کرښیز الجبر

$$
\begin{array}{c|l}
 & A \cdot X_1 = b \\
- & A \cdot X_2 = b \\
\hline
= & A \cdot (X_1 - X_2) = 0
\end{array}
$$

له ن ج : بنسټیز درس | کرښیز الجبر

2012

Ketabton.com

ژباړی: ډاکتر ماخان(میری) شینواری

ketabton.com - The Digital Library

کرښیز الجبر

$$
\begin{array}{c|l}
 & A \cdot X_1 = b \\
- & A \cdot X_2 = b \\
\hline
= & A \cdot (X_1 - X_2) = 0
\end{array}
$$

dr.shinwari@hotmail.com

له ن ج : بنسټیز درس | کرښیز الجبر

ژباړی: ډاکتر ماخان(میږی) شینواری

ketabton.com - The Digital Library

سرليک

نظر يا د پيداکيدو فکر ۱

هندسي لړۍ پرلپسي يا لړۍ ۲

د برنولي نا مساوات يا نابرابرون ۳

د يوه کرښيز مساواتسيستم جوړښت ۴

ماتريکسونه: ۵

تراسپوني ماتريکس ۷

سيومتريکي ماتريکسونه ۷

نا يو ډوله يا اينهوموجين ۸

يو ډوله يا هوموجين ۹

ليکه پوړيز بڼه ۹

ديترمينانتونه ۱۳

رانګ ۱۳

د حلفضا د ديمنزيون (بعد، پراخيدونی)تاکل ۱۳

د ګاوس - تلنلار يا - - قانون ۱۴

د ګاوس الګوريتموس تيکاوی ۱۶

د حلونو يا اوبيونو نور قوانين ۱۷

ورته والي - يامشابهت اړيکي ۱۹

ډېرۍ يا سټ له تړنو يا عمليو سره ۱۹

لاندې برخه (که توټه برخه يا کښته برخه): ۲۰

ګروپ ۲۰

ketabton.com - The Digital Library

سرليک

د ابل - يا کموتاتيو ګروپ	۲۱
کړۍ	۲۱
بدن يا تن	۲۳
پاتې ټولګي يا باقي ټولګي	۲۳
وکتور فضا	۲۷
کربنيز خپلواکوالی	۲۷
کربنيز بلواکواکوال	۲۸
د وکتور فضا تعريف	۲۸
د يوه وکتور فضا جوړونه يا که غواړۍ توليد	۲۹
سپاين يا کربنيزه Spann،((کربنيزه) رابنده ورشو	۳۴
جوړښتسيستم (توليدي سيستم)	۳۴
بنسټ	۳۵
د شتاينيځ بدلونجمله	۳۵
بعد يا پراخېدونی	۴۰
لاندې وکتور فضا	۴۲
د لاندې فضاو لپاره د بعد يا پراخيدوني فرمول	۴۳
د فنکشنونو يا ځيرونو(توابعو) خويونه	۴۴
په کې (فنکشن يا تابع)	۴۴
په (په باندې او په کې فنکشن يا -- تابع)	۴۴

ketabton.com - The Digital Library

سرلیک

کرښیز فنکشنونه یا توابع ۴۵
زړی(هسته) او عکس یا څېره ۴۵
څانګړي کرښیز فنکشنونه ۴۶
د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېروني ۵۰
ایزومورفیزمونه ۵۱
ماتریکسونه ۵۲
د یوه ماتریکس رانګ ۵۳
د متېر(درز یا ستنې یا ولاړې ... ۵۵
په څټ- یا معکوس ماتریک ۵۵
دیترمینانتونه ۵۶
د لاپلاس د ودیزېنې جمله ۵۸
د دیترمینانتونو ساده ټاکنه ۵۹
د ایندومورفیزم دیترمینانتونه ۶۱
أیګن ارزښت ۶۲
أیګنوکتور ۶۲
دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې ۶۲
أیګن فضاوې ۶۳
ماتریکس سړی څنګه دوه-کونجتړې یا... ۶۴
سکالار ضرب(دنننی څل یا –ضرب) او نورم ۶۵
د کوشي –شوارڅ- نامساوات ۶۷

ketabton.com - The Digital Library

اورتوګونال وکتورونه ۶۸

اورتونورمال بنسټونه: ۶۸

ځای بدلون ۶۸

ترانپوزیشن ۶۸

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې ۷۰

ketabton.com - The Digital Library

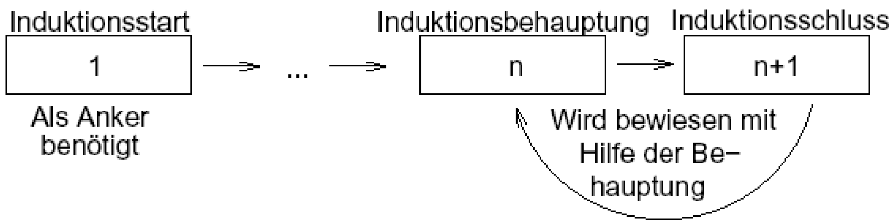
د ژباړې نیولیک

د دې سرلیک لاندې یوه بله لیکنه هم شته. دا مخ ته پرته لیکنه ساده او د پیل په څیر باید وکتل شي. دا لیکنه د بنسټیزو لیکنو ن ج څخه راژباړل شوې ده.

ketabton.com - The Digital Library

نظر يا د پيداکيدو فکر

پوره اندکشن د ښووني يو متود يا لار ده، هغه چې په کرښيزه الجبر کې زيات کارول کيږي. د ښووني لپاره نيول کيږي چې يو تاکلی فرمول د اندکشن ثبوت د n لپاره صدق کوي. د اندکشن پای يا ختمپدلو – چې د اندکشن پل هم بلل کيږي- ښوول کيږي، چې دا فرمول د $n+1$ لپاره صدق کوي، دايي چې بېرته د اندکشن ثبوت باندي لاس ولرو يا راونيسو. د دې لپاره چې ښوونه پيخي ټيک يا پوره ټيک وي، د يوه نښلون تکي ته اړتيا شته، له کوم چې n پيل کيږي. دا نښلونتکی د اندکشن پيل تکی هم بللکيږي. يا د اندکشن پيل او په ښوونه کې په پيل کې راوړل کيږي.



.

د پورته ديښتو ژباړه له کيڼ و ښي لور ته:

پورته: د ايندکشن پيل. لاندې: د په باندې ايښولو (کلکولو) لپاره اړين.

لوريزۍ کرښي: لرو .

بيرته خيره پورته: د ايندکشن غوښتنه يا ثبوت د ايندکشن پای. لاندې: د غوښتني يا ثبوت په مرسته ښوول کيږي.

ketabton.com - The Digital Library

هندسي لړۍ پرلپسې یا لړۍ (   )

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د ښوولو دی:

د اندکشن پیل: $n = 1$

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 \\ &= \text{Okay} \\ \tfrac{1-q^1}{1-q} &= 1 \end{aligned}$$

د اندکشن وړاندنیونه(فرضیه): د n لپاره دې ښوول شوي وي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د اندکشن پل : $n \leadsto n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

دا دد ښوولو دی.

کینې پیل کوو

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\ &=_{nach\ Vor.} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-q^n+(1-q)q^n}{1-q} \\
&= \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

د برنولي نا مساوات یا نابرابرون Bernoulische Ungleichung

دې وښوول شو $(1+x)^a \geq 1+ax$

د االندکشن پیل : $a=1$

تیک دی. : $1+x \geq 1+x$

د اندکشن پل:

$$a \rightsquigarrow a+1$$

$$(1+x)^{a+1} \geq 1+(a+1)x$$

دې وښوول شي

موږ بېرته له ښیٔ لورې پیل کوو

لاندې کې : Die Voraussetzug= نیونه(فرضیه)

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{a+1} &= (1+x)^a \cdot (1+x) \\
&\geq_{Voraussetzung} (1+ax)\cdot(1+x) \\
&= 1+x+ax+ax^2 \\
&= 1+(a+1)x+ax^2 \\
&\geq 1+(a+1)x
\end{aligned}
$$

د پوره اندکشن سره نور د ښوولو فرمولونه

$$(1+x)^a \geq 1+ax \quad \forall x \geq 0$$

ketabton.com - The Digital Library

د لومړيو n طبيعي اعدادو مجموعه:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

د يوه کرښيز مساواتسيستم جوړښت

يو کرښيز مساواتسيستم د يو کرښيزو مساواتو تعداد څخه جوړ دی. دا مساوات نامعلومې خوندي لري، هم داسې په نامه واريابلې (اووښتونې يا متحولې). نامعلومې د ضريبونو سره ضربيږي. که د نامعلومې ضريب 0 - وي يعنې باور ولري: $0 \cdot x_k$ (دلته x_k نامعلومه ده) – نو دا ډول نامعلومه په مساواتو کې هم پرئښوول کيږي يعنې نه ليکل کيږي. دا لاندې د يوه کرښيز مساواتسيستم يوه بېلګه ده:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}$$

او دا ټول a_{ij} عمومي ضريبونه دي او x_j واريابلې يا متحولې يا اووښتونې :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

وکتور $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کوم چې زيات وخت عمود ليکل کيږي د حل وکتور بلل کېږي.
د يوه مساواتسيستم د ممکنه حلونو ډېرۍ يا سټ د حلونو ډېرۍ بلل کيږي:

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = b\}$$

که د حلونو ډېرۍ تشه وي، نو د مساواتسيستم ناحلوړ يا نه حل کيدونکی دی.

ketabton.com - The Digital Library

ماتریکسونه:

سرِی کرِی شي په لږ ځای کې کرښیز مساوات د ماتریکس په ډول ولیکي. د مخه له دې چئ دا کار کوو باید ماتریکسونه راوږو یا رامنځ ته کړو.

یو متریکس یو ولاړکوډیز یا ولاړکونجیز جدول دی د m کیلو یا لیکو او n درځونو یا متړو یا ولاړو لیکو سره.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د ماتریکس لیکنډول mxn - ماتریکس

سرِی کرِی شي د ماتریکسونو یوګونې کرښې رادباندې ولیکي. دا بیا د **لیکو وکتورونه** بلل کیږي. په ټیک دې ترتیب د ولاړو لیکو یا متړو یا **ستنو وکتورونه** هم لاس ته راوړی شوو، که سرِی یوګونې متې رادباندې ولیکي.

سرِی کرِی شي ماتریکسونه یو له بل سره جمعه کړي.

$$A+B \quad := \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

او سره ضرب کړي-+:

ketabton.com - The Digital Library

$$A \cdot B \; := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1m} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{nm} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1m} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{nm} \end{pmatrix}$$

د ماتریکسونو په جمعه ساده پوهیدل کیدی شي. سرې سره جمعه کوي، جې اړونده کمپوننتونه یو له بل سره حمعه کړي، داسې نتیجه لاس ته راځي. د ماتریکسونو ضرب ستونځمندی. په ضرب کې د لومړۍ ماتریکس لیکه د دویمې ماتریکس د متې سره ضرب کیږي او ورپسې سره جمعه کیږي. او نتیجه یې داسې لاس ته راځي، چې c_{ij} یعنې i–مه لیکه ، j -مه مته کې ضرب د حل ماتریکس چې لاسته راشي، د لومړي ماتریکس د i–مې لیکې د j–مې متې یا ستن د توکو سره ضربوو او له ټولو ضربونو څخه جمعه جوړوو. دا یو ځل بیا لیکو:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

هیله ده، چې په دا موضوع کې به لږه روښنتیا منځ ته راغلې وي. داسې وایو چې سرې دښۍ دیترمینانت مته په $90°$ درجو د ساعت ځرخوني (عقربک؟؟)په لور ځرخوي، چې د کینې ماتریکس په لیکه پریوځي، یو په بل پراته توکي بیا سره ضربیوي او په دې پسې یې بیا له دې ضربونو جمعه جوړوي.

ketabton.com - The Digital Library

اوس د ماتريکس د ضربوني په بنديزونو هم پوهيږو. سړی کړی شي $n \times m$- ماتريکس فقط د $n \times m$ -ماتريکس سره ضرب کړي. دا په دې معنا، چې د کيڼ ماتريکس ليکې ټيک دومره بايد اوږدې وي لکه د ښي ماتريکس متې (درځونه، ستنې) ، پرته له دې ته په ليکه نه ،، پرېوځي،، يا سرخوري .

تراسپوني ماتريکس

د يوې ماتريکس ترانپوني ماتريکس داسې لاس ته راوړو، چې ليکې او متې سره بدلې شي. له توکي a_{ij} څخه توکی a_{ji} لاس ته راځي.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بيلګه:

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

د مربع ماتريکسونو لپاره دا په همدې معنا دی لکه په ،،دوه – کونجترې،، (قطر) باندې هندارونه(انعکاس).

سيومتريکي ماتريکسونه

يو ماتريکس ټيک هلته سيومتريک دی، چې باور ولري:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

د کرښيزمساوات سيستم ځايسپماييزه ليکندول

د يوه ماتيريکس په مرسته او کېدی شي کرښيزمساوات انرږي – او ځای سپماييز وليکو. موږ ته دا بام ودريږي، چې دا نامعلومې تل په هر مساوات کې همهغه دي . نو لکه په ماتريکس ضربونې کې د ماتريکس ضربونې په مرسته دا د مساوات سيستم څخه دباندې راباسو او په دې توګه د ضريبونو(ځلوونو) ماتريکس A لاس ته راوړو:

ketabton.com - The Digital Library

$A \cdot x = b$

د لیکبنې له مخې دا داسې برېښي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

د ګاوس تلنلار لپاره ، چې لاندې لیکل شوې ده، دا بیا په لنډه توګه تکراروو او $x-$ - وکتور هم لرې بریږدو. له دې سره نوکان او مساوات هم لرې پرېږدو یا نه لیکو او دا ټول په یوه کاستن Kasten, یا کارتون کې لیکو، چې دا لګه چې ګورو، په لاندې توګه لیکل کیږي.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array}$$

نا یو ډوله یا اینهوموجینبرابرون

یو کرښیز مساوات سیستم نایوډوله (اینهوموجین) بللکیږي، که که لږ تر لږه د یو b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور ولری

$b_i \neq 0$

په رېښتینې توګه دا پهدې معنا دی: پهښۍ لور صفرماتریکس نه دی ولاړ یا ځای په ځای نه دی.

یو ډوله یا هوموجین Homogen

د دې برعکس یو مساوات سیستم برابرډوله (هوموجین) بلل کیږی، که b صفروکتور وي، دا په دې معنا چې دټول b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور لري

ketabton.com - The Digital Library

$b_i = 0$

دا دا معنا لري، چې په بنې اړخ صفروکتور پروت دی

لیکه- پوړیز بڼه Zeilenstufenform

موږ اوس طبعاً د کرښيز مساواتسیستم د اوبیونې یا حل سره مینه لرو. دا ګاوس الګوریتم چې یوځه کښته راځي، د اوبیونو یا حلونو د پیداکولو لپاره مرسته کوی. دا ماتریکس د ساده لیکه بدلون بڼې څخه په لیک –پوړې –بڼې باندې اړوي. په لیکبوړیزبڼه کې یو ماتریکس مخ ته لرو، که هغه خورا ټیټه لیکه دا اکثره کيڼ پراته صفرونه ټولې لیکې خوندي ولري او د کيڼ پرتو صفرونو تعدا(ګڼون) پورته لور ته کم شي، د کوم سره چې کله کله یې له لیکې و لیکې ته یو ځل برابر باتې کيږی. لاندې ماتریکس د لیکې- پوړیز- بڼې ماتریکس بیلګه ده

$$\begin{pmatrix} 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \otimes \neq 0 \\ \oslash \neq 0 \text{ oder } 0 \end{matrix}$$

پورته الماني: د ،،یا،، په معنا

جمله :

موږ کړی شو هر ماتریکس په لیکه-پوړیز-بڼه ماتریکس واړوو. داچې د ګاوس تلنلار د دې لپاره یو الګوریم راکوي، چې دا متمین ده او دا جمله ښوول شوې.

د حلونو کریتیریوم

(نځښې، چې د دوه یا زیاتو شیانو یا کسانو ترمنځ پرې پرېکړه کيږي)

د دې لپاره چې د کرښيزمساتسیستم د حلونو تعداد وټاکلی شو، د حلونو کریتیرین یا نځښې(توپیرنځښې) شتون لري..

ketabton.com - The Digital Library

برابرډوله یا هموجین مساواتسیستم کړی شي یا ساده حل ولري او یا ډېر حلونه ولري.

ساده حل:

ساده حل یې صفروکتور دی، دا په دې معنا، چې ټول مساوات ټیک هلته پوره کیږي، که ټولې واریابلې(متحولې یا اووښتونې) صفر کېښوول شي.

دا حالت هلته رامنځ ته کیږی، چې که برابرډوله مساوات سیستم په داسې لیکه-بوړیز-بڼه و اړولی شي، چې په هره لیکه کې له بورته تر کښته یو صفر ځا په ځای وی. او همدومره د ماتریکس متې ولرو لکه لیکې.
د یوه کرښیز مساوات سیستم بیلګه، چې یو د لیکه-پوړی-بڼې ماتریکس سره ، چې ښايي، چې فقط ساده حل شتون لري.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د دې مساواتسیستم د اخرنې لیکې څخه لاس ته راځي $x_3 = 0$. له دویمې لیکې لاس $x_2 = 0$ ته راځي او بالاخره $x_1 = 0$ ، له کومه امله چې موږ د حل په څېر فقط صفروکتور لاس ته راوړو.
د یو هموجین مسواتسیستم سره کړی شو و ازمایو، چې ایا ومتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک ای ا کرښیز بلواک دي. موږ له دې سره وکتورونه په متاریکس کې د متې وکتورونو په څیر لیکو. که داسې لاس ته راوړی هموجین کرښیز م ساوات سیستم فقط ساده حلونه لري، ن و وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دی.

زیات حلونه یا اوبیونې:

دا هوموجین کرښیز مساوات سیستم زیات حلونه لري، که خپلواکه متحوله (اووښتونې) شتون ولري.. یوه خپلواکه اووښتونې هغه اووښتونې ده چې مساواتسیستم حل له لارې کره نه وي ټاکل شوي. موږ مړی شو داسې اووښتونې په خپله خوښه وټاکو او همداسې په خوښه زیات حلونه د مساوات سیستم لپاره لاس ته راځي.

دا حلونه یو وکتورفضا غزوي.

ketabton.com - The Digital Library

دا څنګه پېژنو،چې ایا یو میاواتسیستم خپواکي متڅولي لري؟ خپلواکي متحولي ټیک هلته شتون لري، چې په سیستم کې لږ مساوات شتون ولري، نسبت اووبشتونو ته.

بېلګه:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

داسي مساواتسیستمونههم شته، چې په هغې کې داسي نه ده، چې د متحولو څخه دې مساوات لږ وي. په داسي مساواتسیستم کي پېژنو، چې په لیکه پوړیزه کونه کي یوه صفرلیکه شتونلري. پههوموجېنګربنیز سیستم کې کېدی شي داسي لیکه له منځه یوسو(پام! داپه ناهموجېن کې مکنه نه ده، ځکهچي دا حقیقت به مو لهمنځهوړی وي، چې کومحل شتون نه لري) . که د دې لهمنځه وړني سره زیاتي متحولي پاتي شي نسبت مساواتو ته ، ن و یو م ساواتسیستم بهولرو د خپلواکو (ازاده)متحولو سره .
که د یوه هوموجین مساوات سیستم د حل سره، په کوم کې چې ماتریکس له متو وکتورونو جوړ دی، چې کربنیز خپلواکوالی یې یو بل ته ازمایل کیږي، لاس ته راشي، نو وکتورونه یو بل ته کربنیز بلواک دي.

انهوموجین مساواتسیستمونه کېدی شي هیڅ حل، ټیک یو حل او یا ریات حلونه ولرودای شي.

هیڅ حل یا نه حل: یو انهوموجین کربنیز سیستم کوم حل نه لري، که د دیوه مساوات ضریبونه صفر وي، او اړونده b_i صفر نه وي..:

یعني

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \quad b_i \neq 0$$

داسي یو برابرون یا مساوات بنه اړولی بنه بدل **entartet**. بلل کیږي. بنه اړول شوې مساوات نه پوره کیږي او له دې سره تړلمسوات سیستم نه پوره کېدونکی دی، له کومه کبله چې موږ حل هم نه لرو.

ketabton.com - The Digital Library

ټیک یو حل:

یو انهوموجین مساوات ټیک یو حل لري، که دا اړونده هومجین مساوات سیستم – دا اړونده هوموجین مساوات سیستم جوړ شي، په کومکې چې ټول b_i د صفر سره برابر ولیکل شي – فقط ساده حلونه ولري.

د دې لپاره چې حلونه وشمیرلی شو، دا انهوموجین کربنیز سیستم د لیکی پوړیزبڼه باندې اړوو، لکه پورته مو چې داسې وکړل، د کوم سره چې موږ b_i ($1 \leq i \leq n$) هم باید په پام کې ونیسو.

یو ناهوموجین مساوات سیستم کیدی شي د دې لپاره وکارول شي، چې و ازمایي، چې ایا یو وکتور د نورو وکتورونو څخه د کربنیز کمبینېشن په څېر جوړی شي که نه. ټیک هلته یو حل شته، که bد متو یا ستنو وکترونو د کربنیز کمبینېشن څخه جوړولی شي. که داسې یو حل شتون ونه لري، نو نه شي کېدی چې د متو وکترونو څخه کمبینی یا ترکیب کړي. که یو یا حتا زیات حلونه شتون ولري، نو دا په لاندې توګه دي:

زیات حلونه یا اوبیونې:

لکه په کربنیز هوموجېن مساواتسیستم کې ازادې متحولې په ناهوموجېن مساوات سیسم کې هم راپیدا کیږي یا منځ ته ارځي. دا بېرته په هغه وختکې شتون لري، که سړی زاتې متحولې ولري نسبت مساواتو ته. په ناهوموجېن سیستمکې هم سړی کړی شي صفرلیکې لرې کړي، چېرته چې $b_i = 0$ هم وي. په هرحالت دا بڼه تغیر شوې مساوات له منځه نهشي وړل کېدی.

دیترمینانتونه Determinante :

که د یوه مربع ماتریکس وکتورونه یو بل ته کربنیز بلواک وي، نو دیترمینات 0 دی. په بل حالت کې $\neq 0$. له دې سره د $Ax = b$ لپاره باور لري:

ketabton.com - The Digital Library

$\det A \neq 0$ $\Rightarrow$	د هوموجین مساواتسیستم لپاره ساده حل،
$\det A = 0$ $\Rightarrow$	د ناهوموجین مساوات سیستم لپاره حلونه. د ناهوموجین سیستم لپاره حلونه یو حل یا هیڅ حل

رانګ Rang

$$rang(Ab) = rang(A)$$

حل شتون لري. د یوه ناهوموجین سیستم لپاره یو حل شتون لري. د یوه هوموجین سیستم لپاره ساده حل شتون لري.

د حلفضا د دیمنزیون (بعد، پراخیدونی)ټاکل

د یوه هوموجین مساواتسیستم د حلډېریو د د بعد ټاکلو لپاره مورږ کړی شو د دیمنزیون یا بعد فرمول څخه کار واخلو. دا چې هر ماتریکس A په یوه ټاکلي بنسټ f_A ایندومورفیزم انخوروي د هوموجېن کربنیزمساوات سیستم حلفضا لپاره

$$Lsg(A, 0) = Kern(f_A)$$

باور لري او داسې کړس شو د بعد د فرمړل

$$\dim V = \dim(Kern(f)) + \dim(Bild(f)) \Leftrightarrow \text{d}$$

$$\dim(Kern(f)) = \dim V - \dim(Bild(f))$$

سره د حلفضا بعد وټاکو

ketabton.com - The Digital Library

بعد يا پراخيدونی

يا 0 دی : نو بيا تيک ساده حل شتون لري، داسې په نامه صفروکتور.

يا >0 دی : نو په دې حالت کې ازادې اووښتونې(متحولې (شتون لري، بعد لويوالی د متحولو تعداد دی، چې لرو يې:

پوښتنه:

موږ عکس(ځيره) څنګه ټاکو؟ موږ دلته بايد يوون – واهدوکتورنه په ماتريکونو وځغوو يا راوړو. موږ بای د پسې د بيلد(ځېرې) پراخېدونی وشمېرو، داسې چې په هغې کې بېرته يو کربنيزمساواتسيستم حل کړو. موږ له دې سره يو د شميرنې پانګه لرودی شو. او که اشتباه کړم؟

د ګاوس - تلنلار يا - - قانون Gauss-Verfahren

د ګاوس-قانون د دې لپاره دی، چې يو ماتريکس په ليکه وکتورونو راوړي. د ليکه وکتورونو بدليدنه او ليکه کمون يا تفريق د تر مخه سکالار ضرب په بنسټ د برخه اخستونکو ليکو تر هغې مخ ته بيايې، چې ماتريکس په ليکه پوړيز ماتريکس بدل شي. د ګاوس قانون تل د کترولو دی يا عملي کيدی شي.خو سه له دې هم کېدی شي، چې په قوي ډول ناټيک وي. اوس الګوريموس ،، پروګرامي ،، کوو:

لاندې يا کښته برخه:
د ګاوس قانون د يوه ماتريکس د ليکه پوړيز بڼې باندې اړولو لپاره

- په پيل کې ازمايو، چې اياماتريکس ماتريکس همرا اوس ليکه پوړيز بڼه لري. په بيخي ځانګړې توګه $A = 0$ ، يعنې فقط له 0 –نو څخه جوړ ماتريکس ليکه پوړيزبڼه لري.

- د دې عمل جراکولو له مخه – او نظري په دې مهال هم- کېدی شي او بايد هم ليکې بدلې شي، که دا کار ګټور وي. دا په دې معنا، چې د ليکې د پيوت توکي(Pivotelemente) له پورته بيخي کيڼ تل پسې ښې لور ته لاړ شي. د پيوت توکي

ketabton.com - The Digital Library

هغه توکي بللکيږي، کوم چې له ښي لورې کتل شوي په يوه ليکه کې لومړی يا په سر کې د 0 سره نابرابر وي.

- د i سره پيل شوې هر ې ليکې لپاره د پورته ليکې د $i=1$ سره تر د اخرې ليکي پورې لاندې ډول مخ ته ځو:

د هرې ليکې لپاره ، چې وي – ليکه j تل له ليکې i کښته پرته ده - د i

ډيرواره له ليکې j ته ور زياتوي يا تر کموي(که غواړی، جمعه کوي يا ترې

تفريقوي) ، داسې چې a_{ji} - دلته i اووښتوني يا متحوله د متې يا درڅ ګڼه(نمره) په ګوته کوي- 0 شي.

د ګاوس الګوريتموس يوه ليدنه

په لاندې کې Aktuelles ورځنی يا اکتول

لومړی پل يا تلنلار i=1

$$
\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}
$$

دويمه پل يا تلنه i=2

$$
\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
 & & \uparrow & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & 0 & 0 & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
 & & \uparrow & &
\end{array}
$$

ketabton.com - The Digital Library

دریم پل یا تلنه i=3

$$
\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & 0 & X \\
 & & & \uparrow &
\end{array}
$$

له ماتریکی داسې په لاس راړی لیکه پوړیز بڼه وکتور څخه کېدی شي حلونه (اوبیونې) وشمېرل شي.

دا داسې کوو چې دا مساواتسیستم بېرته په ماتریکس بڼه په یوګونو مساواتو بدل کړو او له لاندې څخه په پیل په اړونده متحولې پسې حل کړو.

کخ دا مساواتسیستم زیات حلونه لرودی شي، نو له دې سره پېژنو، چې متحولې شتون لري، چې د هغو ارزښتونه ه شو ټاکلی. دا نو ازادې متحولې دي.

د ګاوس الګوریتموس ټیکاوی

د دې لپاره چې وښایو چې ګاوس قانون یو کرښیز مساوات سیستم$\overline{A}$ د ټیک همغه یا برابر حلډېری (حلسټ)   سره لکه مساواتسیستمA یې چې تولیدوي، باید وښایو، چې لاندې بڼه بدلونونه په حلونو کوم اغیز نه لري.

لومړی: د لیکو بدلونه

دویم : د لیکو ضربونه د سره او بالاخره یې د بلې لیکې سره زیاتول یا کمول(جمعه او تفریق)

ښوونه یې:

لومړی : دا ساده دی. د یوه مساولتسیستم د لیکو بدلون په حلونو کوم اغیز نه لري، ځکه چې لړې پرلپسې پروا نه لري..

ketabton.com - The Digital Library

دویم : موږ د مساواتسیستم دوه لیکي ترځېړني لاندې نیسو، څکه چې بڼه بدلون فقط د دې دوه لیکو په مرسته صورت نیسي. نور و دوه لیکو سره سراوکار نه لرو او د حلونو ډېرۍ تغیر نه خوري:

$$\begin{array}{lcccccccc} (1) & a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ (2) & a_{j1}x_1 & + & \cdots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \end{array}$$

لومړۍ لیکه د λ سره ضربوو، په مساوات کې تغیر نه راځي، څکه چې سړی λ بیرته لنډولی شي یا کمولی شي یا که غواړۍ اختصار کولی شي:

$$\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n = \lambda \cdot b_i$$

دا(1) اوس د دویمې(2) لیکې سره جمعه کوو، لکه چې ترې لرو

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + (\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n) = b_j + (\lambda \cdot b_i)$$

پوهیږو چې دلته هم په حل کې کوم تغیر نه راځي، څکه چې مساوات ورسره زیاتوو، چې په دواړو لورو ته راغلی او دواړو لورو ته همغه برخه ورکوو. دا بیرته سره لنډیدی شي او موږ بیرته وتونمساوات لرو.

د حلونو یا اوبیونو نور قوانین

د یوه کرښیزمساواتسیستم د حل لپاره د ګاوس قانون ترڅنګ نور قوانین هم شته. په ښوونځي کې مو د بدلون قوانین وپیژندل. په دې کې یو مساوات د یوې متحولې یا اووښتوني سره حل کیږي او بیایې ارزښت د مساوات سیستم په بل مساوات کې کېښوول کیږي.په همدې ترتیب دې کار ته دوام ورکوو، چې بیداشوط اوښتونې ارزښت د مساوات سیستم په هبل مساوات کز څا په څای کیږي، تر څو چې د ټولو متحولو ارزښتونه پیداشي.که د اووښتون و ارزښتونه په پای کز څا په څاشي او لاس ته راشی ، $0 = 0$ ، نو مساوات سیستم ناپای ډېر حلونه یا اوبیونې لري. که د دې څا په څای کونې وروسته ،، کینې اړخ $\neq$ ښی اړخ،، نو کوم حل شتون نه لري. په ورته توګه دا مساوي ایښونې قانون هم کارول کیږي، د کوم سره چې دوه مساوات د یوهې اووښتونې په لور حل شي او بیا

ketabton.com - The Digital Library

برابر وليکل شي.

په پای کې بايد وکورو، چې د يوه کربنيزمساوات سيستم څنګه حلونه لاس ته راړو، که ورته سيستم حل کړ شوی وي:

غواړو د يوه ناهموجين کربنيز مساوات سيستم حلډېری I وټاکو. موږ د هوموجين کربنيز مساوات سيستم حلډېری يا حل سټ H پيژنو. د هوموجين کربنيز مساواتسيستم حلونو ډېری يا سټ H د اړونده تابع د زړي(هستې) Kern سره برابره ده. برسره پردې موږ د ناهوموجين سيستم ټوټه يا برخه حل يا د حل يوه برخه حل v_0 پيژنو.

موږ کړی شو د دې ناهوموجين سيستم حلډېری I پيداکړو، داسې چې

د ناهوموجين سيستم ټولو حلونه v_0 جمعه کوو:

$$I = v_0 + H = \{v_0 + h \; \forall \; h \in H\}$$

د هوموجين کربنيزمساواتسيستم حلونه $Ax = 0$ د کربنيزو توابعو زړی(که غواړئ: هسته) دی. موږ کړی شو ، لکه د ماتريکس A سره چې انځور يړي، دا زړی و دې ټوټه – يا برخا حل ته ورزيات يا ور جمعه کړو. دا ځانله (تنها) د ناهوموجين مسوات سيستم سره نه کوو بلکه د هوموجين مساوات سيستم سره هم همداسې مخ ته ځو.

$$Lsg(A,0) = v_0 + Kern(A)$$

د هوجين مساواتسيستم ته تل يو ساده حل0 شتون ري، له دې سره لرو

$$Lsg(A,0) = 0 + Kern(A) = Kern(A)$$

موږ د ناهوموجين مساواتسيستم دوه حلونه لرو. له دې دوه وو څخه يو حل د هوموجين مساوات سيستم لپاره جوړولی شو، داسې دواړه حلونه يو بل کم يا تفريق کړو:

ketabton.com - The Digital Library

$$\begin{array}{c|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

ورته والي - یامشابهت اړیکې **Äquivalenzrelationen**

په A یوه اړیکه~ تیک هلته ورته بللکیږي، که د ټول $a, b, c \in A$ لپاره باور ولري

لومړی : $a \sim a$ یا $(a, a) \in \sim$ انهکاس یا هندارون اړیکې یا (Reflexiv)

دویم : که $a \sim b$، نو $b \sim a$ یا که $(a, b) \in \sim$، نو $(b, a) \in \sim$ سیومتریک اړیکې (Symmetrisch)

دریم : که $a \sim b$ او $b \sim c$، نو $a \sim c$ یا که $(a, b), (b, c) \in \sim$، نو $(a, c) \in \sim$ ترانسیتیو اړیکې (Transitiv)

ورته اړیکې یوه ډېرۍ(سټ) په،، ورته ټولګیو،، ویشي.

ډېرۍ یا سټ له ترنو یا عملیو سره

د ښوونځي او هم د شمېرپوهنې په ورځني ژوند کې له دې سره بلد یو، چې له کومو سره ترمونه ساده کېدی شي. دا زیات وخت ډېره مرسته کوي. د بېلګې په توګه د دېستزیبوتیو قانون په مرسته لاندې ترم خورا زر ګڼلی شو، لکه بې له دې قانون.

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{13}{2}\right) \cdot \frac{8}{13} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{13} + \frac{13}{2} \cdot \frac{8}{13} = \frac{1}{13} + 4 = 4\frac{1}{13}$$

د بینوم لومړۍ جملې هم د دیستریبوتیو قانون ډېر واره استعمالول دي

ketabton.com - The Digital Library

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b = a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b =$$
$$= a^2+2ab+b^2$$

په لاندې برخه کې اوس شمېرنې نور قوانین ، چې د اکسیومونه بلل کیږي و تعریفو. دا قوانین د ډېریو لپاره صدق کوي د اړونده تړنو سره. زیات وخت پوښتنې رامنځ ته کیږي، چې دا اکسیومونه له کومه راځي. اکسیومونه خویونه ل ري، چې دا په ساده توگه تعریفیږي، بې له ثبوته. طبعأ دا په خوښه نه ټاکل کیږي. مگر په لومړي سر کې یا د پیل زده کوونکو لپاره په دې بسیا کوو، چې دا دې شتون ولري.

لاندې برخه (که ټوټه برخه یا کښته برخه):

Unterabschnitte

موږ او یو په بل پسې یوگوني تعریفونه ورکوو. له دې سره پورته و کښته لور ته تل زیات امسیمونه باور لري. د بیلگې په توگه تنونه یا اجسام له دوه کموتاتیو گروپونو منځ ته راځي، یو ځل نسبت جمعې یا زیاتون + ته او یوځل نسبت و ضرب · یا * ته او دې سره اړونده دیستریبوتیو قانون څخه یو ځای یا په گډه، یعنې بدن یا تن یا جسم له گروپ څخه زیات دی.

گروپ

یوه حوړه یا یو گون $(G,+)$ ، چې G یوه ډېری ده او $+$ یوه تړنه یا عملیه ده،

$$+ : G\times G \to G$$

گروپ بللکیږی، که لاندې اکسیومونه پوره وی:

ketabton.com - The Digital Library

G1 : $(a+b)+c = a+(b+c) \forall \ a,b,c \in G$ اسوشیاتیو قانون.

G2 : یو $e \in G$ (ناپیلی توکی) شتون لري چې د $\forall \ a \in G$ لپاره لاندې خویونه پوره کوي:

لومړی: $e + a = a$

دویم : د هر $a \in G$ لپاره یو $a' \in G$ شتون لري (په څټ یا برعکس توکی) د $a' + a = e$ سره

د ابل - یا کموتاتیو ګروپ Abelsche / kommutative Gruppe

یو ګروپ د ابل ګروپ بلل کیږي، که د د ګروپ د اکسیومونو **G1** او **G2** برسېره دا $a + b = b + a$ هم $\forall \ a,b \in G$ باور ولري (کموتاتیو قانون) *(Kommutativgesetz)*.

کړی Ring

یو ګون $(R,+,*)$، چېرته چې R یوه ډېری او $+,*$ دوه تړونونه یا عملیې دي د لاندې سره

$$+ : R \times R \to R \qquad * : R \times R \to R,$$

کړی یا رینګ بلل کیږي، که لاندې اکسیومونه پوره وي:

ketabton.com - The Digital Library

R1 : د **+** سره یو ځای کموتاتیو ګروپ (اسوشاتیوۀ ناپیلی توکی، په ځنډ یا برعکس توکی دی.

R2 : $(a*b)*c = a*(b*c) \forall \ a,b,c \in R$ (د $*$ لپاره اسوشاتیو دی.

R3 : دېستربوتیو قانون باور لري:

(a) $\forall \ a,b,c \in R : (a+b)*c = a*c + b*c$

(b) $\forall \ a,b,c \in R : a*(b+c) = a*b + a*c$

کړۍ د یوي توکي (واحد توکي) سره Ring mit Einselement

$(R,+,*)$ یوه کړۍ ده، له دې امله باور لري:

$\exists 1 \in R$ (ناپیلی توکی یا یوې توکی د ترڼې لپاره) د هغه لپاره چې باور لري:

$1*a = a$

کموتاتیو کړۍ:Kommutativer Ring

$(R,+,*)$ یوه کړۍ ده، له دې امله باور لري:

$\forall \ a,b \in R : a*b = b*a$ (د $*$ لپاره کموتاتیو قانون)

کموتاتیو کړۍ د یوی توکي (واحد عنصر) سره

کړۍ، په کومو کې چې کموتاتیو قانون باور لري او دا هم یو یویتوکی ولري، یعنې د دوه پورته اکسیومونو سره، کموتاتیو کړۍ د یویتوکي سره بللکیږي.

ketabton.com - The Digital Library

Körper Fieldبدن یا تن یا پټی

یو ارزښت نظم یا توپل $(K, +, *)$ یو تن دی، که باور ولري

K1 : د کموتاتیو کړی اکسیومونه د یویتوکي سره باور لري.

K2: $\forall a \in K \exists a^{-1}$ ، داسې چې $a * a^{-1} = 1$ باور لري (د ترنې $*$لپاره په څټ یا برعکس توکی)

پولینوم کړی Polynomring

$\mathbb{K}$ دې یو تن وي. د $\mathbb{K}_n[t]$ ډېری د لاندې بڼې پولینومونو څخه جوړه ده

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

د کومو سره $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ، t یوه اووښتونې(متحوله) او n د پولینوم درجه بللکیږي. د پولینومونو دا ډېری یو کموتاتیو کړی ده. د یوه پلینوم Pخورا جګ ضریب(ځلوونی) - په پورتنی بېلګه کې یعنې n ، چې باید $a_n \neq 0$ وي - د پولینوم درجه بللکیږي. که دا 0 وي، یعنې د ټولو i لپاره $a_i = 0$ ، نو دا پولینوم صفر پولینوم بلل کیږي. د صفرپلینوم درجه ناپای ده:

$$\deg P := \begin{cases} \infty & \text{falls } P = 0 \\ n & \max\ (i \text{ für das gilt } a_i \neq 0) \end{cases}$$

پاتې ټولګي یا باقي ټولګي Restklassen

اوس غواړم د بدن لپاره یوه بله بېلګه دروپېژنم یا معرفي کړم، د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي. د لومړنیو ګڼونو پاتي ټولګي کېدی شي بدنونه شي، داسې چې په هغو کې

ketabton.com - The Digital Library

جمعه(زیاتون) او ضرب(ځل) تعریف شي. داسې تتونه $\mathbb{F}_p$ بللکيږي يعنې د بېلګې په توګه $\mathbb{F}_7$ د پاتېتولګي 7 لپاره. په روڼښي ژوند کې د پاتې تولګي سره ډېر شمېرل کيږي، د بېلګې په توګه د ليکنيزې جمعې سره [2.2] :

$$\begin{array}{r} 8 \\ + \quad {}_1\,9 \\ \hline 1\ 7 \end{array}$$

موږ 8 او 9 د7 سره جمعه کړل چې چېرته موهغه لاس ته راغلی زيات هېر کړی نه دی. موږ اوس کړی شو چې هغه زيات يا لاس ته راغلی پرېږدو او وليکو

$$8 \bmod 10 + 9 \bmod 10 \equiv 7 \bmod 10$$

چېرته چې ،، mod ،، مودولو**modulo** په معنا دی، يعنې د وېش پاتې يا باقي.

په ورته توګه نور پاتې ټولګي هم تعريفولی شو. د دې په ځايچې په 10 يې ووېشو په 3 يې وېشو.

$$\begin{array}{r} 3 \\ + \quad {}_1\,2 \\ \hline 1\ 2 \end{array}$$

د دې لپاره کړی شو، چې يو د جمعې او ضرب جدول جوړ کړو:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

په همدې توګه دا کار بيا کړو، دا وار د پاتې ټولګي 4 لپاره:

ketabton.com - The Digital Library

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

اوس کړی شو د بدن اکسیومونه په یوګوني ډول په هغو پاتې تولګیو پورې اړونده بدن باندې د جدول ارزښتونو په مرسته و ازمایو. کموتاتیو قانون باور لري، که جدول په دوه -کونجتړې(قطر) باندې هندارون یا انعکاس سیومتریک وي. په ځت یا معکوس توکی شتون لري، که د جدول په هره لیکه او هره متېه کې د بدن هر توکی یوځل منځ ته راشي یا شتون ولري. صفرتوکی شتون لري، که په هره لیکه او هره متېه کې منځ ته راشي یا شتون ولري. اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین له جدول ځخه په ساده توګه نه شي لوستل کېدی.

وروسته له دې چې دا نښلونتېکي(د نښلونو تېکي) لرو، پېژنو، چې بدن $\mathbb{F}_4$ شتون نه لري. دا د ضرب د معکوس توکی قانون په خلاف دی. داسې x نه شته چې$2 \cdot x = 1$ باوري کړي

یعنې د4 پاتې تولګي ځخه بدن نه شي جوړېدلای. برعکس یو بدن $\mathbb{F}_3$ له پاتې تولګي 3 ځځخه ممکن دی، ځکه چې هېځ اکسیوم نه زیانمن یا زخمي کیږي: ګورو چې سیمتریک، برعکس او ناپیلی توکي شتون لري . همداسې د نږدې پسې ازمایلو ځخه ګورو چې اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین هم باوري دي.

که نور هم ځیړنه ژوره کړو، نو په دې کې یو سیستم ګورو، چې کله یو پاتې تولګی p یو بدن$\mathbb{F}_p$ کیږي. دا حالت تیک هلته رامنځ ته کیږي، چې p یو لومړنی ګڼ(عدد) وي. دا ثبوت دلته نه راوړو.

مګر غواړو چې په پای تعریف کړو، چې یو کرکتریستیک (خوی تاکونی) ځه شی دی او ولې د یوه په خوښه بدن $\mathbb{K}$کرکتریستیک تل یو لومړنی ګڼ او یا 0 دی:

پیژند(تعریف):

$\mathbb{K}$ دې یو ردن وي او 1 د ضرب یو ناپیلی توکی(یوونتوکی، عنصر واحد) وي. د یوه زیاتیز یا مثبت عدد n لپاره د $n \cdot 1$ لاندې پوهیږو

ketabton.com - The Digital Library

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}.$$

د بدن $\mathbb{K}$ کرکتریستیک په لاندې توګه تعریف دی

$\operatorname{char}\mathbb{K} = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$	که n>0 شتون ونه لري، چې n.1=0 باور ولري که n شتون ونه لري، چې باور ولر n1=0

ښوونه: n تل یو لومړنی ګڼ دی:

وي دې $n \neq 0$ (د تعریف دویم حالت). که n لومړنی عدد نه وی، نو دا په لاندې ضقیبونو توټه کیږی [2.3] .

$$\begin{aligned} & n1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (n_1 \cdot n_2)1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n_1 1 \cdot n_2 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n_1 1 = 0 \wedge n_2 1 = 0 \end{aligned}$$

دا تضاد دی. ځکه چې $n_1 < n$ او $n_2 < n$ باید کرکتریستیک $\mathbb{K} = n_1$ char اویا char $\mathbb{K} = n_2$ کرکتریستیک وي. دی char $\mathbb{K}$ = n او له دې سره n په ضریبونو نه شي توټه (تجزیه) کېدی، نو له دې امله یو لومړنی عدد دی.

موږ د ښوونځي ځخه غوره بدنونه پيژنو، لکه د هوښيار اعدادو(کسري-) $\mathbb{Q}$ ، د ريل يا حقيقی اعداد $\mathbb{R}$ بدنونه او ورپسي د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ بدنونه هم. دا ټول زدنونه کرکتریستیک 0 لري. نور د اعدادو غوره ډېرى هم شته لکه د ټول ګڼونو (- اعدادو) ډېرئ. دا فقط يو کموتاتيو ګروپ جوړوي، ځکه چې په نسبت و ضرب ته معکوس توکی نه لرئ. دا له دې امله داسي ده،چې موږ په دې عددونو کي ماتونه(کسرونه) نه لرو. د ټولو طبیعي اعدادو $\mathbb{N}$ ډېرئ چې 0 ورسره تړلی دی او يا نه،

ketabton.com - The Digital Library

متأسفانه چې حتا یو ګروپ هم نه دی، څکه چې د جمعې معکوس توکي نه لرو، د بېلګې په توګه د $3+x=1$ لپاره x شتون نه لری، څکه چې $x=-2$ شتون نه لري.

وکتور فضا der Vektorraum

لاندې برخه

کربنیزبلواکوالی (خطي تابعیت)

یادونه (ژباړی): ګ‌ړو چې دلته مو تابع کلیمه، چې د فنکشن لپاره کارول کیږي، ناتیکاوي ته لاربنودوي. دلته د بلواکوالي یا تابعیت څخه موخه فنکشن نه دی. پای.

یو د وکتورونو $(v_1,\ldots,v_n)$ کورنۍ کېدی شي کربنیز بلواکه یا کربنیز خپلواکه وي، نه دواړه یو ځای کېدی شي او هم نه له دوه ځخه یوه هم نه . یوه کورنۍ هغه ډېرۍ ده، چې یو توکی په کې دوه ځله هم راتلی شي. پس موږ په خوښه وکتورونه لرو- په کوم کې چې همغه وکتور ختی دوه ځله راتلی شي- کوم چې موږ داپه خپلو اړیکو کې یو له بل سره ځیړو.

کربنیز خپلواکوالی

V دې یو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وي. یوه د وکتورونو $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ پای کورنی له V ځخه کربنیز خپلواک بلل کیږی، که له $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_n v_n=0$$

ځخه لاس ته راشي، چې $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ دي.

ketabton.com - The Digital Library

دا په دې معنا، چې صفر وکتور د نورو وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_n$ څخه ساده ترکيب کيدی شي

کرښيز بلواکواکوال:

V دې بيا هم يو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وی. يوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ پای کورنۍ له V څخه کرښيز بلواک بلل کيږی، که له $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لاس ته راشي، چې هم ساده حل $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ شته ، او هم يو حل له کوم سره چې لږ تر لږه يو $(1 \leq i \leq n)\, \lambda_i \neq 0$ دی.

دا په دې معنا دی، چې موږ صفروکتورونه د ساده حلونو يا اوبيونو څخه په بل ډول هم د وکترونو د کورنې څخه جوړولی شو

د وکتور فضا تعريف:

اوس د وکتورفضا تعريف ته راڅو:

$\mathbb{K}$ دې يو بدنوي. يودرېګون $(V, +, *)$ چې V يوه n-ګون

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ketabton.com - The Digital Library

او $+$ او $*$ تړني یا عملیې وي

$$+ \ : \ V \times V \to V$$
$$* \ : \ \mathbb{K} * V \to V$$

$\mathbb{K}$ -وکتور فضا بلل کیږي، که لاندې اکسیونونه باور ولري:

$(V,+)$ یو کموتاتیو ګروپ دی.

S1 : $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$ (آسوځیاتیو قانون)

S2 : $1 \in \mathbb{K} : \forall \ v \in V : 1 * v = v$ (ناپیلی توکی)

D1 : $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$ (دیستریبوتیو قانون)

D2 : $\forall \ \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V$ باور لري $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \mu * w$ (دېتریبوتیو قانون)

د یوه وکتور فضا جوړونه یا که غواړی تولید Erzeugen eines Vektorraums

اوس غواړو $n-$ګونی 3.1 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، چې دوکتورفضا د تولید لپاره اړتی ورته لرو تولید کړو. دا کړی شو که موږ دا ټول ولیکو . دا د ډېرو کمو وکتورونو لپاره هم موخه ور دی. مګر د زیاتو وکتورفضاو لپاره دا نا ممکن دی، ځکه چې موږ ناپای ډېر ګونونه لرو. موږ باید دا د یوه شمېرقانون سره تولید کړو.

ketabton.com - The Digital Library

کرښیز ترکیبوالی

وي دي $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ په $\mathbb{K}-$ -وکتور فضا کې یوه د وکتورونو کورنۍ. هر
د $(\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K})$ بڼې

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

وکتور v د $v_1, v_2, \dots, v_n$ کرښیز ترکیب بلل ګیږی.

اوس ، د کلمو،، کرښیز خپل(بل)واک،، او د ،،کرښیز ترکیب،، ترمنځ یو څو ښوونې یا ثبوتونه راړل کیږی. د دې ښوونو لاس ته راوړنې به شاید د ډېرو زده کړو په غوښنه او وینو ته تللي وي. تاسو پوهیږئ چې دا داسې دی. خو بیا هم موږ باید دا یو څل وښایو:

جمله ؛

که د کورنۍ $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کرښیزخپلواک وي، نو کېدی شي
هر وکتور $v \in L(v_1, v_2, \dots, v_n)$ د دوی له لارې په یوه ټاکلې لار ترکیب شي. له

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$$

څخه لاس ته راځي

$$\lambda_1 = \mu_1; \;\; \lambda_2 = \mu_2; \;\; \lambda_n = \mu_n$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

د کرښیزخپلواکوالي له امله باور لري:

ketabton.com - The Digital Library

$$\lambda_1 - \mu 1 = 0; \;\; \lambda_2 - \mu_2 = 0; \; \ldots \; \lambda_n - \mu_n = 0$$
$$\Rightarrow \;\; \lambda_1 = \mu 1; \;\; \lambda_2 = \mu_2; \; \ldots \; \lambda_n = \mu_n$$

له دې سره کېدی شي وکتور ټیک په یوه ډول ترکیب شي.

برعکس یا په څټ کیدی شي وښوول شي:

جمله :

که چیرې یو وکتور v ټیک په یوه ډول له وکتورکورنیو $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ څخه د کرښیز ترکیب کیدی شي، نو نو د دې کورنی وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ټیک په یوه ډول تکیبوړ په دې معنا دی، چې که

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$
$$\text{und} \quad v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

باور ولري، $\lambda_1 = \mu_i$ باور لري او له دې سره $\lambda_i - \mu_i = 0$

$$v = v$$
$$\Leftrightarrow \;\; \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$
$$\Leftrightarrow \;\; (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

داچې $\lambda_i - \mu_i = 0$ د $1 \le i \le n$ لپاره د کورنې وکتورونه کرښیز خپلواک دي.

جمله:

که د یوې کورنې $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه کرښیز بلواک وي، نو له یوه څخه زیات امکانات شته چې وکتور v ترکیب کړو. کرښیز بلواک په دې معنا دی، چې لږ ترلږه یوه v_i لپاره $(1 \le i \le n)$ باور ولري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

ketabton.com - The Digital Library

ښوونه:

که موږ وکتور v ولرو، کړی شو دا په لاندې ډول ترکیب کړو:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

له دې ځخه لاس ته راځي $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. اوس کړی شو دا پورته یادشوی کرښيز
ترکیب د v_i لپاره ځای په ځای کړو او لاس ته راړو

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \\ &\quad \lambda_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n) \\ &\quad + \ldots + \lambda_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad v &= (1+\lambda_i)\lambda_1 v_1 + \ldots + (1+\lambda_i)\lambda_n v_n \end{aligned}$$

نو $(1+\lambda_i)\lambda_1, \ldots, (1+\lambda_i)\lambda_n$ یو نوی امکان دی چې v ترکیب کړو او د دې سره
همدا اوس دوه امکانات لرو

موږ کړی شو چې لاندې دوه واقعیتونه هم ثبوت کړو:

جمله :

که یو وکتور v_i د کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ کرښيز د
کورنۍ $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ ځخه نه شي ترکیبېدی، نو د کورنۍ $(v_1, \ldots, v_n)$
وکتورونه یو بل ته کرښيز خپلواک دي.

ښوونه:

نیسو چې دا کرښيز بلواک دي. داپه دې معنا، چې د

ketabton.com - The Digital Library

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لپاره لږ ت ر لږه د یوه λ_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور لري

$$\lambda_i \neq 0$$

دا په دې معنا چې

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n = -\lambda_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} v_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} v_n = v_i \end{aligned}$$

نو کېدی شي، چې v_i له $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ کرښیزه ترکیب کړاي شي. دا نیونې ته تضاد دی. نو باید وکتورونه کرښیز خپلواک وي.

په همدې توګه برعکس ی په څېټ هم باور لري:

جمله:

که د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک وي، نو کوم یو وکتور د بل څخه کرښیز ترکیب کېدی نه شي.

ښوونه:

نیسو، چې دا شونی دی، یو وکتور v_i $(1 \leq i \leq n)$ کېدی شي کرښیز ترکیب کړاي شی. نو باور لري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$$

ketabton.com - The Digital Library

ګورو، چې $\lambda_i \neq 0$ دی، څکه چې $\lambda_i = -1$. او د کورنۍ وکتورونه به کربنيز بلواک وی. تضاد. بو دا ممکن نه ده، چې له دې وکتورونو ځخه کوم يو له بل ځخه کربنيز ترکيب کړي، څکه چې بيا به کربنيز خپلواکوالی زخمي شوی يا زيانمن شوی وي.

سپاين يا کربنيزه **Spann**، (**(کربنيزه) رابنده ورشو)Abschluss، lineare Hülle**

په يوه $\mathbb{K}-$ - وکتورفضا کې د يوې کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د ټولو کربنيز ترکيبونو ډېرۍ سپاين يا کربنيزه رابنده ورشو بلل کيږي

$$span(v_1, \ldots, v_n)$$

يا د وکتورونو د کورنۍ کربنيزه (که غواړۍ) سمڅه(**Hülle**)

روښانه دې وي: د يوه سپاين وکتورونه ناجبري کربنيز خپلواک نه دي.

جوړښتسيستم (توليدي سيستم) Erzeugendensystem

د وکتورکورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د وکتور فضا V توليدی سيستم بلل کيږی، که باور ولري

$$V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

داپه دې معنا چې وکتورونه د وکتور فضا V مکمله يا پوره غزوي.

دلته کېدی شي، چې د وکتورونو کورنۍ کربنيز بلواک يا کربنيز خپلواک وی. دا يواځې بايد وکتور فضا و غزوي.

ketabton.com - The Digital Library

بنسټ Basis

د وکتورونو $(v_1, \ldots, v_n)$ کورنۍ د وکتور V بنسټ بلل کیږي، که د کورنۍ یوګوني وکتورونه

- یو بل ته کرښیز خپلواک دي

- او که د وکتورونو کورنۍ ټول وکتور V وغزوي، یعني د V یو تولیدي(جوړختیز) سیستم دی:

$$V = span(v_1, \ldots, v_n)$$

او

$$\text{und} \quad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

له دې سره یو تولیدي سیستم ټیک هلته یو بنسټ دی، چې د دې تولیدي سیستم وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

د شتاینیځ بدلونجمله Austauschsatz von Steinnitz

جمله:

په یوه د $\mathbb{K}-$ - وکتورونو کورنۍ(که فضا) V کې دې یو بنسټ

$$B := \{v_1, \ldots, v_r\}$$

او یوه کرښیز ځپلواکه کورنې

$$(w_1, \ldots, w_n)$$

ورکړ شوي وي.

ketabton.com - The Digital Library

دی $r \geq n$. سږی کږی شي د بنسټ n وکتورونه د nکربښیز خپلواکو کتورونو کورنیو سره بدل کړای شي، داسې چې نوی بنسټB^* بېرته کربښیز خپلواک دی او د وکتورفضا V_K بنسټ دی. د ایدنکس د ګڼې بدلون وروسته کېدی شي داسې ولیکو:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

یا په ځانګړي حالت $n = r$:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n\}$$

ښوونه:

ښوونه د بدلون لیما سره صورت نیسي. دا دبدلون لېما) وړه چمله) د د بنټ ځخه یو وکتور اخلي او یو بل ورزیاتوي:

بدلون جمله ګی **Austauschlemma**

یو $K-$ -وکتورفضا V دې د بنسټ

$$B := \{v_1, \ldots, v_r\}$$

سره ورکړ شوې وي او یوه w د

$$w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underline{\underline{\lambda_k v_k}} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r \in V$$

د $(\star)$ $\lambda_k \neq 0$ سره او

$$\lambda_k \neq 0.$$

ketabton.com - The Digital Library

نو

$$B' := \{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

بېرته یود V بنسټ دی .

یعنې سرې کړی شي v_k د w وکتور سره بدل کړي. (دا نور $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ بې له λ_k
باید حتمأ 0 نه وي.، مګر دوی کړی شي).

د بدلون جملې ښوونه**Beweis des Austauschlemmas** :

د لیکنې د ساده کونې لپاره نیسو، چې$k = 1$ دی. موږ ښایو چې

$$B' := \{w, v_2, \ldots, v_r\}$$

هم د V_K بنسټ دی.

- د بنسټ 3.2 ټول وکتورونه $v \in V$ د کربنیزترکیب په څېر لیکل کېدی شي
یعنې

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_r v_r \quad (\star\star)$$

داچې $\lambda_1 \neq 0$ دي، کړی شو په لاندې ډول یې بنهبدل کړو

$$\begin{aligned} & w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r && (von\ \star) \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_1 v_1 = w - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_r v_r \\ \Leftrightarrow\ & v_1 = \tfrac{w}{\lambda_1} - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \tfrac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \end{aligned}$$

- اوس کړی شو دا په $\star\star$ کې ځای په ځای کړو

ketabton.com - The Digital Library

$$\begin{aligned} v &= \mu_1\left(\frac{w}{\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r\right)+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \mu_1\frac{w}{\lambda_1}-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1}w+\left(\mu_2-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)v_2+\left(\mu_3-\mu_1\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)v_3+\ldots+\left(\mu_r-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)v_r \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي، چې نوی بنسټ لږ تر لږه یو تولیدي سیستم دی.

- اوس پاتې دادی چې کرښیز خپلواکوالی و ښایو

$$\mu w+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0$$

د ⋆ ځا ي په ځای کونه:

$$\begin{aligned} &\mu(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_r v_r)+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0 \\ \Leftrightarrow\quad &\mu\lambda_1 v_1+(\mu\lambda_2+\mu_2)v_2+(\mu\lambda_3+\mu_3)v_3+\ldots+(\mu\lambda_r+\mu_r)v_r=0 \end{aligned}$$

نو $\mu\lambda_1=\mu\lambda_2+\mu_2=\mu\lambda_3+\mu_3=\ldots=\mu\lambda_r+\mu_r=0$ ، ځکه چې B کرښیزخپلواکه وه ($\mu_2=\mu_3=\ldots=\mu_r=0$) او $\mu=0$ ، ځکه چې $\lambda_1\neq 0$.

له دې ځخه کرښیز خپلواکوالی لاس ته راځي

د بدلون جملې ښوونه:

له دې وروستهچې ومو ښووول، چې سړی یو وکتور v_k له بنسټ ځخه را اخستی شي او د وکتور w سره یې بدلولی شي، که دا اړونده $\lambda_k\neq 0$ وي(کړی شي، چې د نمرې یا ګڼې بذلون سره اِه ټیک ځای ته راوړل شي)، باید وښایو، چې د زاړه بنسټ لپاره تل داسې یوه $\lambda_k\neq 0$ شتون لري، داسې چې موږ وکتورونه پرلپسې سره بدلولی شو:

ketabton.com - The Digital Library

- که صفر وکتورونه سره بدل کړو، نو ښوونې ته نه اړکیږو. موږ اړیین نه یو چې کوم وکتور پیدا کړو، چې له هغو سره بنسټ وکتور بدل کړو. دا زموږ د ایندکشن پیل دی.

- زموږ د ایندکشن نیونه ده، چې k وکتورونه مو سره بدل کړي دي او بېرته مو یو بنسټ لاس ته راوړی دی:

$$B' = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

- د ایندکشن پای :

که موږ وکتور w_{k+1} بدل کړو، نو باید یو λ_i د $k+1 \leq i \leq r$ سره پیداکړو، د کوم لپاره چې $\lambda_i \neq 0$ باور لري. باور لري :

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r}_{\text{mindestens ein } \lambda_i \neq 0}$$

دا پورته لږ تر لږه یوه $\lambda_i \neq 0$.

دا چې کرښیزخپلواکه کورنۍ $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots)$ کرښیز خپلواکه وه، اجازه نه شته چې $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k \neq 0$ وي، ځکه چې پرته له دې کرښیز خپلواکوالی زحمي شوی وي.

داچې w_{k+1} هم صفر وکتور نه دی، ځکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زخمي شوی وي، نو یو λ_i ($k+1 \leq i \leq r$) شتون لري د $\lambda_i = 0$ سره.

د ښووني ځخه لاس ته راوړنه

ketabton.com - The Digital Library

- که یو $K-$ - وکتورفضا V یو پای بنسټ ولري، نو د V هر بنسټ پای دی.

- د یوې وکتورفصا هر دوه بنسټونه برابر اوږدوالی لري.

- بنسټ پوره کېدنه:

په یوه پای تولېدکېدونکي وکتور فضا Vکې دې کرښیز خپلواک وکتورونه $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ورکړل شوي وي. نو کېدی شي سرې پیدا کړي، داسې چې

$$B := \{w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_r\}$$

د V یو بنسټ وي.

- $v_i, \ldots, v_n$ دې د کرښیز خپلواک وکتورونو ډېرۍ وي، چې یوه وکتور فضا غزوي، نو د $v_i, \ldots, v_{n+1}$ ډېرۍ په هر حالت کرښیز بلواک ده.

دا په دې معنا چې بل وکتور نه شي پیداکېدی چې و $v_i, \ldots, v_n$ ته کرښیز خپلواک وي.

- د بنسټ بدلید جمله:

$v_i, \ldots, v_n$ دې کرښیز خپلواک وکتورونه وي، چې یوه وکتور فضا غزوي(دا په دې معنا چې دا یو بنسټ دی)، نو $w_i, \ldots, w_n$ کرښیز خپلواک وکتورونه ، چې د وکتورونو$v_i, \ldots, v_n$ د کرښز ترکیب ځخه جوړیدی شي، برابره وکتورفضا غزوي.

بعد یا پراخېدونی(Dimension)

که Vیوه $K-$ - وکتور فضا وي، نو تعریفوو

ketabton.com - The Digital Library

$dim_k V = \begin{cases} \infty \\ r \end{cases}$	که V پای بنسټ ونه ري، کهV د r اوږدوالي بنسټ ولري

د پراخېدوني یا بعد جمله:

وي دې $f:V \to W$ (V,W دلته $\mathbb{K}-$ -وکتورفضاوې دي) يو کرښيزبلواک. نو د بعد یاپراخېدوني جمله باور لري:

$$dim\ \ V = dim\ \ Bild(f) + dim\ \ Ker(f)$$

Bildځيره او Ker(Kern) زړی یا هسته

ښوونه :

يادونه:

$dimV$: : دV د بنسټ وکتورونو ګڼون یا تعداد.

$dim\ \ Bild(f)$: : د وکتورونو ګڼون یا تعداد د V د لاندې وکتورفضا (Bild (f کې.

$dim\ \ Ker(f)$: : د f په زړي(هسته) کې د وکتورونو ګڼون یا تعداد. دا بېرته د V لاندې وکتورفضا ده.

لومړی: دا چې زړی (Ker (f د V لاندېوکتورفضا ده، په هر حالت لرو

$$dimV \geq dim\ \ Ker(f).$$

د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ د زړي د بنسټونو وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

د بنسټتکيلېدوجملې په بنسټ کېدی شي دې بنسټ ته کرښيز خپلواک وکتورنه V ته ورزيات کړي او دا بنسټ په دې توګه د V يوه بنسټ ته پوره یا تکميل کړي:

ketabton.com - The Digital Library

$$B_V := \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots v_k\}.$$

لومړی: موږ اوس پریږدو چې تابع f د وکتورفضا V په بنسټ وځغلي. نو لاس ته راوړو:

$$Bild(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i)$$

د زړي بنسټوکتورونه په 0 تنظیمیږي یا ځبره کیږي . له دې امله د ځبرې یا عکس د بنسټوکتورونو ګڼون یا تعداد او له دې سره د عکس پرخېډونی یا بعد دی.

$$\begin{aligned} & dim\ \ Bild = dim\ V - dim\ \ Kern \\ \Leftrightarrow\ & dim\ V = dim\ \ Bild + dim\ \ Kern \end{aligned} \qquad !!!$$

لاندې وکتور فضا

تعریف (پېژند):

د وکتورفضا V په $\mathbb{K}$ باندې یو لاندې وکتورفضا Uمنځ ته راځي، که سړی د وکتورفضا ټاکلي توکي لرې پرېږدي(لنډ:پرېږدي). له دې سره باید د لاندېوکتورفضا پاتې توکي دا لاندې ځویونه پوره کړی:

- $U \neq \emptyset$

- د ټول $x, y \in U$ لپاره $x + y \in U$ باور لري او د ټولو $x \in U$ ، $\lambda \in \mathbb{K}$ لپاره $\lambda x \in U$ باور لري .

ketabton.com - The Digital Library

خویونه:

- له دې سره یو وکتورفضا لږترلږه دوه لاندې وکتورفضاوې لري. یو ځل دا اکسیومونه پخپله په وکتورفضا کې ورکړل شوي، داسې چې داوکتور فضا و خپل ځان ته لاندېوکتورفضا ده. له بلې خوا هروکتورفضا صفروکتور لري. دا صفر وکتور ځانله هم یوه وکتورفضا ده.

- $U_1 \cap U_2$ لاندې فضاو ده، کهU1 اوU2 لاندې فضاوې وي.

- $V_{\mathbb{K}}$ دې یوه وکتورفضا وي او $v_1, \ldots, v_n \in V_{\mathbb{K}}$. هر کرښیز ترکیب $L(v_1, \ldots, v_n)$ یوه لاندېفضا ده.

د لاندې فضاو لپاره د بعد یا پراخیدوني فرمول

$$dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2)$$

ښوونه د وکتورفضاو د بنسټ د وکتورونو د ګڼون یا تعداد باندې مخ ته بیول کیږي. د وکتورفضا $U_1 \cap U_2$ بنسټ یو ځل وکتورفضا U_1 او یو ځل وکتورفضا U_2 ته وریوره یا تکمیل کیږي. د وکتورفضا $U_1 + U_2$ بنسټ[3.3] د غوځي بنسټ دی جمعه یې دا نور د U_1 او U_2 وکتورونه

فنکشنونه یا توابع ، په ځانګړې توګه کرښیزې-

تعریف: X او Y ډېرې یا ستونه دي. یو تابع f یو ترتیب یا تنظیم دی، د کومو له لارې چې هرتوکی $x \in X$ په ټیم یوه توکي $f(x) = y \in Y$ تنظیم شي

ketabton.com - The Digital Library

$f : X \longrightarrow Y$

- دا چې دا توکی ځنګه ترتيبيږي دا پروا نه لري. لومی په کرښيزو توابعو کې بنديزونه راړل کيږي، دا چې تابع بايد کرښيزهوي.

- د Y په توکي کېدی شي د X ډېر توکي وښايي ياپه ډېرو توکو ترتيب يا تنظيم شي. مګر برعکس ممکن نه دی. دا په Y کې توکی، کوم چې د X توکی له ښودل کيږي يا په کوم چې د X توکی تنظيم شي، بايد تل يواځنی ټاکلی وي.

د فنکشنونو يا ځيرونو(توابعو) خويونه Eigenschaften von Abbildungen

په باندې فنکشن(- تابع) Surjektiv

$f : V \to W$

دې يوه تابع وي. تابع په باندې ده، چه باور ولري:

$\forall\ w \in W\ \exists v \in V$ ، داسې چې $f(v) = w$.

په کې (فنکشن (ځيرونه يا تابع)) Injektiv

$f : V \to W$

دې يو تابع وي. تابع په باندې دی، که باور ولري:

$\forall x, y \in V$

$x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y) \qquad f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

په (په باندې او په کې فنکشن يا -- تابع) Bijektiv

په توابع هم په باندې تابع دي او هم په کې تابع (سوزجکتيو، اينجکتيو) دي يخد په باندېولی اوپهکې والی پوره کوي:

ketabton.com - The Digital Library

$\forall\, w \in W \;\; !\exists\; v \in V$ ، داسې چې باور لري $f(v) = w$. (هر $w \in W$ تیک یو پخوا یا تر مخځېره $v \in V$ لري)

کرښیز فنکشنونه یا توابع Lineare Abbildung

تعریف(پیژند)

یو تابع $f : V \to W$ ، د کوم سره چې V او W وکتورفضاوې دي په همغه بدن K ، کرښیز بلل کیږي(یا د وکتورونو هومومورفیزم)، که $\forall\; x, y \in V$ او $r \in K$ لپاره باور ولري:

$$L1: \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$L2: \quad r \cdot f(x) = f(r \cdot x)$$

سرې کړی شي دواړ هاکسیومونه په باندې تګه سره رایوځای کړي:

$$L : f(r \cdot x + y) = r \cdot f(x) + f(y)$$

زړی(هسته) او عکس یا څېره Bild und Kern

د یوه تابع $f : V \longrightarrow W$ څېره یا عکس په لاندې توګه تعریف دی

د لږ ترلږه یوه لپاره.

$$Img(f) := \{w \in W | f(v) = w \text{ für mindestens ein } v \in V\}$$

ketabton.com - The Digital Library

د یوه تابع $f : V \longrightarrow W$ زړی په لاندې توګه تعریف دی

$$Kern(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$$

ځانګړي کرښيز فنکشنونه (توابع)

یو کرښيز تابع $F : V \to W$

یو مونومورفيزم Monomorphismus بلل کيږي، که F اينجکتيو وي.

ايپيمورفيزم Epimorphismus ، که F سورجکتيو وي،

ايزومورفيزم **Isomorphismus**، که F بيجکتيو وي،

ايندومورفيزم**Endomorphismus** ، که $V = W$ او

اوتومورفيزم**Automorphismus** ، که $V = W$ او F بيجکتيو وي.

د په باندې، په کې ، په (باندې او کې) فنکشنونو یا توابعو لپاره ښوونه

X→X

وې دی $f : X \to X$. لاندې ويناوې برابر ارزښته يا ايکويوالنت دي:

(i) f په کې دی injektiv

(ii) f ist surjektiv په باندې دی

(iii) f ist bijektiv په دی

دا چې له (iii) څخه (i) او(ii) لاس ته راځي او او څخه لاس ته راځي روښانه ده.

ketabton.com - The Digital Library

د ښوولو دی چې لومړی. (ii)→(i) او دويم. (i)→(ii)

لومړی: اینجکتیو له دې لاس ته راځي سورجکتیو. دا داسط ښایو، که په کې وښایو، چې،، نه سورجکتیو له دې لاس ته راځي نه اینجکتیو،،. د نور کلمو سره:: تابع سورجکتیو ده، که دا اینجکتیو وي، ځکه چې که سورجکتیو نه وي، نو ایجکتیو به هم نه شوی کېدی:

- په باندې یا سورجکتیو په دې معنا ده،چې د ټولو $x \in X$ لپاره په وتونډېرې کې یو $x' \in X$ شتون لري، داسې چې باور $f(x') = x$ لري . که یو تابع په باندې نه وي، نو یو $x \in X$ په کوخه ډېرۍ کې له مخه ځېره ونه لري(یعني چې دا یې ځېرهوي).
نو $f(X) \neq X$ باور لري .

وي دې $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یعني $|X| = n$ ، نو $|f(X)| = m < n$ دی[4.1]. نو نو اوس دا Schubfachprinzip von Dirichlet (د دیریښلیت(شمیر پوه) د میزکورونو(لکه چې د میز خانه یې پول)، خو داسې چې ډیطر کورګړي ولري(ژباړی) اصول) وايي، چې که n شیان په mکورونو(خانو) کې کېږدو او $n > m$ وي، نو لږ ترلږه په یوه کور کې له یوه زیات شیان باید واچول شي.

د دې لاس ته راوړني سره اینجکتیووالی نه دی ورکړ شوی، ځکه چې $f(x) = f(x')$ مګر $x \neq x'$ (ټیک هلته چې په یوه کور کې دوه توکي پراته دي).

دویم : سورجکتیو له دې لاس ته راځي اینجکتیو. موږ ښایو چې که تابع اینجکتیو نه وي، نو سورجکتیو هم نه ده.

1. f په کې نه ده، نو $f(x) = f(x')$ شتون لري د $x \neq x'$ سره . نو $f(X) \neq X$ دی او دا چې لږ تر لږه په $|f(X)| < |X|$ کې یو توکی کم دی لږ تر لږه $|f(X)| = n - 1$ کېدی شي وي ، داسې چې $|f(X)| < |X|$ او له دې

ketabton.com - The Digital Library

سره تابع په باندې نه ده، داسې چې په موخه ډېرۍ کې يو توکی $x \in X$ شتون لري د کوم لپاره چې په وتونډېرۍ کې $x' \in X$ شتون نه لري.

F په کې(اينجکتيو) $\Leftrightarrow$ Ker (F) = 0

وي دې $F : V \rightarrow W$ او $x, v_1, v_2, n \in V$ او $0 \in W$

له دې لاس ته راځي:

دا چې F په کې يا اينجکتيو دی نو هر شکل يا ځېره يو پخوا يا ترمخ شکل لري.

د 0 پخواشکل يا ترمخ شکل يا ځېره دې n وي. $\Longleftrightarrow$

$$Ker(F) = \{n\} \Rightarrow F(n) = 0$$

دا چې کرښيز دی بايد باور ولري:

$$\begin{aligned} & F(x) + F(n) = F(x+n) \\ \Leftrightarrow \quad & F(x) = F(x+n) - F(n) \\ \Leftrightarrow \quad & F(x) = F(x+n) - 0 \\ \Leftrightarrow \quad & F(x) = F(x+n) \\ \Rightarrow \quad & n = 0 \end{aligned}$$

نو $Ker(F) = 0$

له دې لاس ته راځي ($\Leftarrow$) :

$$Ker(F) \Leftrightarrow \{v \in V | F(v) = 0\}$$

د په باندېوالي خوونه: دا چې تابع کرښيزه دی با ور لري:

د په کې والي ښوونه:

$$\begin{aligned} & F(v_1) = F(v_2) \\ \Leftrightarrow \quad & F(v_1) - F(v_2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & F(v_1 - v_2) = 0 \\ Da\ \ Ker(F) = 0 \ \ \Rightarrow \quad & F(v_1 - v_2) = F(0) \end{aligned}$$

ketabton.com - The Digital Library

له دې سره دی $v_1 = v_2$.

L پهکې ⇔ کرښيزخپلواک وکتورونه په کرښيز خپلواک وکتورونو څېره کيږي

L پهکې ⇔ کرښيزخپلواک L کرښيز خپلواک

له دې لاس ته راځي(:⇐) :

ښايو: $L(v) = L(w) \Rightarrow \ldots \Rightarrow v = w$

وي دې $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ بنسټ، $v, w \in V$ او بنسټ او

$L(v_1), \ldots, L(v_i), \ldots, L(v_n)$ کرښيز خپلواک

$$\begin{aligned} & L(v) = L(w) \\ \Leftrightarrow\quad & L(\sum \lambda_i v_i) = L(\sum \mu_i v_i) \\ \Leftrightarrow\quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \\ \Rightarrow\quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) = 0 \ \ (v \end{aligned}$$

(د کرښيز کمبينيشن د يواځيوالي له امله)

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \\ \Rightarrow\quad & v = w \end{aligned}$$

په کې والی ښايي

له دې لاس ته راځي يا

⇒:

ښايو: $L(\sum \lambda_i v_i) = 0$

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i \\ \Leftrightarrow\quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \end{aligned}$$

د ا ينجکتيويتي له امله

ketabton.com - The Digital Library

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i)L(v_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad L(\sum \lambda_i v_i) = 0 \end{aligned}$$

د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېروني

موږ د بېلګي په توګه دري پولينومونه P_1, P_2, P_3 لرو د لاندې سره

$$\begin{aligned} P_1 &= (x-1)(x-2)(x-4) \\ P_2 &= (x-3)(x-5)(x-1) \\ P_3 &= (x-4)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

موږ اوس کړی شو يو د ارزښتوني تابع یا څېرونه تعریف کړو(a څای دی په کوم کې چې ارزونه کیږی)

$$W_a(P) : P \mapsto P(a)$$

د ارزښتونې پولينوم کرښيز دی څکه چې لاندې $\forall \; P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ او $\lambda \in K$ [4.2] باور لري :

$$W_a(\lambda P + Q) = \lambda W_a(P) + W_a(Q)$$

په دې توګه د ارزښتوني تابع سره کرښيز خپلواک وکتورونه په کرښيز خپلواک وکتورونو څېره کيږي ای ماپينګmapping جوړوي، دا په دې معنا چې

P_1, P_2, P_3 کرښيز خپلواک دي، که $W_a(P_1), W_a(P_2), W_a(P_3)$ کرښيز خپلواک وي.

موږ د

$$\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2)) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$$

ketabton.com - The Digital Library

لپاره ښايو

: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

په دې معنا چې P د 1 په ځای کې ارزښتول کيږي، يعنې دپولينوم $P(1)$ ارزښت تاکل کيږي، که 1 ځای په ځای کړو :

	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	
P_1	$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\Rightarrow \lambda_3 = 0$
P_2	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_2 = 0$
P_3	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

داچې درې وکتورونه، چې د ارزښتوني له لارې جوړيږي يا منځ ته راځي يا توليديږي، کرښيز خپلواکدي، دادرې وکتورونه P_1, P_2, P_3 هم کرښيز خپلواک دی.

ايزومورفيزمونه Isomorphismen

V او W دې $\mathbb{K}-$ - وکتورفضاوې وي . V د $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتور فضا بنسټ وي. تابع $f : V \to W$ ټيک هلته ايزومورفيزم[4.3], ده، که

$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$

د W يو بنسټ وي. دا جمله په څټ يا برعکس هم باور لري.

ketabton.com - The Digital Library

V دې یو $\mathbb{K}-$ -وکتروفضا او $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ دې بنسټ وي.

موږ ایزمورفیزم

$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

کانونیکي بنسټ- ایزومورفیزم بولو. د اړتیا په حالت کې دا په $\Phi_{(v_1, v_2, v_n)}$ توګه هم ښایو. موږ دلته ګورو چې د کانونیکي بنسټ-ایزومورفیزم څخه کار اخستلای شو، چې د یوونوکتورونو (واحد-) سره (کانونیکي بنسټ) او د وکتروفضا V د بنسټوکتورونو څخه یو ماتریکی جوړ کړو، چې د دواړو وکتورفضاو ترمنځ ترنفورمي کیږي.

موږ دا داسې کړو چې د V د بنسټ وکتورونه یو په بل پسې په ماتریکس کې ولیکو.

ماتریکسونه **Matrizen**

یو ماتریکس $Mat(m \times n; K)$ یو د m لیکو او n درڅونو(متو، ستنو) نظم دی د K بدن (پټي، ورشو، ساحه) څخه. د یوه ماتریکس د یوګونو توکو د لیکې – او – متې کېدی شي د ایندکس لیکدودIndizeschreibweise سره ټیک کره شي:

a_{ij}

دلتهi لیکه او j مته په کوته کوي.

کرښیزې فنکشنونه (توابع) د ماتریکسونو په څېر

هر کرښیزه تابع کېدی شي په ټیک یوه ماتریکش تنظیم شي

ketabton.com - The Digital Library

د یوه ماتریکس رانګ Rang

د یوه ماتریکس رانګ د کرښیز خبلواکو لیکو/ یا د همغې د متو ګنون یا تعداد دی.

د متو رانګ = د لیکو راګ Zeilenrang = Spaltenrang

جمله :

د هر $m \times n$ ماتریکی لپاره باور لري:

د لیکوراک=د متو رانګ یا رانک

ښوونه:

ورکړ شوی یو $(m \times n)$ ماتریکس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

موږ د $R_1, \ldots, R_m$ سره لیکې-وکتورونهښایو:

$$\begin{aligned} R_1 &= (a_{11}, \quad a_{12}, \quad \cdots, \quad a_{1n}) \\ R_2 &= (a_{21}, \quad a_{22}, \quad \cdots, \quad a_{2n}) \\ &\cdots \\ R_m &= (a_{m1}, \quad a_{m2}, \quad \cdots, \quad a_{mn}) \end{aligned}$$

کهr د لیکې رانک وي، نو موږ r کرښیز خپلواک وکتورونه لرو، کوم چې د دې لپاره بنسټ جوړوي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}), \ldots, S_r = (b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{mn})$$

ketabton.com - The Digital Library

هر لیکه وکتور R_i د لاندې بنسټ وکتورونو کرښیز ترکیب دی:

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \ldots + k_{1r}S_r \\ R_2 &= k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \ldots + k_{2r}S_r \\ &\ldots \\ R_m &= k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \ldots + k_{mr}S_r \end{aligned}$$

د دې لپاره چې د ماتریکس هر توکی a_{ji} لاس ته راوړو، باید ټول ضریبونه، د لیکې وکتور ونه د لیکېفضاځخه وکتوروفضا انځور کړ، د بنسټ وکتور د اړونده توکي سره ضرب کړو. دا د a_{11} لپاره د بېلګې په توګه دی

$$a_{11} = k_{11} \cdot b_{11} + k_{12} \cdot b_{21} + \ldots + k_{1r} \cdot b_{r2}$$

له دې سره a د ټولو i لپاره د لیکې ډول دی.

$$\begin{aligned} a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \ldots + k_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \ldots + k_{2r}b_{ri} \\ &\ldots \\ a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \ldots + k_{mr}b_{ri} \end{aligned}$$

موږ کړی شو اوس هر د متې وکتور په لاندې توګه ولیکو:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri} \cdot \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.$$

له دې امله دا وکتورونه د r وکتورونو کرښیز ترکیب دی:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

ketabton.com - The Digital Library

اړيين نهده چې داوکتورونه دې يو بل تهکرښيز خپلواک وي. مګر په هر حالت بايد هغه خوراجګ ګڼ(عدد) پهr رابند يا محدود وي، چې له کومهامله دی

د متې(درز يا ستنې يا ولاړې ليکې يا کيلې) رانک Spaltenrang $\leq r$

سرِی همداسې د تراسپونی شوې ماتريکس سره هم مخ ته څي او په دې توګه ،، $\leq r$ د ليکې رانک Zeilenrang ،، لاس ته راوړي. له دې سره دی:

د ليکي رانک = دمتې رانک

په څټ- يا معکوس ماتريک Inverse Matrix

يو مربع يا څلوريزه $n \times n$ ماتريکسA يو معکوس ماتريکس A^{-1} لري،، که يو لهدې لاندې برابر ارزښته اړيکو څخه يو پوره وي.

- د متو (ليکو) وکتورونه کرښيز خپلواک دي.
- $rang(A) = n$
- $det(A) \neq 0$
- له دې سره اړوند کرښيزه تابع f_A يو ايزومورفيزم دی.

څرخون- او هدارون-ماتريکسونه(--- د انعکاسونې --)

په $\mathbb{R}^2$کې څرخون يا څرخونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ketabton.com - The Digital Library

په $\mathbb{R}^2$ کې هنداروٍنه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

ديترميناتونه Determinanten

ديترميناتونه دځه لپاره دي؟

ديترميناتونه په $\mathbb{R}^2$ کې د غبرګ اړخيز(موازی الاضلاع) په $\mathbb{R}^2$کې د يوه شپات(کشکول شوی کوادر يا مکعب) او په $\mathbb{R}^n$ کې د يوه غبرګ خوايز سطحه ورکوي.
له دې سره روښانهکېدی شي،چې ولې يو ديترمينات صفر دی، که وکتورونه يو بل ته کرښيز بلواک وي. که په کې دوه وکتورونهورکړ شوې وي او دا يو بل ته کرښيز بلواک وي، نو دا يو غبرګاړخيز نه شي غزولی او له دې امله مساحت صفر دی. له دې سره هر مربع – يا ځلوری-ماتريکس يوه ګڼ يا عدد سره تنظيميږي.

تعريف(پيژند) Definition

ديترمينانت هر ماتريکس $M(n \times n, \mathbb{K})$ يو عدد $\mathbb{K}$ باندې تنظيموي:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

فنکشن (تابع) لاندې خويونه لري:

لومړی: ديترمينانت په هره ليکه کې کرښيزه ده. داپه دې معنا، چې که سرې له ماتريکس M يوه کرښنه لرې بريږدي يا پرېږدي او د يو کتور x سره بدله کړي، چې بيا دا تابع نسبت دې وکتور ته ځان کرښيز نيسي.

دويم : که د ماتريکس د ليکې رانک نسبت د ليکې تعداد n ته کوچنی وي، نو $\det A = 0$ ده.

ketabton.com - The Digital Library

دریم : د یوونماتریکس یا واحدماتریکس ډیترمینانت 1 دی:

$$\det(E) = 1$$

ټیک یوه تابع شته، چې دا خویونه پوره کوي. دا باید وښایو، داسې چې موږ یواځنوالی او شتونوالی وښایو. دا هر شرط لپاره باید په یواځې تګهوښول شي.

مرشتندوي جمله:Hilfssätze :

د ښوونې لپاره لومړی لاندې مرستندوی جملې ښایو:

لومړی: که په ماتریکس A کې دوه لیکې بدلې شي، نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نو باور لري.

$$\det A' = -\det A$$

.

دویم : که د یوعماتریکس لیکه د یوه سکالار λ سره ضرب شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي او له دې سره باور لري:

$$\det A' = \lambda \det A$$

دریم : که په یوه ماتریکس A کې یوه لیکه د ماتریکس د بلې لیکې سره جمعه (ورزیاته) شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نوله دې څخه دیترمینان بې اغیزه پاتې کیږي: $\det A = \det A'$

د دې مرستندوی او یواځنوالی او شتون جملو ښوونه دې په Jänichکې وکتل شي.

د دیترمینانتو ساده شمېرنه

لاندې برحه

ketabton.com - The Digital Library

- 2×2
- 3×3

د لاپلاس د وديزېنې جمله Laplace Entwicklungssatz

د لاپلاس د وديزېنې جمله مرسته کوي، کد له 3×3 ماتريکسونو ځخه لوی ديترمينانتونه ټاکو[6.1] .

سړی کړی شي ديترمينانت ته وده ورکړای شي، که ماتريکس تل په کوچنيو ديترمينانتونو و وېشي. دلته لاندې ماتريکس A_{ij} هغه ماتريکس ده، چې د ماتريکس A د $i-$مې او $j-$مې ليکي همداسي متې د لرې کولو ځخه لاس ته راځي. سړی کړی شي چې وديزيېنه سرته ورسوي يا د ليکې له لارې

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

يا د متوو پسې

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

د ضريب يا خلووني $(-1)^{i+j}$ په مرسته يو د سترنجتختې ډوله مخ يا موسترمنځ ته راځي. له دې سره د ديترمينانت مخنخښه ټاکل کيږي:

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

بېلګه:

ketabton.com - The Digital Library

ودیزیینه پورته لیکه پسې پورته لیکه => په لاندې دیترمینات کې د لیکې په څیر له منځه وړل کیږي =	$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$$+a_{11}\cdot det\underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{1.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{12}\cdot det\underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{2.Spalte\ \ ausgeblendet}$$

۱ -م. درځ لرې کړي　　　　۲ -م درځ لرې کړي

$$+a_{13}\cdot det\underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}}_{3.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{14}\cdot det\underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}}_{4.Spalte\ \ ausgeblendet} =$$

۳ ــم درځ لرې کړی　　　　۴ ــم درځ لرې کړي

د دیترمینانتونو ساده ټاکنه

- که یوه لیکه یا متِه کربنیز بلواک وي، نو باور لري

$$det\ \ A = 0$$

دا د لاندې سره په برابره معنا ده(د لیکو تعداد همداسې د متو تعداد)

$$rang\ A < n$$

- که څوک یوه متِه د بلې سره بدله کړي یا یوه لیکه د بلې سره بدله کړي،

ketabton.com - The Digital Library

مخنخښه تغير خوري(دا چې د ديترمينانت تابع الترنيري(بديلي) **alternierend** ده)

$$det\ A_{ij} = -det\ A_{ji}$$

- کهد ماتريکس يوه ليکه د سکالار سره ضرب شي،نوبايد تنها ديترمينانت هم د همغه سکالار سرهضرب شي:

$$det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \lambda\cdots\lambda & \lambda a & \lambda\cdots\lambda \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \lambda\ det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

په همدې توګه که ديترمينانت د λ^n سره هم ضربې شي، د کوم سره چې n د ليکو تعداد دی، داسې دهلکه که يوه ماتريکس ټوله له λ سره ضرب شي.

$$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det\ A$$

- د يوونماتريکس (واحد-) ديترمينانت 1 ده:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- د يوه درېګوډي ماتريکس ديترمينانت د هغه د دوه کونجترې ضرب دی:

$$det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$$

- ماتريکس ځخه $n \times n$ داسې يوه درېګويزه ماتريکس کړی شو د هر په خوښه د ساده ليکو عمليو ځخه د ګاوسقانون له مخې لاس ته راوړو. موږ بايد د ديترمينانت په ټاکلو يواځې دې ته پام وکړو، چې ليکه بدلون ديترمينانت ته له

ketabton.com - The Digital Library

ځانسره يوسو. نو كه r د ليكو د بدلون تعدادوي، چې موږ سر ته رسولې چې درېګوډيزه بڼه لاس ته راوړو، باور ولري::

$$\det A' = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{nn}$$

- كه ځوک يوه ماتريكس ترنسپوني كړي(داپه دې معنا چې د ليک ځخه متې جوړوي او له متو ځخه ليكې او يا په مربع يا ځلوريزه ماتريكسونوكې دا په دوهكونجترې(قطر) هنداره كوي) په دې حالت كې د ترادپوني ماتريكس ديترمينانت ارزښه د نه ترانپوني شوې ماتريكس د ديترمينانت سره برابر دی:

$$\det \ A = \det \ A^T$$

كوچنی بام: په ضرب كې دې پامدې وي. باور لري

$$(AB)^t = B^t A^t$$

- ديترمينانت- ضرب-جمله

$$\det(A \cdot B) = \det \ A \cdot \det \ B$$

.... ښوونه يې دلته ورزياته كړی.

د ايندومورفيزم ديترمينانتونه

دا چې موږ هر ايندومورفيزم f د مربع – يا ځلوری-ماتريكس سره انځورولی شو[6.2]، له دې سرهكړی شو چې د ايندومورفيزم ديترمينانت هم تعريف كړو:

$$\det f := detA_f \in \mathbb{K}$$

اوس داپوښتنه رامنځ ته كوو، چې ايا د V د مختلفو بنسټونو لپاره ديترمينانتونه مختلف دي. دا كېدی شي وښوول شي چې ديترمينانت د بنسټ د ټاكنو يا اتخاب ځخه خپلواک

ketabton.com - The Digital Library

دي.   له دې سره لهدې امله کړی شو چد د یوه ایندومورفیزم دیترمینانت یواځنې ت عریف کړو.

أیګن ارزښتEigenwerte(Eigenvalue)

یادونه: دا أیګن په ټول ژبوکې همداسې لیکي. دا الماني وی یا لغات دی، د خپل په معنا دی.

أیګن ارزښتEigenwerte(Eigenvalue)

F دې د وکتورفضا V_K ایندومورفیزم وي. یو $\lambda \in K$ أیکنارزښت بلل کیږي، که یو $v \in V$ شتون ولري د $v \neq 0$ سره ، داسې چې باور ولري.

$$F(v) = \lambda v$$

أیګنوکتور Eigenvektoren

F دې د وکتورفضا V_K یو ایندومورفیزم وي. هر له صفر وکتور مختلف $v \in V$ د

$$F(v) = \lambda v$$

سره د F أیګنوکتور بلل کیږي(أیګن ارزښت λ ته)

دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې کیدنوړ(قطري کیدونکې) Diagonalisierbar

یو ایندومورفیزم دوه کونجتړې کېدونکی (قطري کېدونکې یا – وړ) بلل کیږي، که د أیکن وکتورونو ځخه یو بنسټ شتون ولري. دا په دې معنا چې د ایندومورفیزم لپاره یو دوه کونجتړی ماتریکس د لاندې بنه شتون لري(د متو وکتورونه بنسټ ومتورونه

ketabton.com - The Digital Library

شتون لري، λ_i أيګن ارزښتونه دي)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

أيګن فضاوې Eigenräume

F دې د V ایندومورفیزم وي او $\lambda \in K$ ، نو

$$Eig(F;\lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

د F یو أيګنفضا بولو نسبت و λ ته.

- اګن فضا د V وکتورفضا یو برخوکتور فضا ده.
- صفروکتور په لیګنوکتور کې خوندي نه دی.
- $Eig(F;\lambda)\{0\}$ د λ اړونده أيګنوکتورونو ډېری ده
- (S.210) ...

کرکتریستیکي پولینوم یا سړی څګګه أيګن ا رزښتونه پیدا کوي؟

سړی کړی شي چې أيګن ارزښتونه وټکي، داسې چې د کرکتریستیکي پولینوم صفرځایونه پیدا کوي. باور لري[7.1]

د ایګن ارزښت دی له دې لاس ته راځي او په څټ

$$\lambda \ ist \ Eigenwert \ von \ F \Leftrightarrow det(F - \lambda id_V) = 0$$

ketabton.com - The Digital Library

سرړی د لاندې ماتریکسونو دوه -کونجترې(قطر) پیداکوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mn}-\lambda \end{pmatrix}$$

سرړی أیګن وکتورونه او أیګن ارزښتونه څنګه پیدا کوي؟

که څوک أیګن-ارزښت λ ولري،نو کېدی شي و هغه ته مناسب أیګنوکتور وټاکي، داسې چې سړی لاندې برابرون - یا مساواتسیستم حل کړي:

$$(A-\lambda I)X=0$$

لکه کریتیکي پولینوم لپاره سړی همداسې بېرته ماتریکس جوړوي، چېرته چې د λ لپاره أیګن ارزښتونه ځای په ځای کوي . بیا سړی دا هوموجېن مساواتسیستم حل کوي.

یو ماتریکس سړی څنګه دوه-کونجترې یا قطري کوي؟

لومړ: که لږ ایګنوکتورونه تولید یا جوړېدی شي، دې ته (نسبت دې ته) چې ماتریګس درزونه همداسې لیکې لري، نو متریکس دوه کونجترې کیدونکې نه ده.

که پوره وکتورونه شتون لري او ودې ته ایګن ازښتونه نو $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ باور لري

$$D=S^{-1}AS=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

سکالار ضرب(دننۍ ځل یا –ضرب) او نورم

ketabton.com - The Digital Library

Skalarprodukt (Innenprodukt) und Norm

سکالار ضرب

تعریف یا پیژند:

یو تابع $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $(x,y) \to \ <x,y>$ سکالار ضرب بلل کیږي، که $\forall \ x,x',y \in \mathbb{R}^n$ دا لاندې باور ولري:

- $<x+x',y>=<x,y>+<x',y>$ کربنیزوالی (
- $<x,y>=<y,x>$ (سیومتري Symmetrie)
- $<x,x>\geq 0$ او $<x,x>=0 \Rightarrow x=0$ مثبت او دیفینیت) Positiv und definit)

بېلګه:

- $<a,b> \mapsto a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n$

نورم Norm

پیژند(تعریف): یوه څیرونه یا فنکشن $|| \ || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ نورم بلل کیږي، که لاندط امسیومونه باور ولري

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ دیفینیت
- $||x|| \geq 0$ مثبت

ketabton.com - The Digital Library

- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ هوموجين

- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ درې ګوډي يا مثاثاتي نابرابرون

بيلګه:

$$||a||_\infty = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_\infty = \max(|a_i|; i = 1, \ldots, n)$$

ماکسيموم يا خورا جګ ارزښت

$$||a||_1 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_1 = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

(يو نورم)

$$||a||_2 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_2 = \sqrt{< a, a >} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2}$$

(د پيوتاګوراس نورم)

د وازيدو کونج تعريف:

د يوې وکتورفضا د x او y وکتورونو ترمنځ د وازېدوکونج α په لاندې توګه تعريف دی

$$< x, y >= ||x||\,||y||\,\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{< x, y >}{||x||\,||y||}$$

د وازيدو کونج د تعريف لپاره بايد کوساين تل تعريف وي. موږ بايد وښايو، چې دا لاندې باور لري:

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{||x||\,||y||} \leq 1$$

دا د کوشي –شوارځ- نامساواتو خونديونه ده.

ketabton.com - The Digital Library

د کوشي –شوارڅ- نامساوات

دپه خوښه وکتورونو $u, v \in V$ لپاره باور لري:

$$< u, v >^2 \leq < u, u >< v, v >$$

يا ورته(اکويوالنت):

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

ښوونه:

د $y = 0$ لپاره ساده دی. وي دې $y \neq 0$. موږ له يوه واړه چل څخه کار اخلو او $\lambda := \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \in \mathbb{R}$ ږدو. لاندې باور لري:

$$\begin{aligned} 0 \leq < x - \lambda y, x - \lambda y > &= < x, x > -2\lambda < x, y > + \lambda^2 < y, y > \\ &= ||x||^2 - 2\frac{< x, y >^2}{||y||^2} + \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \\ &= ||x||^2 - \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

په ورته توګه باور لري $< x, y >^2 = ||x||^2 ||y||^2$ او له دې سره

$$| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||$$

.

نورمال شوي ا و اورتوګونال وکتورونه

وکتورونو نورماليدنه:

ketabton.com - The Digital Library

وکتورونه نورمال شوي دي، چې اوږدوالی 1 لري، دا په دې معنا، چې $< v,v >= 1$
یا $||v|| = 1$.

یو وکتور نورمال کیدی شي یا کیږي، داسې چې دی د په څټ یا معکوس ارزښت سره ضرب شي:

$$v_{normalisiert} = \frac{1}{||v||} \cdot v$$

اورتوګونال وکتورونه (یو په بل ولاړ -)

دوه وکتورونه v_1 او v_2 یو بل ته اوتوګونال دي، که دا یو په بل ولاړ یا عمود وي. یا نیغ ولاړ وي. له دې امله د دوي سکالار ضرب یا ځل 0 دی.

$< v_1, v_2 >= 0$

هر وکتورفضا ته لږ ترلږه یو(یعنې په ریښتوني زیات) له اورتوګونال وکتورونو بنسټونه شته. کا دا هو اوږدوالی 1 ولري، نو دا *اورتونورمال* دي.

اورتونورمال بنسټونه:

یو اورتونورمال بنسټ هغه بنسټ دی، په هغه چې ټول وکتورونه دي چې نسبت سکالار ضرب ته اوږدوالی 1 لري او یو بل ته اورتوګونال دي.

سړی کړی شي هر بنسټ ته د شمیدت اورتوګونالیدونکي تلنلار **Schmidtschen Orthnormalisierungsverfahrens** په مرسته یو اورتونورمال بتسټ جوړ کړي:

موږ غواړو د $i = 1$ تر $i = n$ پورې لاندې فرمول وځغلوو، د کوم سره چې د n بنسټ وکتورونو تعداد یاګڼون دی، او یو بل پسې اورتوګونال وکتورونه د 1 اوږدوالي پیدا کوي یا میندي، چې دا موږ سملاسې د بل وکتور شمیرنو لپاره اړین مومو.

ketabton.com - The Digital Library

$$e_i = \frac{v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k >}{\left\| v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k > \right\|}$$

ځای بدلون Permotation

لیکندود

یو ځایبدلون یو په – یعني بیجکتیو ځیرونه یا فنکشن دی، کوم چې n توکي ($n > 0$) تنظیموي.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \sigma(2) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

دا پورته لیکنډول دا معنا لري، چې د بیلګې په توګه 1 د $\sigma(1)$ ځای ته راکښل کیږي.

په همدې توکه څیوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونې لیکندود هم ورځنی یا بلد دی. د بیلګې په توګه:

$$(12)(3)(564) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ترانپوزیشن Transposition

یو ترانسپوزیشن د ټیک دوه یتوکو بدلون دی په څیوکلیکي لیکندود یعنې (ab) .

هر پرموتیشن د دوه ترانپوزشنونو کمپوزشن(ضرب) دی.

د ممکنه ځای بدلونو ګڼون یا تعداد

ketabton.com - The Digital Library

که يوه ډېرۍ يا سټ n توکي لري، نو دا $n!$ ځای بدلونونه ممکن دي.

پاتې يا تش ځايونه

که يو پرموتيشن له يوه کوچني ځای څخه و يوه لوي پسې څيره کړي، نو تشځايونه توليديږي. که $j < k$ او $\sigma(k) < \sigma(j)$ وي، نو دا يو تشځای دی.

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

ketabton.com - The Digital Library

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

ځلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

ketabton.com - The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

ketabton.com - The Digital Library

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

ketabton.com - The Digital Library

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

ketabton.com - The Digital Library

سرلیک

Thank you for reading

Find more e-books and articles on Ketabton - your multilingual digital library.

www.ketabton.com

Ketabton - Pashto, Farsi, Arabic & English