, dx$$

د څرخیدوني بدن پوښ یا پورته سطحه

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

د لیندي اوږدوالس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \quad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

د تراپیځ قانون

$$\int_a^b f(x)\, dx = h\,(f(a)/2 + f(a+h) + \ldots + f(b-h) + f(b)/2) + R_h$$

$$R_h = -\frac{b-a}{12}\, f''(\xi)\, h^2, \quad \xi \in (a,b)$$

(Autor: M. Reble)

Grundlegende Strukturenبنسټیز جوړښتونه

گروپونه

اسوځیاتیو قانون Assoziativgesetz:

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$$

بې اغیزه توکی Neutrales Element: $a \diamond e = e \diamond a = a$

معکوستوکی Inverses Element

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

د ابل گروپ

کموتاتیو قانون Kommutativ: $a \diamond b = b \diamond a$

بدن یا تن

د ابل گروپ دب $(K, +)$ ist abelsche Gruppe

د ابل گروپ دی $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe

دیستریبوتیو قانون Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

وکتورفضا Vektorraum

په K د ابل گروپ $(V, +)$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

سکالار ضرب

لپاره $v \neq 0$ د $\langle v, v \rangle > 0$

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$$

$$\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$$

$$\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$$

اورتوګونال بستونهorthogonale Basis :

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \, , \; c_k = \frac{\langle x,u_k\rangle}{\langle u_k,u_k\rangle}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 |u_k|^2$$

کوشي - شورڅ Cauchy-Schwarz

$$|\langle u,v\rangle| \leq |u||v| \, , |u| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

نورم Norm :

$$\|v\| > 0 \, , \, v \neq 0$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \; \|v\|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کربنیز تابع

حمعوالی Additivität :

$$L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

$$L(\lambda v) = \lambda \, L(v)$$

هوموجینیتيHomogenität:

بیلد او کیرن Bild und Kern(پښتويي: ځیره یا عکس اوزړی)

Bild

له $(L) = \{w \in W \;:\; \exists v \in V$ بیلد یا عکس

$$L(v) = w\}$$

سره

کرن یا زړی

$$\ker(L) = \{v \in V \ : \ L(v) = 0\}$$

dim V = dim ker(L) + dim Bild(L)

(Autor: M. Reble)

Matrizen ماتریکسونه

د ماتریکونو سضربMatrix-Multiplikation

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^{*} = B^{*}A^{*}$$

Kommutatorکموتاتور

$$[A, B] = AB - BA$$

رانګ Rang :د کرښیز خپلواکو(تابعو) لیک یا متو تعداد یا ګنون

$$\mathrm{Rang}\ A = \mathrm{Rang}\ A^{t}$$

$$\mathrm{Rang}\,(BAC) = \mathrm{Rang}\,(A)$$, (B, C معکوسوړ invertierbar)

شپور Spur : د دیاګونا-یا دوهکونجتړو توکو زیاتون یا جمعه:

$$\mathrm{Spur}\ A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

$$\mathrm{Spur}\ (AB) = \mathrm{Spur}\ (BA)$$

: hermitesch (symmetrisch)(سیمیک هرمیتیک

$A^{*} = A$($A^{t} = A$)

فقط حقیقیایګن رزښتونه، ONB (Orthonormalbasis) د ایګن وکتورونو څخه شتون لري

یونیتار(اورتوګونال)

$A^{*} = A^{-1}$($A^{t} = A^{-1}$)

$$|\det A| = 1$$

،متي ONB جوړوي

نورمال

normal

$$AA^* = A^*A$$

$\Leftrightarrow$ کیدونکي (وتر)ډوهکونترې یونیتار unitär diagonalisierbar

Drehmatrix
څرخونمتاریکس

$\det\ A = 1$ اوتوګونال او A

څرخونمحور و ایګن ارزښت 1 ته ایګنوکتور دی

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Spur}\ A - 1)$$

څرخونکونج Drehwinkel:

Spiegelung هندارونه

$$E:\ d^t x = 0: \quad M = E - 2\,\frac{dd^t}{d^t d}$$

Ebene سطحه

$$G:\ x = \lambda v: \quad M = 2\,\frac{vv^t}{v^t v} - E$$

Gerade کرښه

Eigenwerte / -vektoren
ایګنوکتور ایګن ارزښت

$$Av = \lambda v\,,\ v \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\sum \lambda_i = \mathrm{Spur}\,A\,, \quad \prod \lambda_i = \det A$$

A^t ایګن ارزښت λ لري

A^{-1} ای‌ګنوکتور v او ایګن ارزښت $1/\lambda$ لري

A^n ایګنوکتور v او ایګن ارزښت λ^n لري

$Q^{-1}AQ$ ایګنوکتور $Q^{-1}v$ او ایګن ارزښت λ لري

دوه کوجترې کونه یا وترې کونه:

د ایګنارزښتونو لپاره : البر = هندسي . ډېرواروالی

$$B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$B = (b_1, \ldots, b_n)$ د ایګنوکتورونو بنسټ

جوردان- بنه:
بلوکوتري –یا دوهکونجړی ماتریکسBlockdiagonalmatrix

$$J = B^{-1}AB = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_m)$$

بلوکونه په دیاګونال ایګن ارزښت λ لري،
په پورته څنګیز دیاګونال کې 1
د ماتریکس توانونهMatrix-Potenzen

$$A = Q^{-1}JQ \Rightarrow A^n = Q^{-1}J^nQ$$

$$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow A^n \to 0$$

زینګولار ارزښت تجزیه کونه

$$U^*AV = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots), \quad U, V \text{ unitär}$$

زینګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > 0, \quad k = \mathrm{Rang}\, A$$

s_i د A^*A د ایګن ارزښت ریښي دي

د V متي د A^*A ایګن وکتورونه دي

د U متي د AA^* ایګن وکتورونه دي

(Autor: M. Reble)

دیترمینانتونه او کرښیز مساوات سیستم

Determinanten und lineare Gleichungssysteme

دیترميناتونه

$$\det A^{\mathrm{t}} = \det A\,, \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}\,, \quad \det A^n = (\det A)^n$$

د دوه متو(لیکو) بدلېدنه مخ نخښه بدلوي.
د یو متي ډېرواره یوي بلي ته زیاتول دیترمینانت ته تغیر نه ورکوي

ودیزیینه:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$$

لیکي پسي) k (ودسزینه د

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$$

متې پسي) l ودیزینه د

$\det A = 0$ دی صفر ایګن ارزښت $\Leftrightarrow 0$

یواځنی حل نه لري $\Leftrightarrow Ax = b$

A $\Leftrightarrow$ پوره رانګ نه لري

$\Leftrightarrow A$ اینواریانت نه دی

کربنیزمساوات سیستمونه: یا ټیک یو، هیڅ یا ناپای ډېر حلونه لري.

د ګاوس ترانسفرمیشنونه: د کربنیزمساواتسیستم حلډیرئ د دوه مساواتو په بدلون تغیر نه خوري.

$$r \neq 0$$

د یوه مساوات ضرب د سره.

د دوه مساواتو زیاتون

د کرامرقاعده

$$x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(a_1, \ldots, a_n)}$$

برابروالي پرابلم

$$|Ax - b| \to \min \Leftrightarrow A^{\mathrm{t}}Ax = A^{\mathrm{t}}b$$

(Autor: M. Reble)

کوادریکونه **Quadriken**

شدله (پهبرخ) وېشنه

$$Q: \quad x^{\mathrm{t}}Ax + 2b^{\mathrm{t}}x + c = 0, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^{\mathrm{t}} \\ \hline b & A \end{array}\right)$$

$$\mathrm{Rang}\,\tilde{A} = \mathrm{Rang}\,A$$

مخروطي کوادریکونه:

$$\mathrm{Rang}\,\tilde{A} = \mathrm{Rang}\,A + 1$$

منځتکيکوادریکونه :

$$\mathrm{Rang}\,\tilde{A} = \mathrm{Rang}\,A + 2$$

پارابولیکي کوادریکونه:

$$Am = -b$$

منځتکی

نورمالې بڼې

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

د مخروطي کوادریکونو (ډبل)مخروط

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

غوڅوونکي سطحه

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

منحُنکي کوادریکونه منحُنای هایپرابول

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

یو پوښیز هاپرا بلویید

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

ایلیپسویید

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$$

هاپارابولیکه توته یا استوانه

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$$

ایلیپتیکي توته

$$-\frac{x^2}{a^2}+1=0$$

غبرګېسطحي

پارابولیکیکوادریکونه

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2z=0$$

ایلیپتیکي پارابولویید

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+2z=0$$

هاپربولیکي پارابولویید

$$\frac{x^2}{a^2}+2y=0$$

پارابولیکي توته یا حیولیندر

Differentiationدفرنځییشن

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{t}$$

ګرادینت

$$f' = \mathbf{J}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

جاکوبي ماتريکس

$$\mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \cdots & \partial_1\partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f & \cdots & \partial_n\partial_n f \end{pmatrix}$$

هسسي ماتريکس

$$h(x) = g(y),\ y = f(x):\quad h'(x) = g'(y)\ f'(x)$$

ځنځيري قانون

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|\le n} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x) h^\alpha + R$$

د تيلور وديزينه

پاتي غړی د يوه $R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x+\theta h)h^\alpha$ لپاره $\theta \in [0,1]$

نظم 2 :

$$f(x+h) = f(x) + (\mathrm{grad}\ f(x))^{\mathrm{t}}\, h + \frac{1}{2}h^t\, \mathrm{H}\, f(x)h + O(|h|^3)$$

تانجنتي سطحه

سطحه $f(x,y,z) = c$ همداسي $(u,v) \mapsto p(u,v)$

نورمالوکتور $n = \mathrm{grad}\ f$ همداسي $n = p_u \times p_v$

$$\partial_v f(x) = (\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}} v$$

لوريز مشتق

$$\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \Rightarrow f(x,y) = 0$$

ا يمأيخيت تابع د x پسي حل

معکوس تابع f لوکال معکوس کيدونکی دی، که $\det f'(x_0) \neq 0$ وي.

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1},\ y = f(x)$$

د $x \approx x_0$ لپاره .

$$\mathrm{grad}\ f(x) = 0$$

کريتيکال ټکي

ايليپتيش: د H ټول ايګنوارزښتونه همغه برابره مخنخښنه لري

لوکال افراطيت ⟶

هاپارابوليک : ايګن ارزښتونه شته د مختلفومخنخښنوسره

زينټکی ⟶

پارابوليش: لوترلږه يو ايګنارزښت صفر دی، او نور ټول ايګن ارزښتونه برابري مخنخښي لري.

لاګرانژ ضرب

افراطي ارزښتونه x_* د فرعي شرايطو $g_i(x) = 0$ لاندې

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)$$

د کون-تاکر Kuhn-Tucker شرطونه:

افراطي ارزښتونه x_* د فرعي شرطونو $g_i(x) \geq 0$ لاندې

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)\,, \quad \lambda^t g(x_*) = 0$$

مینیموم $\lambda_i \geq 0$ ، ما کسیموم $\lambda_i \leq 0$

(Autor: M. Reble)

اینت

اینتیګرالونه Integration

بدلون

$$\int\limits_U f(g(x))\,|\,\mathrm{det} g'(x)|\,dx = \int\limits_{g(U)} f(y)\,dy$$

دسطحې مسطح یا هدار توکي

$$dA = dxdy$$

کارتیزي کواوردیناتونه:

$$dA = rdrd\varphi$$

قطبي کواودینات :

د ډکي یا حجم توکي

$$dV = dxdydz$$

کارتیزي کواوردیناتونه :

د کږې انتیګرال

$$\int\limits_C f = \int\limits_a^b f(c(t))\,|c'(t)|\,dt$$

د سطحئ توکي

$$dS = |s_u \times s_v|\,dudv$$

پارامتري کونه :

$$z(x,y):\ dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$$

تابع :

$$dS = \varrho\,d\varphi dz$$

د توتي پوښ:

$$dS = r^2 \sin\vartheta\,d\varphi d\vartheta$$

د غونډاري سطحه:

Schwerpunkt
دروندتکی

$$x_S = \frac{1}{m} \int_V x \varrho(x)\, dV$$

Trägheitsmoment
بارتکی

$$I = \int_V \operatorname{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dV$$

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_V \operatorname{grad} f = \int_{\partial V} f n^\circ$$

Greensche Integralformeln
د گرين امتيګرال بنه

$$\int_{\partial V} f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \operatorname{grad} f \cdot (\operatorname{grad} g)^{\mathrm{t}} + f\, \Delta g$$

$$\int_{\partial V} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}\right) = \int_V (f \Delta g - g \Delta f)$$

(Autor: Marcus Reble)

spezielle Differentialgleichungen ځانګي دفرنشل مساوات

د لومړئ درجي کربنيز دفرنشل مساوات
Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x)\, y + q(x)$$

د P د p بن ستتابع او $y(x_0) = y_0 \;\Rightarrow\; c = y_0$ سره

$$y = y_p + y_h$$

$$y_h = c \exp\big(P(x) - P(x_0)\big)\,, \quad y_p = \int_{x_0}^{x} \exp\big(P(x) - P(s)\big)\, q(s)\, ds$$

د برنولي دبرنشل مساوات
Bernoulli DGL

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^k$$

$$u = y^{1-k}$$

بلون:

$$\frac{1}{1-k} u' = -p(x)\, u + q(x)$$

Separable DGL

سيپارابلي دم

$$y' = p(x)\,g(y)$$

د متحولو بيلول

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx$$

هوموجين دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

$$xz(x) = y(x)$$

بدلون

$$z' = \frac{1}{x}\left(f(z) - z\right)$$

تيک دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

دتيکوالي لپاره اړيموالی

$$p_y = q_x$$

$$p(x,y) + q(x,y)\,y' = 0$$

$$F(x,y) = c$$

ايمپليخيت حل

د $F_x = p$ او د $F_y = q$ سره حل

ثات ضريبونه

$$u'' + pu' + qu = 0$$

د کرکتريستيکي پولينوم صفرخايونه λ_1, λ_2

دوه حقيقي

$$u_h = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t)$$

يو ډبل

$$u_h = a\exp(\lambda t) + b\,t\exp(\lambda t)$$

کنجوګيري کمپلکس له $\lambda_{1,2} = \mu \pm \varrho\mathrm{i}$ سره

$$u_h = \exp(\mu t)\left(a\cos(\varrho t) + b\sin(\varrho t)\right)$$

کيداميفتي هارموني لړځيدني

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c\,\cos(\omega t)$$

$$r^2 > \omega_0^2$$

قوي Dämpfung:

$$r^2 = \omega_0^2$$

كريتيكل Dämpfung:

$$r^2 < \omega_0^2$$

ضعيف Dämpfung :

$$u_p = \tilde{c}\cos(\omega t + \delta)$$

د

$$\tilde{c} = c/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

سره

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\,2r\omega)$$

او

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$$

ريزونانځ :

د پارتيكولار حلونو لپاره ځانګړي اينوونې

spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen

نظم 1. Ordnung

$$y' = py + q(x)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \;\rightarrow\; y_p = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$$

$$q(x) = c\exp(\lambda x),\ \lambda \neq p \;\rightarrow\; y_p = \frac{c}{\lambda - p}\exp(\lambda x)$$

$$q(x) = c\exp(px) \;\rightarrow\; y_p = cx\exp(px)$$

$$q(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \;\; \rightarrow \;\; y_p = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)$$

نظم . 2. Ordnung

$$u'' + pu' + qu = f(t)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \;\; \rightarrow \;\; u_p = \sum_{j=0}^{n} u_j t^j$$

، که وي

$p \neq 0$ ، $q \neq 0$

$$f(t) = \exp(\lambda t) \;\; \rightarrow \;\; u_p = c\exp(\lambda t)$$

و که وي

$$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$$

که λ د کرکتریستیکي پولینوم یو ساده یعني یو (دبل) صفرځای وي، باید c د ct (ct^2) په ځای کنبینول شي.

$$f(t) = \exp(\alpha t)\left(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)\right)$$

$$\rightarrow \;\; u_p = \exp(\alpha t)\left(c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t)\right)$$

که $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ د کرکتریستیکي پولینوم صفرځایونه وي، باید u_p د t سره ضرب شي.

تولیز:

د u_p ضریبونو تاکل د په ځای ایښوني له لاري

تولیز حل دی $y = y_h + y_p$ همداسي

$$u = u_h + u_p$$

په ګډوله حالتونو کي د یوګونو حالتونو ایښوولو Superposition

د Überlagerung خپو یو په بل پرطوتل (فزیک، ماتماتیک)

(Autor: Joachim Wipper)

تولیزه تیوري**Allgemeine Theorie**

د پیانو جمله

$$u' = f(t, u)\, , u(t_0) = u_0$$

f ناپرېکیدون کی: پيل ارزښت پرابلم لږ تر لږه يو ناپرېکيدونکی مشتقوړ حل لري.

f ليپشيڅ ناپرېکيدونکی نسبت u ته: د پيل ارزښت پرابلم حل يړاځنی دی.

پيکارد-ايترېشنPicard-Iteration

$$u^{\ell+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, u^{\ell}(\tau)\right)\, d\tau\,, \quad u^0(t) = u_0$$

د پيل شرايطو په واک کي والی

$$\left|v(t) - w(t)\right| \le \left|v(t_0) - w(t_0)\right| \exp\left(L(t - t_0)\right)$$

د f د ليپشيڅ – ثابتي L سره نسبت u ته.

د ښي اړخ خپلواکوالی

د $u' = f(t,u)\,, \quad v' = g(t,v)$ سره $u(t_0) = v(t_0)$

د $\left|u(t) - v(t)\right| \le \varepsilon(t - t_0) \exp\left(L(t - t_0)\right)$

سره $\varepsilon = \max_{(s,w)\in D} \left|f(s,w) - g(s,w)\right|$

د نظم ريدکشن Reduktion der Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

بدلون $u' = v(u)$ راکوي $v\,\dfrac{dv}{du} = f(u,v)$

ستابيليتي

$$u' = f(u)$$

کرېتيکل ټکی u_*:

کرښيزوالی: $v' = f'(u_*)\,v$ د $v = u - u_*$ سره

ستابيليتي :

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u_*\,, u(0) \approx u_* \;\Leftarrow\; \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\ \forall \lambda_i$$

نه ستابيليتي

$$\Leftarrow\; \exists \lambda_i :\ \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$$

د λ_i سره د $f'(u_*)$ ايگن رازښت

(Autoren: K. Höllig/M. Reble)

کربنیز سیستمونه **Lineare Systeme**

ورونسکی – دیترمینانتونهWronski-Determinante

$$\Gamma' = A(t)\Gamma$$

$$(\det\Gamma)' = \operatorname{Spur} A(t)(\det\Gamma)\,,\quad \Gamma$$

بنستیزه ماتریکس

د ثابتو ورییشن

$$u' = A(t)u + b(t)$$

$$c' = \Gamma^{-1}(t)\; b(t) \qquad u_p = \Gamma c$$

اینبوونه راکوي

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \Gamma(t)\left[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds\right]$$

ثات ضریبونه

$$u'(t) = A\,u(t)$$

که v ایگنوکتورویو ایگن ارزښت λ ته، نو

$$u(t) = \exp(\lambda t)\,v$$

حل دی

کمپلکس ایگنارزښت و ایگنوکتور

$$\lambda = \sigma + \mathrm{i}\varrho$$

$$a + \mathrm{i}b$$

ته دی

$$\mathrm{Re}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\cos(\varrho t) - b\sin(\varrho t)\big)$$

او

$$\mathrm{Im}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\sin(\varrho t) + b\cos(\varrho t)\big)$$

حقیقی حل دی.

جوردان-بڼه

$$u'(t) = A\,u(t) + b(t)$$

$$v' = Jv + Q^{-1}b \qquad u = Qv \qquad Q^{-1}AQ = J$$

بدلون دا سیستم راکوي، چې سوکڅیسیو کمپوننت ډوله

حل کیدی شي.

$$v_i' = \lambda_i v_i + (Q^{-1}b)_i$$

سره یوځای شوی یا سره نخلولی سیستم د دوه کونجتړي یا وتر J سره.

آویلر-دیرنځیالمساواتEuler-Differentialgleichung

$$a_n t^n u^{(n)} + \cdots + a_0 u = f(t)$$

$$v(s) \qquad t = e^s\,,\quad v(s) = u(t)$$

بدلون د لپاره کربنیز دفرنځیال مساسوات راکوي د د ثابت ضریبونو سره

ستابيليتي

$$u' = Au$$

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda_i < 0 \; \forall \lambda_i$$

ستابيل :

$$\det A > 0 \wedge \operatorname{Spur} < 0 \qquad (2 \times 2)$$

د - ماتريکس لپاره:

$u(t)$

بباغيزه يا ناپيلی ستابيل: بنده او پيل ارزښت شتون لري.

$|u(t)|$

د کومم لپاره چي د 0 په لور پولي ته نه ځي.

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \Leftarrow \exists \lambda_i : \operatorname{Re}\lambda_i > 0$$

ايستابيل:

لاپلاس- ترانسفورميشن **Laplace-Transformation**

لاپلاس- ترانسفورميشن	$U = \mathcal{L}u\,, \quad U(s) = \int\limits_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt$
معکوس- ترانسفورميشن	$u(t) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} U(s)\exp(st)\,ds$

$au(t) + bv(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aU(s) + bV(s)$	کربنيزوالی
$u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^nU(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)$ $t^nu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^nU^{(n)}(s)$	دفرنځيشن
$\int_0^t u(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s}, \quad u(t)/t \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty U(\tau)d\tau$	انتيګرېشن
$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad u(t) = 0 \text{ für } t < 0$ $\exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$	راکښنه
$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1-\exp(-Ts)} \int_0^T u(t)\exp(-st)\,dt$	T - پريوديکي تابع
$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}U(s/a)$	-سکاله کونه
$(u \star v)(t) = \int_0^t u(\tau)\,v(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)\,V(s)$	- غبرګونه

$u(t)$	$U(s)$	$u(t)$	$U(s)$	ځانګړې توارع
1	$1/s$	t^n	$n!/s^{n+1}$	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t^n\,e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$e^{-at}\,\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\,\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	

پيل ارزښت پرابلم $F = U/\Phi - u(0)$ د $\Phi(s) = 1/(s+p)$ سره
۱. درجه

$u' + pu = f\,,\ p \in \mathbb{R}$ د په څټ ترانسفورميشن وروسته $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ د $\varphi = e^{-pt}$ سره

پيل ارزښت پرابلم
۲ . درجه

Anfangswertproblem 1. Ordnung $u' + pu = f\ ,\ p \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - u(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s+p)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ mit $\varphi = e^{-pt}$
Anfangswertproblem 2. Ordnung $u'' + pu' + qu = f\ ,\ p, q \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - (s+p)u(0) - u'(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s^2+ps+q)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi' + (u(0)p + u'(0))\varphi$ $\lambda \neq \varrho$ Nullstellen von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = (e^{\lambda t} - e^{\varrho t})/(\lambda - \varrho)$ λ doppelte Nullstelle von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = te^{\lambda t}$

Sturm-Liouville-Probleme د شتورم-ليوويل –پرابلم

د ځان سره ادیونګیري

$$Lu = -(pu')' + qu$$

دفرنشل اوپراتور

ترانفرومیشن په ځانسره ادیونګیري بڼي

$$au'' + bu' + cu = f \quad a(x) \neq 0$$

،

صرب له $-p/a$ سره راکوي $-(pu')' + qu = g$ د لاندې سره

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right)$$

$$q(x) = -c(x)p(x)/a(x)$$

$$g(x) = -f(x)p(x)/a(x)\,.$$

آیګنارزښت پرابلم

$$L\psi = \lambda\varrho\psi$$

د ژئ شرطونو سره

$$\alpha_0\psi(a) + \alpha_1\psi'(a) = 0\,,\ \beta_0\psi(b) + \beta_1\psi'(b) = 0$$

ψ
آيگن تابع بلل كيږي، ايگن ارزښت

پخپله اديونگيري ايگن ارزښت پرابلمونه
ايگن ارزښونه حقيقي دي
همغهيا برابر ايگا ارزښت ته ايگت وابع كرښيز بلواک دي
مختلفو ايگن ارزښتونو ته ايگن توابع ϱ -اورتوگونالدي
ايگن ارزښتونه په كلكخ همغږيزه پرلپسي
$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$
جوړوي

دفرنځيشن **Differentiation**

گرادينت

$$\operatorname{grad} U = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)^{\mathrm{t}}$$

$$\operatorname{grad} \vec{F} = (\operatorname{grad} F_x, \operatorname{grad} F_y, \operatorname{grad} F_z)^{\mathrm{t}}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

ديورگنت(پولي ته نه تلنه)

څرخونRotation

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

په همدې توگه

لاپاس -اوپراتورLaplace-Operator

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U$$

شميرقوانين تول اوپراتورونه كرښيز دي

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, U) = \vec{0}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{F}) = 0$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \vec{F}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

$$\mathrm{grad}(U\, V) = U\ \mathrm{grad}\, V + V\ \mathrm{grad}\, U$$

$$\mathrm{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\mathrm{grad}\, \vec{F})^{\mathsf{t}} \vec{G} + (\mathrm{grad}\, \vec{G})^{\mathsf{t}} \vec{F}$$

$$\mathrm{div}(U \vec{F}) = U\ \mathrm{div}\, \vec{F} + \vec{F} \cdot \mathrm{grad}\, U$$

$$\mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{F} - \vec{F} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{G}$$

$$\mathrm{rot}(U \vec{F}) = U\ \mathrm{rot}\, \vec{F} - \vec{F} \times \mathrm{grad}\, U$$

توته- یا استوانه کواوردیناتونه (پروتولاړ ارزښتونه)

$$(x, y, z) = (\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi, z)\,,\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_\varrho\, \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi\, \vec{e}_\varphi + \Psi_z\, \vec{e}_z$$

$$\mathrm{grad}\, U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi) + \frac{1}{\varrho^2}\partial_\varphi^2\Phi + \partial_z^2\Phi$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \partial_z\Psi_z$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_z - \partial_z\Psi_\varphi\right)\vec{e}_\varrho + (\partial_z\Psi_\varrho - \partial_\varrho\Psi_z)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\left(\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\varrho\right)\vec{e}_z$$

اکسیال سیمتریک ورشوګانط یا پټي Axialsymmetrische Felder

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

Φ همداسي Ψ د پـه واک کي دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_\varrho\Phi\vec{e}_\varrho$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varphi) = \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varrho(\varrho\Psi)\,\vec{e}_z$$

د غونډوسکي يا کري کواوردیناتونه Kugelkoordinaten

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,,\ \varphi\in[0,2\pi)\,,\ \vartheta\in[0,\pi]$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$U(x,y,z) = \Phi(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \Psi_r\,\vec{e}_r + \Psi_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{grad} U = \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\Phi + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta\Phi)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\vartheta)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} = &\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\vartheta\big)\vec{e}_r\\ &+\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\varphi\Psi_r - \sin\vartheta\partial_r(r\Psi_\varphi)\big)\vec{e}_\vartheta\\ &+\frac{1}{r}\big(\partial_r(r\Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta\Psi_r\big)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

راديال سيمتريکي ورشوگانيRadialsymmetrische Felder

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Φ همداسي Ψ د فقط د پہ واک کي دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_r\Phi\vec{e}_r$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_r) = \vec{0}$$

(Autor: Marcus Reble)

انتيگرالونه Integration

پارامتريک کونه

$$C: \ [a,b] \ni t \mapsto \vec{r}\,(t)$$

Kurve کږه

$$S: \ D \ni (u,v) \mapsto \vec{r}\,(u,v)$$

Fläche سطحه

Kurvenintegral د کږې انتیګرال

$$\int_C U = \int_a^b U\big(\vec{r}\,(t)\big)\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Arbeitsintegral د کارانتیګرال

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}\,(t)\big)\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

د سطحي انیګرال

Flächenintegral

$$\iint_S U\,dS = \iint_D U\big(\vec{r}(u,v)\big)|\vec{n}(u,v)|\,du\,dv\,, \quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Flussintegral
جریان انتیګرال

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big)\cdot\vec{n}(u,v)\,du\,dv\,, \quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Fluss durch Funktionsgraph
جریان له فنکشنګراف څخه

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x\partial_x f - F_y\partial_y f + F_z\,dx\,dy\,, \quad z = f(x,y)$$

Fluss durch Zylindermantel
جریان له توتي پوښ څخه

$$\varrho = \varrho(\varphi): \quad \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho\varrho - F_\varphi\partial_\varphi\varrho\,dz\,d\varphi$$

$$\varrho = \varrho(z): \quad \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \, dz \, d\varphi$$

خانګړی $2\pi a(z_{\max} - z_{\min}) f(a)$ د لپاره $\vec{F} = f(\varrho)\vec{e}_\varrho$ د $\varrho = a$ سره

Fluss durch Kugeloberfläche

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta$$

mit $r = a$

speziell $4\pi a^2 f(a)$ für $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$

vektorielle Kurvenintegrale وکتوري ګړی انتیګرالونه

$$\int_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \, |\vec{r}\,'(t)| \, dt = \left(\int_C F_x \, , \, \int_C F_y \, , \, \int_C F_z \right)^{\mathrm{t}}$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}\,'(t) \, dt = \begin{pmatrix} \int_C (F_y \, dz - F_z \, dy) \\ \int_C (F_z \, dx - F_x \, dz) \\ \int_C (F_x \, dy - F_y \, dx) \end{pmatrix}$$

vektorielle Flächenintegrale

وکتوري سطحي انتیګرالونه

$$\iint_S \vec{F} dS = \left(\iint_S F_x \, dS \, , \, \iint_S F_y \, dS \, , \, \iint_S F_z \, dS \right)^{\mathrm{t}}$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}\,) \, \vec{n}^{\circ} \, dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}\,) \times \vec{n}^{\circ} \, dS$$

د ګاوس جمله

Satz von Gauß

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\iiint\limits_V \operatorname{grad}U\,dV = \iint\limits_S U\,d\vec{S}$$

$$\iiint\limits_V \operatorname{rot}\vec{F}\,dV = -\iint\limits_S \vec{F}\times d\vec{S}$$

$$\iint\limits_A \operatorname{div}\vec{F}\,dA = \int\limits_C \vec{F}\times d\vec{r}\,,\quad A\subset\mathbb{R}^2$$

د گري Griesche انتيگرال فرمولونه

Griesche Integralformeln

$$\iint\limits_S (U\operatorname{grad}W)\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V \left(\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}W + U\Delta W\right)\,dV$$

$$\iint\limits_S \left(U\operatorname{grad}W - W\operatorname{grad}U\right)\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V (U\Delta W - W\Delta U)\,dV$$

د ستوکس جمله

Satz von Stokes

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{F})\cdot d\vec{S} = \int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$-\iint\limits_S (\operatorname{grad}U)\times d\vec{S} = \int\limits_C U\,d\vec{r}$$

$$\iint\limits_A \operatorname{rot}\vec{F}\,dA = \int\limits_C \vec{F}\cdot\,d\vec{r}\,,\quad A\subset\mathbb{R}^2$$

سکالار پوتنشل

Skalares Potential

$\operatorname{grad} U = \vec{F}$

سره د U سکلار ورشو

د شتون له پاره اړيين شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$,

په يوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten D

C خوښه، په کې له ځخه د په لور ځغليدونکي لار

C ein beliebiger, in D von A nach B verlaufender Weg:

د انتيګرال د لارې خپلواکوالی

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \Rightarrow$$

Wegunabhängigkeit des Integrals

Vektorpotential

وکتورورشو يا پتیVektorfeld $\vec{A}$ mit $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$

د شتون له پاره اړيين شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$,

په يوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten

Grundfunktionen بنسټيز توابع

]

Komplexe Funktion ګډوله توابع

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)\,, \quad z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}\varphi}$$

Möbius-Transformation

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Geraden / Kreise werden auf Geraden / Kreise abgebildet

کربښي همداسي دايري(گردی) په کربښو همداسي په گرديو تنظميري

د دري تکو له لاري کره کيدنه Festlegung durch drei Punkte (z_i, w_i) :

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x\,(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Komplexer Logarithmus

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Potenzfunktion

$$z^{p/q} = r^{p/q}\,\exp\left(p(\varphi + 2\pi j)\mathrm{i}/q\right), \quad j = 0, \ldots, q-1$$

komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

f komplex differenzierbar:

$$f'(z) = f_x(z) = -\mathrm{i}f_y(z) \quad \Leftrightarrow \quad u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$$

konjugiert harmonische Funktion

$\Delta u = 0$ auf D einfach zusammenhängend

$\Rightarrow \exists v : \Delta v = 0$ und $f = u + \mathrm{i}v$ komplex differenzierbar

Isotropie

Abbildung $z \mapsto w(z)$

und Winkeltreue

dreht Richtungen um Winkel $\arg f'(z)$

streckt Längen um Faktor $|f'(z)|$

Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

elementare Abbildungen
خيره وني يا تابعگاني

خيره ونه يا تابع Abbildung	له مخه خيره يا – تابع Urbild	حيره يا تابعBild
$w = z^\alpha$	Sektor $0 < \arg z < \gamma$	Sektor $0 < \arg w < \gamma\alpha$
$w = \dfrac{z+1}{\mathrm{i}z - \mathrm{i}}$ $\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{\mathrm{i}w + 1}{\mathrm{i}w - 1}$	Einheitskreisscheibe يونگردی کتره يا ټوټه $\lvert z\rvert < 1$	obere Halbebene پورتنی نيمهواره $\mathrm{Im}\, w > 0$
$w = e^z$ $\Leftrightarrow \quad z = \mathrm{Ln}\, w$	Streifen $0 < \mathrm{Im}\, z < \gamma$ كربني	برخهSektor $0 < \arg w < \gamma$

Integration

Kurvenintegral

$$\int_C f\, dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt\,, \quad C : t \mapsto z(t)\,,\ t \in [a,b]$$

Stammfunktion f im Gebiet D komplex differenzierbar, C ein in D verlaufender Weg von z_0 nach z_1 :

$$\int_C f'\,dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$$

Singularitäten

schwache Singularität: $\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = 0$

Pol n-ter Ordnung: $|z-a|^{n-1}|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$, $(z-a)^n f(z)$ beschränkt für $z \to a$

wesentliche Singularität: $(z-a)^n f(z)$ für kein n beschränkt

Cauchys Theorem

f analytisch in D bis auf endlich viele schwache Singularitäten, $C \subset D$ geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Cauchysche Integralformel

f analytisch, $n(C, z)$ Umlaufzahl von C bzgl. z:

$$n(C,z)f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Integralformel für

Ableitungen

f analytisch, $n(C, z)$ =1:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt$$

Maximumprinzip

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

automatisch erstellt am 31.1.2006

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Residuenkalkül

Residuum f analytisch in $D \setminus \{a\}$,

$C \subset D$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_a f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f(z)\, dz$$

einfache Polstelle: $\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$

Pol n-ter Ordnung:

$$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \left((z-a)^n f(z)\right)$$

Residuensatz C entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D, a_j Singularitäten von f in D:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_j \operatorname*{Res}_{a_j} f$$

Trigonometrische Integranden	$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t)\,dt$ geht mit der Substitution $z = e^{\mathrm{i}t}$ über in $$\int_{\lvert z\rvert=1} f(z)\,dz\,, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}$$
Rationale Integranden	f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_a f$$
Transzendente Integranden	f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad kleiner als Nennergrad: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_a \left(f(z)e^{\mathrm{i}\lambda z}\right)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$
Algebraische Integranden	f rational ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse, höchstens einfacher Pol bei 0, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad: $$\int_0^{\infty} f(x)x^{\alpha}\,dx = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-e^{2\pi\mathrm{i}\alpha}} \sum_{a\neq 0} \operatorname*{Res}_a \left(f(z)z^{\alpha}\right)\,, \quad 0<\alpha<1$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

automatisch erstellt am 31.1.2006

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Potenzreihen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j$$

Restglied:

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)}\, dw \right) (z-a)^{n+1}$$

Taylor-Reihe

f analytisch in $D:\ |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$
,

Konvergenzradius r: Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

f analytisch in $D:\ r_1 < |z-a| < r_2$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad , \quad c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um a ohne Singularitäten, r_1, r_2: Abstand der begrenzenden Singularitäten zu a

$$r_1 = \overline{\lim_{n\to -\infty}} |c_n|^{-1/n} \quad , \quad r_2 = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

[Home] [Lexikon] [Aufgaben] [Tests] [Kurse] [Begleitmaterial] [Hinweise] [Mitwirkende] [Publikationen] [Suche]

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Differentialgleichungen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Regulärer Punkt

Die Differentialgleichung $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$ ist bei a regulär, wenn q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von a sind.

Entwicklung: $$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n$$

Rekursion: $$u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0)\,,\; n \geq 2$$

mit durch Anfangsbedingungen $u_0 = u(a)$ und $u_1 = u'(a)$ eindeutig bestimmten Koeffizienten u_n

Singulärer Punkt

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

hat bei a einen regulären singulären Punkt, wenn $q/r = q_0/(z-a) + O(1)$ und $p/r = p_0/(z-a)^2 + O(1/(z-a))$.

Charakteristische Gleichung: $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$

Entwicklung: $u = (z-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n \,, \; u_0 \neq 0$

Rekursion: $\varphi(\lambda + n)u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0) \,, \; n \geq 1$

Differenz der Nullstellen ganzzahlig: eine Lösung zur Nullstelle mit größtem Realteil, zweite Lösung mit Variation der Konstanten

Hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0,$$

$$-c \notin \mathbb{N}_0$$

$$u(z) = F(a,b,c,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n \,, \quad (t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

Bessel-Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0 \,, \; \alpha \notin \mathbb{Z}$$

linear unabhängige Lösungen:

$$J_{\pm\alpha} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Fourier-Analysis

Fourier-Reihen

Reelle Fourier-Reihe	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$ mit $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt\,, \quad k \geq 0$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt\,, \quad k \geq 1$
Komplexe Fourier-Reihe	$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ mit $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$
شميربدلون د فوريي ضريبونو له پاره Umrechnungsformeln für Fourier-Koeffizienten	$a_0 = 2c_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1$ $c_0 = a_0/2\,, \quad c_k = (a_k - \mathrm{i}b_k)/2\,, \quad c_{-k} = (a_k + \mathrm{i}b_k)/2 \quad \text{für } k \geq 1$
سیمِترSymmetrien	f gerade: $b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad c_k = c_{-k}$

f ungerade:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt, \quad c_k = -c_{-k}$$

سکالار ضربSkalarprodukt
نورم, Norm

$$\langle f, g \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

,

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \langle f, f \rangle_{2\pi}$$

Fourier-Projektion فوريي برپوستون

$$(p_n f)(x) = \sum_{|k| \le n} \langle f, e^{ikt} \rangle_{2\pi} e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\big((n+1/2)(x-t)\big)}{\sin\big((x-t)/2\big)} f(t)\, dt$$

Konvergenzrate د پولې ته تلني کچه

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \le (n+1)^{-k}\, \|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

برزيول-ورته والیParseval-Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Diskrete Fourier-Transformation

د فوريي ماتريکسونهFourier-Matrizen

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

$$(W_n)^{-1} = \frac{1}{n} W_n^*$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Diskrete Fourier-Transformation	$f = W_n c \;\Leftrightarrow\; f_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk} c_k\,, \quad j = 0, \ldots, n-1$
Inverse diskrete Fourier-Transformation	$c = \frac{1}{n} W_n^* f \;\Leftrightarrow\; c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-kj} f_j\,, \quad k = 0, \ldots, n-1$

Fourier-Transformation

Fourier-Transformation	$\widehat{f} = \mathcal{F} f, \quad \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\mathrm{i}xy}\, dx$
Inverse Fourier-Transformation	$f = \mathcal{F}^{-1} \widehat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, e^{\mathrm{i}xy}\, dy$

د ترانسفورميشن لارې يا قوانين Transformationsregeln

كربنيزوالیLinearität

$$a f(x) + b g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a \widehat{f}(y) + b \widehat{g}(y)$$

سيومتري Symmetrie

$$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-x)$$

Konjugation

$$\overline{f}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\widehat{f}(-y)}$$

Skalierung

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y/a)/|a|$$

Verschiebung

$$f(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\mathrm{i}ay} \widehat{f}(y)$$

$$e^{\mathrm{i}ax} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-a)$$

Differentiation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathrm{i}y)^n \widehat{f}(y)$$

$$(-\mathrm{i}x)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \widehat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau) g(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\, \widehat{g}(y)$$

$$f(x)\, g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y-\tau) \widehat{g}(\tau)\, d\tau$$

Spezielle Funktionen

f	$\widehat{f}$
1	$2\pi\delta(y)$
1 für $x \in [-a, a]$, 0 sonst	$2a\,\mathrm{sinc}(ay)$
$\mathrm{sign}(x)$	$2/(\mathrm{i}y)$
$e^{-a\|x\|}$	$2a/(a^2+y^2)$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\pi/a}\, e^{-y^2/(4a)}$

د پلانشرل جمله Satz von Plancherel

$$2\pi\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle\,,\ \sqrt{2\pi}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2\, dy\right)^{1/2}$$

Poisson-Summationsformel

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi l)$$

Heisenbergs Unschärfeprinzip

$$\|xf\|\,\|y\widehat{f}\| \geq \frac{1}{2}\|f\|\,\|\widehat{f}\|$$

Rekonstruktionssatz

Hat f Bandbreite h, d.h. $\widehat{f}(y) = 0$ für $|y| > h$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j\pi/h)\,\mathrm{sinc}(hx - j\pi)\,.$$

Multivariate Fourier-Transformation

Fourier-Transformation	$\widehat{f} = \mathcal{F}f, \quad \widehat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$
Inverse Fourier-Transformation	$f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}, \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Transformationsregeln

Linearität	$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f}(y) + b\widehat{g}(y)$
Symmetrie	$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^n f(-x)$
Transformation	$f(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \lvert\det(A)\rvert^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^{\mathrm{t}}y), \quad \det(A) \neq 0$
Verschiebung	$f(x-v) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-\mathrm{i}v^{\mathrm{t}}y)\widehat{f}(y)$
	$\exp(\mathrm{i}v^{\mathrm{t}}x)f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-v)$
Differentiation	$\partial^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} y^\alpha \widehat{f}(y), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
	$x^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} \partial^\alpha \widehat{f}(y)$

Faltung

$$\left(f \star g\right)(x) \ \xrightarrow{\mathcal{F}} \ \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

Spezielle Funktionen

f	$\widehat{f}$
1 für $x \in [-a,a]^n$, 0 sonst	$(2a)^n \operatorname{sinc}(ay_1)\cdots\operatorname{sinc}(ay_n)$
$\exp(-\lvert x\rvert)$	$\dfrac{2^n \pi^{(n-1)/2}\Gamma((n+1)/2)}{(1+\lvert y\rvert^2)^{(n+1)/2}}$
$\exp(-\lvert x\rvert^2/2)$	$(2\pi)^{n/2} e^{-\lvert y\rvert^2/2}$

Norminvarianz

$$(2\pi)^{n/2}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 \, dy\right)^{1/2}$$

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې او ناچاپ لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندي د شميرپوهني پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهني ستر کتاب : د شميرپوهني برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسي د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځې ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنښیال برابرون (دا کتاب په دې ښانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،،

له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په ۲۰۱۲ کې چاپ شوې.

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ځخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ځخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکني

<u>Bonn (Germany):</u>

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسي د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی:

د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ ــ د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې يې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه يې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي).

د اوم څخه تر دولسم ټولګي پورې د شمیرپوهنې کتابونه، چې لنډ وخت کې به ن ج ته پورته شي.

د دولسم ټولګي کتاب په درې،چې دا به هم زرترزره ن ج ته پورته شي.