د پوهنې وزارت
د ښوونکو د روزنې لوی ریاست

عمومي رياضي II

مؤلف: دکتور محمد انور غوري
ژباړونکی: پوهاند دکتور سید قیوم شاه باور

Ketabton.com

کال: ۱۳۹۱ هـ. لمریز

ketabton.com - The Digital Library

د کتاب ځانګړنې

د کتاب نوم: عمومی ریاضي II

مؤلف: داکتر محمد انور غوری

ژباړونکی: پوهاند داکتر سید قیوم شاه باور

کمپوز: حکمت الله کوچی

ډیزاین: روح الله شفیق، عصمت الله عمرزوی اوحکمت الله کوچی

شمېر: 20,000 ټوکه

د چاپ کال: 1391 هـ. ل

چاپ خونه: د هند د ریپرو مطبعه (Repro India Ltd.)

د درسي نصاب او انکشاف کمېټه:

سوسن وردک، پوهاند دکتور سید قیوم شاه باور، ښوونډوی عبدالخلیل فضلي، ښوونډوی صدر الدین اشرفي، ښوونیار عبدالحق رحمتي، ښوونمل عبدالودود شریف، ښوونډوی محمد حسین محسني او ښوونډوی شاه غاسي زرمتي

د امتیاز خاوند: د پوهنې وزارت

©Copyright reserved by MoE

دّ چاپولو حق د امتیاز خاوند لپاره خوندی دی

د دې کتاب پلورل او پېرودل منعه دي

د یونسف (UNICEF) او نړیوال بانک (WORLD BANK)

په مالي او تخنیکي مرسته

ketabton.com - The Digital Library

د کتاب مطالعه ، د انسان شخصیت بشپړوي. سانته یې د مطالعه کوونکي د لوړ فرهنګ ښکارندویي کوي.

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

د پوهنې د وزیر پیغام

بسم الله الرحمن الرحیم

الحمدلله و کفی و سلام علی عباده الذین اصطفی و بعد:

له شک پرته چې پوهنه د ایمان لار او د پرمختګ، تمدن او انساني کمال مدارجو ته د رسیدو یوازینۍ وسیله ده.

په تېر او اوسني عصر کې ټول بشري تمدنونه او پرمختیاوې د ژوند په پراخه ډګر کې د هغه نهضت او پوهنیزو نوښتونو پایله ده چې ښوونکو او پوهانو د خپل ارزښتمن ژوند په بیه ترلاسه کړي او د هغو په مرسته یې د اختراعاتو او علمي موندنو لاره د بشر پر مخ پرانیستې ده.

د تاریخي حقایقو له مخې بشري تجربې او علوم له یوه نسل څخه بل ته لیږدول کیږي او د هغو له برکته هره ورځ د نړۍ په کچه په بیلابیلو برخو کې حیرانوونکي اختراعات او نوښتونه رامنځته کیږي، چې د انتقال دغه ګړندی بهیر او ټول پوهنیز بدلونونه بیا د ښوونکي په وسیله ترسره کیږي؛ ښوونکی په حقیقت کې د بشري تمدن بنسټګر، مخکښ او په نړۍ کې د لوړ انساني تربیت، پرمختګ او مدنیت د کاروان لارښوود او بل څراغ بلل کیږي، ځکه خو د اسلام ستر پیغمبر حضرت محمد(ص) د ښوونکي همدغه لوړ موقف او درونده ټولنیز دریځ ته په پام سره خپل ځان ښوونکی بللی او فرمایلي یې دي (**انما بعثت معلماً**) یعنې له شک پرته زه د ښوونکي په توګه رالیږل شوی یم.

د ښوونکي دغه ارزښتناک مقام ته په درناوي سره، د هغه د معیشتي وضعیت ښه کول او د هغه علمي ظرفیت لوړول، د معارف د پراختیا په لاره کې له جدي اړتیاوو څخه شمیرل کیږي او د پوهنې وزارت له هغو بنسټیزو لومړیتوبونو څخه دي چې د خپل مسؤلیت له مخې یې په بشپړ قاطعیت او جدیت سره تعقیبوي.

ketabton.com - The Digital Library

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت د خپل اسلامي او ملي رسالت په درک کولو سره د هېواد د اساسي قانون د احکامو او د معارف د پراختيايي تګلارې په رڼا کې هڅه کوي څو د هېواد د پوهنې نظام د ودې او هراړخيزې پراختيا په موخه بنسټيزې او اغيزمنې چارې ترسره کړي.

د ښوونکي روزنې، ښوونيز نصاب او مصؤن تعليمي چاپېريال د چمتو کولو په دريو مهمو برخو کې د پوهنې بيارغونه چې په خپل وار سره د ښوونځيو او نورو ښوونيزو بنسټونو ټولو مادي اړتياوو ته ځواب وايي او همدارنګه په معنوي لحاظ د علمپالو، وطن دوستو او مسلمانو انسانانو په توګه د زده کوونکو د شخصيت د متوازنې ودې لپاره د معنوي او سالمې علمي فضا په رامنځته کولو کې کارنده ونډه اخلي، چې د پوهنې وزارت په لومړيتوبونو کې ځای لري.

د لوی خدای په مرسته، د دوستو هېوادونو په مالي همکاری، د افغانستان د پوهنپال ملت په هڅو او ملاتړ او د پوهنې وزارت د با احساسه کارکوونکو او درنو ښوونکو د بې دريغه سرښندنو په مټ د پوهنې په ټولو برخو کې داسې کوټلي ګامونه اخيستل شوي دي چې له برکته يې د هېواد په تاريخ کې د پوهنې بهير بې ساري پرمختګ کړی دی.

د پوهنې وزارت هڅه کوي څو د ښوونکي روزنې مؤسساتو ته له کمي او کيفي اړخه بهبود وبښي چې لله الحمد د عمومي، اسلامي، تخنيکي او مسلکي زده کړو او ليک لوست زده کړې تر څنګ د دارالمعلمينونو لپاره د نوي نصاب چمتو کول او د هغو لپاره د نويو درسي کتابونو تأليف په دې برخه کې يوه څرګنده ارزښتمنه لاسته راوړنه ده.

د دارالمعلمينونو نوی تعليمي نصاب چې زمور د ټولنې اړتياوو ته په پام او د معاصرې پيداګوژۍ له معيارونو، اصولو او نويو لارو چارو څخه په ګټې اخيستنې سره چمتو شوی دی، ان شاء الله چې زمور د هېواد د ځوانو ښوونکو علمي اړتياوې به پوره او پوهنيزو غوښتنو ته به يې ځواب ووايي.

ketabton.com - The Digital Library

له ټولو هغو درنو پوهانو او قدر ور استادانو څخه د زړه له کومي مننه کوم چې د دارالمعلمینونو د نوي نصاب په چمتو کولو کې یې د مفرداتو او یا هم د تألیف، تصحیح او بیاکتنې په برخو کې کارنده ونډه اخیستې ده.

د دارالمعلمینونو د نوي نصاب د تطبیق په لاره کې ټولو درنو، با احساسه او زیارکښو استادانو ته د علیم او خبیر ذات له درباره د لازیاتو بریاوو هیله کوم څو د دغسې نویو پوهنیزو کړنلارو په پلي کولو سره د افغانستان د پوهنې نظام لاهم ځواکمن او د علمي او ټکنالوژیکي پرمختګونو د سیالۍ په دغه پراخ ډګر کې د نورو هېوادونو د سیالۍ جوګه شي.

والله ولی التوفیق

فاروق وردګ

د پوهنې وزیر

ketabton.com - The Digital Library

مخکنۍ خبرې

بسم الله الرحمن الرحيم

ښوونه او روزنه د يوې ټولنې د پرمختګ اساسي برخه ده. چې د وخت د غوښتنې او د هر هېواد ملي او نړيوالو شرايطو سره سم بايد په هغه هېواد کې وده او پرمختيا ورکړل شي. دې واقعيت ته په پام کې نيولو سره اړتيا ليدل کېږي چې د هېواد د ښوونې او روزنې په سيستم کې هم بنسټيز او بنيادي بدلون رامنځ ته شي. لدې کبله په نصاب کې د بدلون او انکشاف نه پرته د تغيير او ودې امکان نه ليدل کېږي. ځکه نو ښوونيز نصاب د اسلامي لوړو ارزښتونو په اساس او د معاصرو علومو او فنونو پرمختګ ته په پاملرنې د ځانګړي لومړيتوبونو څخه بايد برخمن وي. د يادولو وړ ده چې د ښوونکو د روزنې ښوونيز نصاب له ډېرې مودې راپدې خوا په يو ډول و. او د خپلو مخکينيو ارزښتونو په چوکاټ کې هغه خوځښت چې د معاصرو علومو د ودې سره يو ځای وي د پام وړ تجربې يې لږ ازمويلي. له بلې خوا په هېواد کې د ټولنيزو او اقتصادی ناخوالو لکه: بې وزلي، ناپوهي، بېسوادي له امله زمور، هېواد د معاصرې نړۍ له پر مختللي کاروانه وروسته پاتې شوی، نو د معاصرې نړۍ د علم او تخنيک د پرمختګ د اوسنيو شرايطو په پايله کې چې کوم بدلونونه د بشري ټولنې په بيلابيلو اړخونو کې رامنځته شوي، زمور د هېواد لپاره هم د وروسته پاتې والي څخه د خلاصون او پرمختګ په لور يون يو ښکاره او مبرم ضرورت ښکاري. د غسې لوړ انساني آرمان او هدف ته رسېدل بې د ښوونې او روزنې له بدلون او د نوي معارف او پوهنې له جوړولو پرته چې بنسټيز اړخ يې د ماهرو تخصصي او مسلکي ښوونکو روزل دي، ناشونی کاردی.

د همدې موخې پر بنسټ څوکاله مخکې د پوهنې وزارت د پربکړې په اساس د وزارت د ښوونکو د روزنې په برخه کې لوی مشاوريت و پتيله چې د ښوونکو د

ketabton.com - The Digital Library

روزنې لپاره د نوی نصاب جوړول پیل کړي دا کار یې د کابل پوهنتون، د ښوونې او روزنې پوهنتون او دعلومو اکاډمي د یو شمېر ښاغلو استادانو په مرسته د ورکشاپونو په دایرولو او د ځینو پرمختللیو هېوادونو د ښوونې او روزنې له سیستم نه په ګټه اخیستلو سره وکړای شول چې د خپل هېواد د ځانګړو شرایطو سره سم د ښوونکو د روزنو د موسساتو لپاره نوی تعلیمي نصاب جوړ او په ښلا ښلو رشتو کې د نویو درسي کتابونو لیکلو بهیر پیل کړي.

د دغو نویو کتابونو له لیکلو څخه چې د دارالمعلمینونو د نوي تعلیمي نصاب پر بنسټ لیکل شوي اصلي موخه او هدف دادی چې د محصلینو علمي او تخصصي سویه لوړه او په ملي او اسلامي روحیه وروزل شي، چې په راتلونکې کې د پوهو او اګاهو ښوونکو په څېر خپل ملي او وطني رسالت د راتلونکي نسل د ښوونې او روزنې په برخه کې په پوره ایمانداری او بریالیتوب سره سرته ورسوي.

د یادولو وړ ده چې د ښوونکو د روزنې لوی ریاست موخه یوازې د دارالمعلمینونو د نوي نصاب په چمتو کولو او د دغو نویو درسي کتابونو په لیکلو پای ته نه رسیږي، بلکې د ښوونکو د روزنې د لوی ریاست هدف دادی چې د دارالمعلمینونو د ښوونکو تخصصي سویه لوړه او تجربه یې دومره زیاته شي چې له یوې خوا د لوړو زده کړو زمینه ورته برابره شي او له بلې خوا د علمي سیمینارونو، ورکشاپونو او لکچرونو له لارې لازیاته عملي تجربه ترلاسه کړي.

هیله لرم زمونږ د دارالمعلمینونو ګران محصلین به وکولای شي د ښکارنده زده کړې له طریقې نه، له دغو درسي کتابونو څخه چې په لیکلوکې یې له معتبرو اخځلیکونو څخه استفاده شوې زیاته ثمربښوونکې ګټه ترلاسه کړي، څو د خپل هېواد راتلونکي نسل لپاره د یوه ښه عالی او مسلکي ښوونکي په توګه خپله علمي سویه لوړه کړي چې د راتلونکو سمبالونکو په خاطر د زیات او د ښه خدمت جوګه شي.

ketabton.com - The Digital Library

په پای کې په ځای ده چې د کابل پوهنتون، ښوونې او روزنې پوهنتون، علومو اکاډمی له هغه شمېر ښاغلو استادانو، دښوونکو دروزنې دلوی ریاست ښاغلو علمي او مسلکي غړو، طباعتی کارکوونکو، په هېواد کې د ښوونکو د روزنې هغه شمېر ښاغلو استادانو، او د کتابونو د چاپولو د نصاب د بیا کتونکو دکمیسیون ښاغلو غړو، بهرنیو موسساتو او اشخاصو څخه چې ددې کتابونو په چاپولو کې یې مالي مرسته کړې د زړه له کومې مننه وکړم او له لوی خدایﷻ څخه هغوی ته لا زیات بریالیتوبونه غواړم.

سوسن وردګ

د ښوونکو د روزنې عمومی رئیسه

اود پوهنې وزارت د مقام ستره سلا کاره

ketabton.com - The Digital Library

موضوع ګانې

سرلیک **مخګنه**

لومړی څپرکی

تابع ګانې 4

د عددونو انټرولو نه 4

د تابع تعریف 6

د تابع ګراف 10

په تابع ګانو کې الجبري عملیې 14

په تابع ګانو کې د الجبري عملیو خاصیتونه 15

د ځینو تابع ګانو مثالونه 16

د تابع ګانو تزاید او تناقص 23

انجکتیف تابع 23

سورجکتیف تابع 25

د تابع ګانو ترکیب 25

معکوسه تابع 29

تمرینونه 34

پولینومي تابع ګانې (پولینومونه) 36

ناطقې تابع ګانې (نسبتي تابع ګانې) 37

عمودي مجانبونه 38

غیرناطقه تابع 45

ketabton.com - The Digital Library

لوګارتمي او اکسپوننشیل تابع ګاني 45
تمرين 48

دوهم څپرکی

مثلثاتي تابع ګاني 50
د زاويې واحدونه 51
د يوې دايرې د مرکزي زاويې او د هغې د مقابل قوس ترمنځ رابطه (اړيکه) 53
د مثلثاتي نسبتونو تعريف 56
د مثلثاتي تابع ګانو د قيمتونو ترمنځ رابطې 58
د جمع فورمولونه 62
د مثلثاتي تابع ګانو تناوب 66
د مثلثاتي تابع ګانو ګرافونه 67
معکوسې مثلثاتي تابع ګاني 69
تمرين 74
مثلثاتي معادلې 75
د مثلثاتي معادلې حل (د يوې مثلثاتي معادلې جذر) 76
تمرين 80
د يومثلث د عناصرو تر منځ رابطې او د مثلث حل 80
د ساين قضيه 81
د کوساين قضيه 82
د تانجنت قضيه 84
د يو مثلث د داخلي نيمو زاويو مثلثاتي نسبتونه 85
د هيرون فورمول 86

ketabton.com - The Digital Library

په مثلث کې د ارتسام قاعدې 87
د مثلث حل 88
تمرين 90

دريم څپرکی

د تابع ګانو لېمېټ 94
د لېمېټ اساسي قاعدې 102
د پوليونومي او ناطقو تابع ګانو لېمېټ 105
د لېمېټ مبهم حالتونه 106
د مثلثاتي تابع ګانو لېمېټ 110
د طاقتنما (اکسپوننشيل) او لوګارتمي تابع ګانو لېمېټ 111
د تابع ګانو متماديت (پيوستګي) 116
غير متماديت (انفصال) 117
تمرين 119

څلورم څپرکی

د تابع ګانو مشتق 122
دمشتق تعريف 122
مشتق پذيري او متماديت 124
د طاقت تابع مشتق 124
د مشتق نيونې الجبري قاعدې 125
د مثلثاتي تابع ګانو مشتق 126
د لوګارتمي تابع ګانو مشتق 127
د مرکبو تابع ګانو (تابع تابع) مشتق 128

ketabton.com - The Digital Library

د ضمني تابع ګانو مشتق 128
د معکوسو تابع ګانو مشتق 131
د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق 132
هايپربوليکي تابع ګانې او دهغوي مشتقات 133
معکوسې هايپربوليکي تابع ګانې او د هغوي مشتقات 138
ديوې تابع پرله پسې (متوالي) مشتقات 140
تمرين 143

پنځم څپرکی

له مشتق څخه ګټه اخيستنه 148
د مشتق هندسي تعبير 148
د زياتوالي او کموالي (تزايد او تناقص) شرطونه 150
نهايې نقطي (اعظمي ګانې او اصغري ګانې) 151
د مشتق په مرسته د نهايې (اکستريم) نقطو پيداکول 152
د دوهم مشتق په کارولو سره دنهايې نقطو معلومول 153
د يو ګراف د کوږوالي (انحنا) ډول 156
د محدب والي او مقعر والي شرطونه 157
د انعطاف شرطونه 158
مطلقه اعظمي ګاني او اصغري ګاني 162
د اعظمي ګانو او اصغري ګانو تطبيقي مســـالې 163
د هوپيتال قاعده 167
نور مبهم شکلونه او د هوپيتال قاعده 171
د کميتونو د تغير اړونده تطبيقي مسايل 174

ketabton.com - The Digital Library

تمرین 179

شپږم څپرکی

انتګرال 184
اولیه تابع 184
غیر معین انتګرال 185
د غیرمعینو انتګرالونو اولیه خاصیتونه 185
معمولي انتګرالونه 186
په تعویضي طریقه انتګرال نیونه 188
د غیرمعین انتګرال د د ستورونو عمومیت 190
د ځینو مثلثاتو تابع ګانو انتګرال نیونه 191
د انقسام په طریقه انتګرال نیونه 193
د هغو تابع ګانو انتګرال چې دوهمه درجه پولینومونه لري 195
د ناطقو تابع ګانو انتګرال نیونه 198
معین انتګرال 201
د معین انتګرال خاصیتونه 203
د مساحتونو په حسابولو کې د معین انتګرال کارول 204
تمرین 208
ماخذونه 209

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

سریزه

د عمومی ریاضي II کتاب د دارالمعلمینونو د ریاضي څانګې دلومړي ټولګي د دوهم سمستر لپاره دتدریس په منظور لیکل شوی او دنصاب سره سم دځلوروکریدونو په حجم تیار شویدی. ددې کتاب په تدریس کې دوه اصلي هدفونه نغښتي دي. لومړی داچې دښوونځیو دعمومي ریاضي لومړني او اسانه مفهومونه په نسبتاً نوي روحیې سره یادشوي اوعمومیت ورکړل شویدی دوهم داچې دمطلوبونو د توضیح ترڅنګ د راتلوونکو ښوونکو لپاره د محتوا د درس ورکولو مهارتونه دا ډول معرفی شوي او زده کړه ورکړل شوي ده چې د دوی دارتیا سره هم غږي دي. دا کتاب په شپږو فصلونو کې راټول شوی دی. چې هغه دتابع اساسات، مثلثاتي تابع ګانې، دتابع ګانو لیمیټ، مشتق، د مشتق کارول او انتګرال دي. دځانګړي پروګرام او هدف پر بنا دیو درسي کتاب لیکنه په موضوع کې د درس دورکولولازمه تجربه او کافي فرصت غواړي د دې کتابونو دلیکنې په لړکې دمسؤولینو په جدي پاملرنې سره هڅه شویده چې ترممکنه حده پورې په ګوته شوي هدفونه تر سره شي. په هر ځای کې هڅه شوي ده چې د دې کتاب محتوا، عمومیات په ځان کې ولري او مفهومونه په ساده عبارتونو، عام فهمه، لنډ شوي او له تکلیف څخه پرته بیان شي. د تفنیني تفصیلاتو اوبې لزومه نظري مسالو له طرحې څخه ډډه شوي ده د شهودي مسالو په توضیحاتو او تحلیلي مسالو په تطبیق باندې اکتفاشویده

د هر بحث لپاره تمرینونو په پام کې نیول شویدي چې دهغې حل د زده کوونکو دزده کړې قدرت اومهارت زیاتوي.

په دې کې شک نشته چې د دې کتاب څخه به د دارالمعلمینونو دلومړیوټولګیو سربیره نور علاقمندان هم ګټه واخیستلاي شي.

دطبیعي علومو دټولو لوړو تحصیلی موسسو دشاګردانو لپاره ګټور او درسي ممد کیدلی شي.

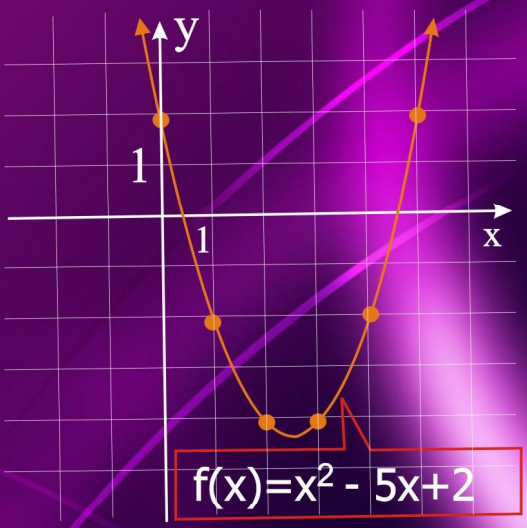
ketabton.com - The Digital Library

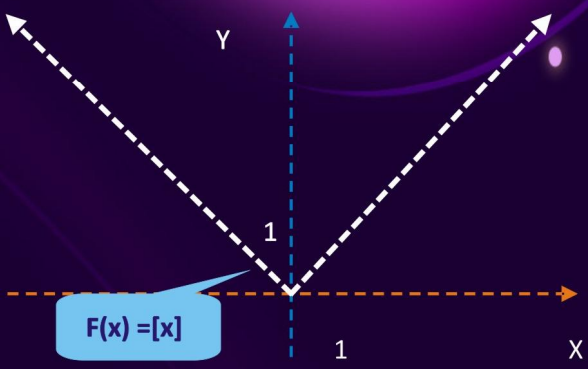
د دې کتاب دليکنې په جريان کې دښوونکو د روزنې رياست له همکارۍ او پاملرنې څخه مننه کوم.

ادعا نه شي کيدلی جې دا کتاب به دکمال تر حده ليکل شوی وي. موږ په دې لړ کې دمحترمو علاقمندانو نظريو اوپيشنهادونو ته اړيو.

په دي لړ کې د عمومې تعليماتو د نصاب غړی محترم عبيدالله صافي له فرهنګي همکاري څخه مننه کوم.

ketabton.com - The Digital Library





لومړی څپرکی

Functions تابع ګانې

ketabton.com - The Digital Library

تابع ګاني

د تابع مفهوم د لومړي ځل لپاره په 1696م کال کې دلایپ نیتز له خوا د ریاضي مفهومونو د تعمیم ترڅنګ عنوان شو. پوهانو بر نولي په 1718م کال دمتحولینو په تحلیل سره د تابع اصطلاح وکارولە، اویلر (1783 – 1707)م کال دمنحني ګانو د خاصیتونو په مطالعه کې د $f(x)$سمبول ارائه کړ. کلیرو په 1734 م کال کې دتابع له مفهوم څخه کار واخیست، دیریکله (1859–1805) م دیوې تابع اړونده مستقل متحول، مربوط (تړلی) متحول، دتابع دتعریف او قیمتونو ناحیې، طرحه کړي دي. نن ورځ دریاضي عمده بحثونه، لکه لیمیټ، مشتق، انتګرال، تفاضلي معادلې، محاسبوي میتودونه اونور دتابع دتحولاتو او خاصیتونو په اړخ کې څرخیږي. دفزیک قاعدې اوطبیعي حادثې اکثراً دتابع په مرسته توضیح او تشریح کیږي. په دې فصل کې تابع او دهغې عمومي خاصیتونه په لنډ ډول معرفي کیږي.

د عددونو انټرولو نه

که چېرې aاو b دوه حقیقي عدونه وي، داسې چې $a < b$. په دې صورت کې د عددونو انټرول په لاندې ډول تعریف کیږي.

1. **خلاص (باز) انټرول.** دټولو حقیقي عددونو x ست چې د a او b ترمنځ دی له a څخه تر b پورې دخلاص انټرول په نامه یادیږي او هغه په (a,b) سره ښیي یعني

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

2. **تړلی (بسته) انټرول.** دټولو حقیقي عددونو x ست چې د a او b تر منځ دي د a او b په شمول له a څخه تر b پورې دتړلي انټرول په نامه یادیږي اوهغه په $[a,b]$ سره ښودل کیږي یعنی

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$$

ketabton.com - The Digital Library

په همدې ډول نیمه خلاص او نیمه تړلي انټرولونه په لاندې ډول تعریف کیږي.

3. د ښي خوا نیمه تړلي (دچپ خوا نیمه خلاص) انټرول

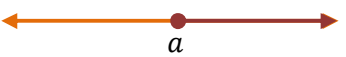
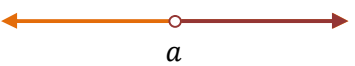
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$$

4. د چپ خوا نیمه تړلي (دښي خوا نیمه خلاص) انټرول

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$$

په دې ټولو حالتونو کې د a او b عددونه دانټرولونو انجامونه بلل کیږي. که چېرې د یو انټرول په انجامونو کې ∞ یا $-\infty$ واقع وي، نو اړونده انجام خلاص وي، په بل عبارت

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad , \quad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$$
$$(a \ , \ \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad , \quad [a \ , \ \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$$
$$(-\infty \ , \ \infty) = \{ x \in \mathbb{R} \ : -\infty \ < \ x \ < \ \infty \} \ = \ \mathbb{R}$$

$a \le x \le b$	$[a,b]$	
$a \le x$	$[a,\infty)$	
$x \le b$	$(-\infty,b]$	
$a < x < b$	(a,b)	
$a < x$	(a,∞)	
$x < b$	$(-\infty,b)$	
$a < x \le b$	$(a,b]$	
$a \le x < b$	$[a,b)$	
د ټولو حقیقي عددونو	$(-\infty,\infty)$	

ketabton.com - The Digital Library

د تابع تعریف

د f تابع د X له سټ څخه، Y سټ ته یوه رابطه ده چې د X هر عنصر x یوازې او یوازې د Y دیو عنصر $y=f(x)$ سره تړي. بناپر دې f د (x,y) د مرتبو جوړو له سټ څخه عبارت دی چې په هغه کې د x هره مرکبه تکرار نه شي.

د f تابع د X له سټ څخه د Y په سټ کې چې د $y=f(x)$ معادلې په وسیله سره تړل کیږي او د

$$f: X \to Y$$
$$x \to y = f(x)$$

په شکل لیکل کیږی. دلته x مستقل متحول او y مربوط متحول بلل کیږي.
دیا دوني وړده چې په دې کتاب کې د X او Y سټونه د حقیقي عددونو فرعي سټونه په پام کې نیول شوي دي.

د تعریف ناحیه او د تابع قیمتونه

که چېرې f د X له سټ څخه د Y په سټ کې یوه تابع وي. یعنې

$$y=f(x)\ ,\quad x\in X\ ,\quad y\in Y$$

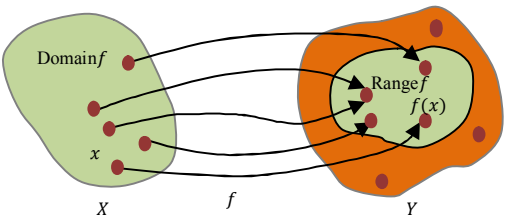
د ټولو عناصرو x سټ چې د $y=f(x)$ په رابطه کې قبلولو وړ دي د f دتعریف ناحیه $[domain(f)]$ او د y دعناصرو سټ چې له نوموړي رابطې څخه په لاس راځي د f د تصویرونو سټ $[range(f)]$ په نوم یادیږي. داسټونه عبارت دي له

$$D_f=\{x\in X: y=f(x), y\in Y\}$$
$$R_f=\{y\in Y: y=f(x), x\in X\}$$

دلته د Y سټ د f دقیمتونو ناحیه $[codomain(f)]$ بلل کیږي. څرګنده ده چې

$$range(f)\subseteq codomain(f)$$

ketabton.com - The Digital Library



که چېرې دیوې تابع دمعرفي په وخت کې د هغې دتعریف ناحیه نه وي معرفی شوي. نو دهغې د تعریف ناحیه دهغو عددونو وسیع سېټ دی، کوم چې په تابع کې دقبلیدو وړ وي. دغې ناحیې ته د تعریف طبیعي ناحیه هم وایي.

په مسالوکې د اړتیا له مخې ممکنه ده، دیوې تابع د تعریف ناحیه، د تعریف له طبیعي ناحیې څخه محدوده مطرح شي.

کیدلې شي تابع په ډول ډول شکلونو، لکه: د یوې رابطې په توګه، د عددونو دمرتبو جوړو دسېټ، جدول، فورمول، دوه مجهوله معادلې او یا ګراف په شکل وړاندې شي.

1 مثال

الف. د f تابع په جدولي حالت کې په لاندې ډول ورکړل شوي ده.

د تعریف ناحیه	دقیمتونو سېټ
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

لیدل کیږي چې د تابع د تعریف ناحیه او قیمتونو ناحیه په ترتیب سره عبارت دي له

$$D_f=\{-2,-1,0,1,2\} \quad , \quad R_f=\{-8,-1,0,1,8\}$$

ب. دا تابع د مرتبو جوړو د رابطې په حیث لاندې شکل لري.

ketabton.com - The Digital Library

$$f=\{(-2,-8),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,8)\}$$

ج. پورتنی تابع دفورمول په توګه عبارت ده له

$$f:D_f \to R_f$$
$$x \to y=f(x)=x^3$$

په داسې حالت کې چې D_f او R_f پخوا مشخص شوي دي.

2 مثال

د R_1 او R_2 رابطې په لاندې ډول تعریف شویدي.

$$R_1=\{(1,2),(-1,3),(0,0),(6,3)\}$$

$$R_2=\{(4,6),(-3,0),(4,-5),(2,-1)\}$$

لیدل کیږی چې د R_1 رابطه یوه تابع ده، ولې R_2 ته تابع نشو ویلی، ځکه د 4 عدد پکې تکرار شوی دی.

3 مثال

دلاندې تابع ګانو د تعریف ناحیې او دقیمتونو ناحیې معلومې کړئ.

$$f=\{(1,2),(3,4),(5,8),(6,4)\} \quad , \quad g=\{(2,0),(3,0),(4,0),(5,0)\}$$

حل

$$D_f=\{1,3,5,6\} \ , \ R_f=\{2,4,8\} \ , \ D_g=\{2,3,4,5\} \ , \ R_g=\{0\}$$

4 مثال

د f , g او h، تابع ګانې دمرتبوجوړو دسټونو په توګه په لاندې ډول درکړل شوي دي.

ketabton.com - The Digital Library

$$f=\{(-2,-8),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,8)\}$$
$$g=\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$$
$$h=\{(0,0),(1,1),(4,2),(9,3),(16,4),(25,5)\}$$

دا تابع ګاني دجدول او فورمول په شکلونو ارایه کړئ، دتعریف ناحیې او دقیمتونو ناحیې یې معلومې کړی.

حل: ددې تابع ګانو جدولي شکلونه عبارت دي له

x	$f(x)$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

x	$g(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

x	$h(x)$
0	0
1	1
4	2
16	4
25	5
9	3

ددوی د تعریف ناحیې او دقیمتونو سټونه عبارت دي له

$$D(f)=\{-2,-1,0,1,2\}\ ,\ R(f)=\{-8,-1,0,1,8\}$$
$$D(g)=\{-2,-1,0,1,2\}\ ,\ R(g)=\{0,1,4\}$$
$$D(h)=\{0,1,4,9,16,25\}\ ,\ R(h)=\{0,1,2,3,4,5\}$$

د تعریف د ناحیو په پام کې نیولو سره نومورې تابع ګانې دفورمول په ذریعه په لاندې شکل ارایه کیږي.

$$f(x)=x^3\quad ,\quad g(x)=x^2\quad ,\quad h(x)=\sqrt{x}$$

د یوې تابع د تعریف د ناحیې او د قیمتونو د سټ ټاکل

که چېرې یوه تابع دیو فورمول په شکل راکړل شوي وي، هغه عددونه دتعریف په ناحیه کې شامل نه دي چې معمولي عملیې پر هغې باندې دتعریف او تطبیق وړ نه وي

ketabton.com - The Digital Library

لکه څرنګه چې ډیوکسر مخرج صفر کیدلی نشي او منفي حقیقي عددونه دجفتو مرتبو حقیقي جذرونه، نه لري اویا منفي عددونه لوګارتم نه لري

5 مثال

$f(x)=\frac{x+4}{2x-6}$ تابع د تعریف ناحیه معلومه کړئ

حل: لیدل کیږي چې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کیږي، نو ځکه 3 د f د تعریف په ناحیه کې شامل نه دي، یعنې

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

6 مثال

د $g(x)=\sqrt{x-5}$ تابع د تعریف ناحیه معلومه کړئ

حل: څرنګه چې دټولو عددونو لپاره کوم چې له 5 څخه کوچنی وي، د $x-5$ افاده منفي قیمت لري او جذر نه لري. نو ځکه $D(g)=[5,\infty)$ د تابع د تعریف ناحیه ده.

7 مثال

$f(x)=\frac{1+x}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ تابع د تعریف ناحیه وټاکئ.

حل: څرګنده ده چې منفي عددونه د 0، 2 او 3 په شمول په دې تابع کې د قبلیدو وړ نه دي. نو

$$D_f=(0,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$$

د تابع ګراف

د دمستوي په قایمو مختصاتو کې د (x,y) نقطو سېټ چې د $y=f(x)$ رابطه صدق کوي، د f تابع له ګراف څخه عبارت دی. په بل عبارت د f تابع ګراف هغه

ketabton.com - The Digital Library

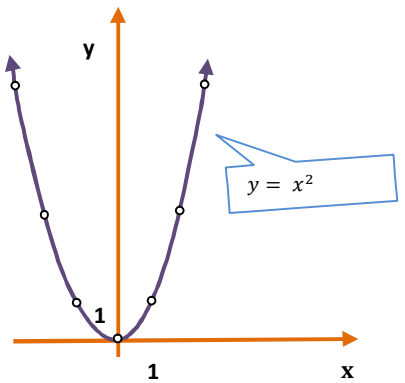
منحني دی چې د $y = f(x)$ معادلې په وسیله په لاس راځي، یعنې

$$G(f)=\{(x,y): y=f(x), x\in D(f)\}$$

8 مثال

$y = x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

x	x^2	y
-3	$(-3)^2$	9
-2	$(-2)^2$	4
-1	$(-1)^2$	1
0	$(0)^2$	0
1	$(1)^2$	1
2	$(2)^2$	4
3	$(3)^2$	9



د ګراف له مخې د یوې تابع تشخیص

که چېرې د y له محور سره هر موازي مستقیم خط دتابع منحني یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نوموړي معادله یوه تابع ده.

9 مثال

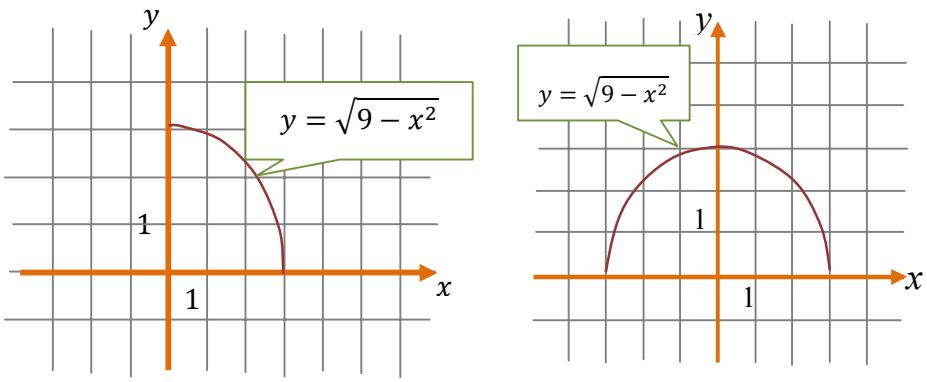
ایا $x^2 + y^2 = 9$ یوه تابع ده؟

حل: ددې معادلې اړونده منحني یوه دایره ده چې مرکز یې دمختصاتو په مبدا کې او شعاع یې $r = 3$ ده. هر هغه مستقیم چې د x محور په $(-3,3)$ انټرول کې قطع اود y د محور سره موازي وي، دا منحني په دوو نقطو کې قطع کوي، داپه دې

ketabton.com - The Digital Library

مفهوم دی چې په دې انټرول کې دهر x لپاره د y دوه قیمتونه رابطه پیداکوي، نو دا معادله یوه تابع نه ده.

مګر د $\sqrt{9-x^2}$ منحني یوه نیمه دایره ده. لکه څرنګه چې لیدل کیږي هر مستقیم خط چې د y د محور سره موازي وي، دامنحني د یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کولی نشي. بنا پردې په معادله کې y د x په متحول یوه تابع ده.



د دوو تابع ګانو تساوي

دوې تابع ګانې f او g سره مساوي بلل کیږي که چېرې او یوازې که چېرې د هغوی د تعریف ناحیې سره مساوی وي$D(f)=D(g)$، د هغوی دقیمتونو ناحیې سره مساوي وي او د تعریف ناحیې د x د هر قیمت لپاره $f(x)=g(x)$ وي.

10 مثال

ایا د $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$ تابع ګانې سره مساوي دي؟

حل: په څرګنده لیدل کیږي چې$D(f)=\mathbb{R}=D(g)$ له بلې خوا

$$g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}=x^2-1=f(x),\ \forall x\in D(g)$$

بناپردې f او g یو له بله سره مساوي دي $f=g$

ketabton.com - The Digital Library

11 مثال

ایا د $f(x)=x+1$ او $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ تابع ګاني سره مساوي دي؟

حل: لیدل کیږي چې $D(f)=\mathbb{R}$ او $D(g)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ یعني ددې دواړو تابع ګانو د تعریف ناحیې سره مساوي نه دي، نو دا تابع ګاني نه دي سره مساوي. په داسې حال کې

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1=f(x),\ \forall x\in D(g)$$

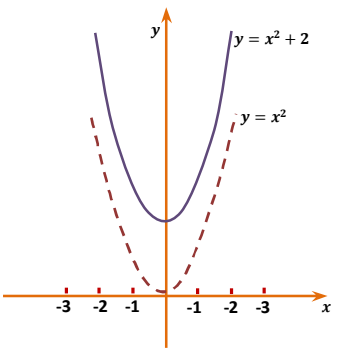
د تابع د ګراف انتقال

که چېرې $f(x)$ یوه تابع او c یو حقیقي عدد وي. په دې صورت کې

1. د $y=f(x)+c$ تابع ګراف د $y=f(x)$ تابع د ګراف عمودي انتقال دی (که $c>0$ وي پورته خواته او که $c<0$ ويښکته خواته)
2. د $y=f(x+c)$ تابع ګراف له $y=f(x)$ افقي انتقال څخه عبارت دی ($c>0$ چپ خواته او $c<0$ ښي خواته)

12 مثال

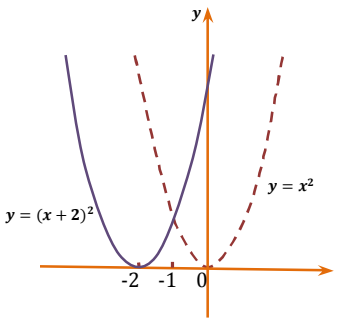
د $y=x^2+2$ ګراف د $y=x^2$ عمودي انتقال دی



13 مثال

$y=(x+2)^2$ د $y=x^2$ افقي انتقال دی

ketabton.com - The Digital Library



په تابع ګانو کې الجبري عملیې

که چېرې f او g دوې تابع ګانې وي، د هغوی مجموعه، تفاضل، د ضرب او تقسیم حاصل په ترتیب سره عبارت دي له

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad , \quad D(f+g)=D(f)\cap D(g)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad , \quad D(f-g)=D(f)\cap D(g)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x) \quad , \quad D(fg)=D(f)\cap D(g)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad D\left(\frac{f}{g}\right)=D(f)\cap D(g)\setminus\{x\in D(g):g(x)=0\}$$

14 مثال

د $f(x)=\frac{1}{x-2}$ او $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ تابع ګاني په پام کې ونیسئ، نو $f+g$، $f-g$، fg او $\frac{f}{g}$ پیدا او هم د هغوي د تعریف ناحیې په ګوته کړئ.

حل:

$$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}\setminus\{2\}$$
$$\sqrt{x-1}>0\Rightarrow x-1>0\Rightarrow x>1\Rightarrow D(g)=(1,\infty)$$
$$D(f)\cap D(g)=(1,2)\cup(2,\infty)$$

ketabton.com - The Digital Library

په دې ترتیب $f+g$ ، $f-g$ ، fg او $\left(\frac{f}{g}\right)$ تابع ګانو دتعریف ناحیې عبارت دي له $(1,2)\cup(2,\infty)$ او

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-1}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$$

په تابع ګانو کې د الجبري عملیو خاصیتونه

د f,g او h تابع ګانو او a,b,c او d عددونو لپاره پورتني الجبري عملیې دا لاندې خاصیتونه صدق کوي.

$$f+g=g+f \quad (1)$$

$$fg=gf \quad (2)$$

$$f+(g+h)=(f+g)+h \quad (3)$$

$$f(gh)=(fg)h \quad (4)$$

د صفر تابع $\theta(x)=0$ او عینیت تابع $I(x)=1$ په پام کې نیولوسره لرو چې

$$f+\theta=f \quad (5)$$

$$f\cdot I=f \quad (6)$$

$$f(g+h)=fg+fh \quad (7)$$

همدارنګه د a,b,c او d حقیقي عددونو او fاو g تابع ګانو لپاره په اسانۍ سره ښودلی شو، چې

$$a(f+g)=af+ag \quad (8)$$

$$(a+b)f=af+bf \quad (9)$$

ketabton.com - The Digital Library

$$a(fg)=(af)g \quad (10)$$
$$(cd)f=c(df)$$

15 مثال

که چېرې $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+1$ وی، نو

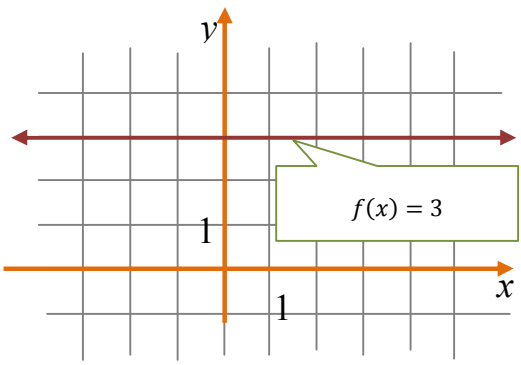
$$(a)\quad 4(f+g)(x)=4f(x)+4g(x)$$
$$=4(2x-1)+4(x^2+1)=4x^2+8x$$
$$(b)\quad 5(fg)(x)=[5f(x)]g(x)=[5(2x-1)](x^2+1)$$
$$=10x^3-5x^2+10x-5$$

د ځېنو تابع ګانو مثالونه

دلته له $\mathbb{R}$ څخه $\mathbb{R}$ ته ځېنې تابع ګاني معرفي کيږي.

1. ثابته تابع $f(x)=a$

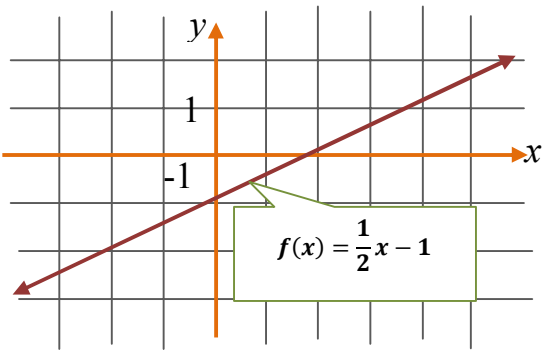
ددې تابع د تعريف ناحيه حقيقي عددونه او د تصويرونو سېټ يې $R_f=\{a\}$ دی.
د ثابتې تابع ګراف د x له محور سره موازي يو مستقيم خط دی.



2. خطي تابع $f(x)=mx+b$

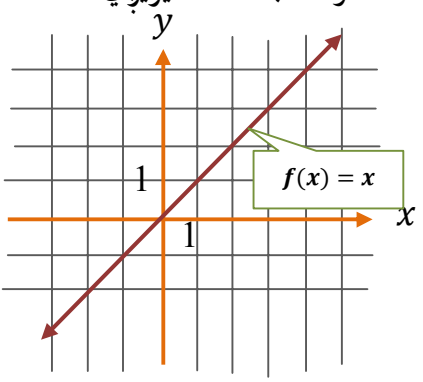
د دې تابع دتعريف ناحيه او د تصويرونو سېټ يې د حقيقي عددونو سېټ په پام کې نيول شوي دي. د مثال په توګه د $f(x)=\frac{1}{2}x-1$ تابع ګراف دا لاندې شکل لري.

ketabton.com - The Digital Library



3. د عینیت تابع $f(x)=x$

دا تابع خطي ده او ګراف يې هغه مستقيم خط دی چې د x له محور سره 45^o زاویه جوړوي او د مختصاتو له مبدا څخه تیریږي.



4. دوهمه درجه تابع $f(x)=ax^2+b(x)+c$

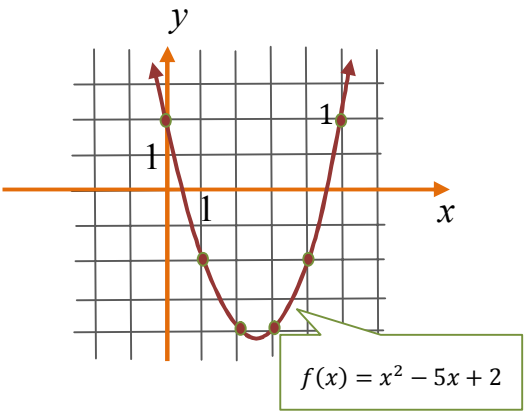
ددې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سېټ او د a ضریب په پام کې نیولو سره يې د تصویرونو سېټ په مشروطه توګه په لاندې ډول ټاکل کیږي.

$$a>0 \Rightarrow R(f)=\left\{y\in\mathbb{R}: y\geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right\}$$

$$a<0 \Rightarrow R(f)=\left\{y\in\mathbb{R}: y\leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right\}$$

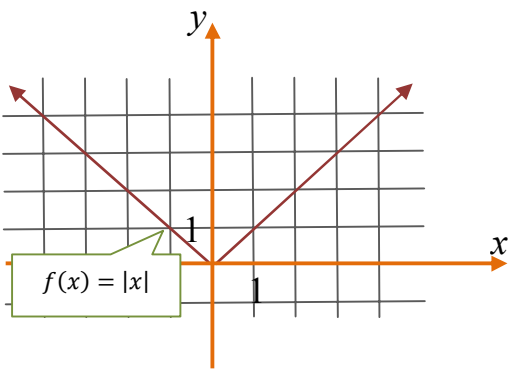
ketabton.com - The Digital Library

د نمونې په توګه د $f(x)=x^2-5x+2$ تابع دګراف شکل په لاندې ډول دی.



5. د $f(x)=|x|$ تابع

ددې تابع دقیمتونو سېټ منفي قیمتونه نه شي لرلی.

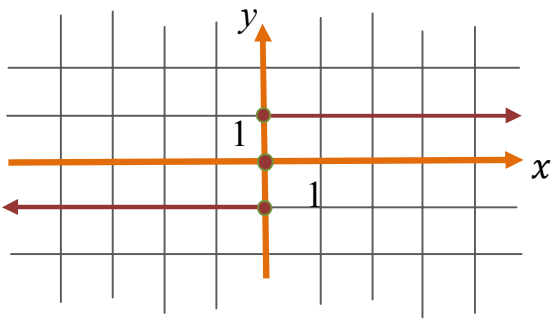


6. د اشارې تابع

$$f(x)=sign(x)=\begin{cases}1 & \Leftarrow \quad x>0\\ 0 & \Leftarrow \quad x=0\\ -1 & \Leftarrow \quad x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & \Leftarrow \quad x\neq 0\\ 0 & \Leftarrow \quad x=0\end{cases}$$

د اشارې تابع د تصویرونو سېټ $\{-1,0,1\}$ دی

ketabton.com - The Digital Library



7. زینه يې تابع (ترټولو لوی تام عدد تابع)

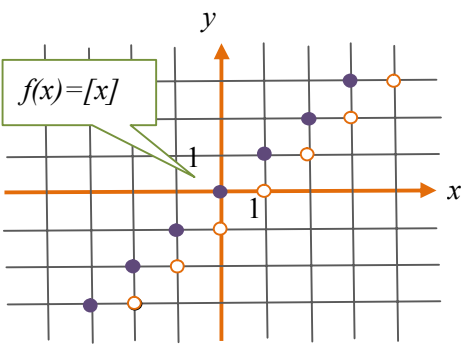
د هغې تابع څخه عبارت دی چې هر عدد x له خپل ړومبنی تام عدد سره مر بوط کوي کوم چې له x څخه کوچنی یا له هغې سره مساوی دی، اوهغه د $[x]$ په سمبول سره ښيي. څرنګه چې د هر حقيقي عدد x لپاره يوتام عدد n موجود دی، داسې چې $n \le x < n+1$ وي. بناپردې نومورې تابع عبارت ده له

$$f(x) = [x] = n \quad , \quad n \le x < n+1$$

د نمونې په توګه

$$f(-2,98) = [-2,98] = -3 \quad , \quad f(-0,6) = [-0,6] = -1$$

$$f(0,79) = [0,79] = 0 \quad , \quad f(3,8897) = [3,8897] = 3$$

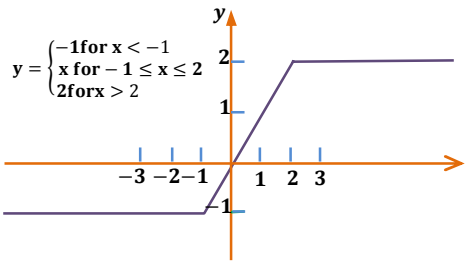


ketabton.com - The Digital Library

8. څوفورموله تابع

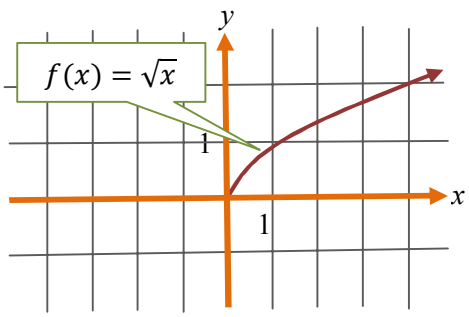
داډول تابع عبارت له هغې تابع څخه ده چې په مختلفو انټرولونو کې دځوتابع ګانوله پیوند څخه په لاس راځي. او نمونه یې په لاندې ډول ده.

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \Leftarrow & x<-1 \\ x & \Leftarrow & -1\le x\le 2 \\ 2 & \Leftarrow & x>2 \end{cases}$$



9. د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع

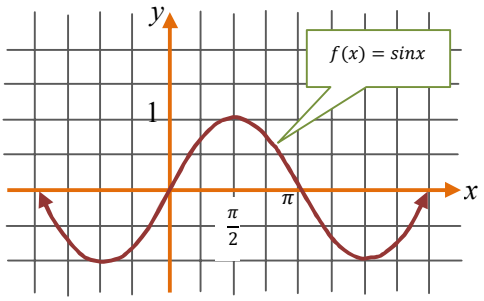
منفي عددونه ددې تابع د تعریف په ناحیه کې نه دي شامل داسې، چې $D(f)=[0,\infty)$



10. د $f(x)=sinx$ تابع

ددې تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه دي او دقیمتونو سېټ یې $[-1,1]$ دي. دا تابع دمثلثاتي تابع ګانو له جملې څخه یوه تابع ده.

ketabton.com - The Digital Library

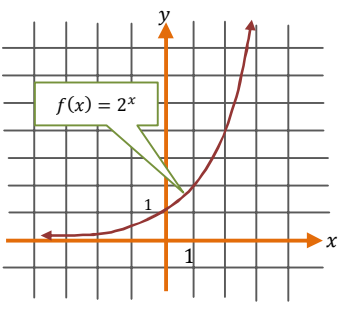


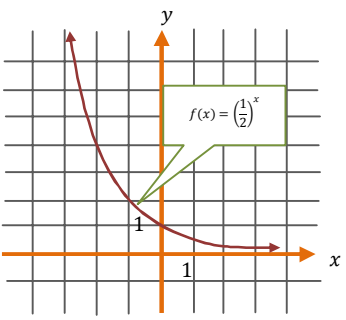
11. طاقتنما تابع $f(x)=a^x$

دا تابع د $a>0$ او $a\neq 1$ سره له $\mathbb{R}$ څخه و $\mathbb{R}$ ته یو انجکتیف تابع ده. خو سورجکتیف نه ده. په داسې حال کې

$$D(f)=\mathbb{R} \quad , \quad R(f)=(0,\infty)$$

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع ګانو ګرافونه دنمونې په توګه ښودل شوي دي.





جفتې او طاقې تابعګانې

(1) یوه تابع f دجفتې تابع په نامه یادیږي که چېرې له $D(f)$ څخه دهرx لپاره د x – عدد هم په $D(f)$ پورې تړلی وي او د $f(-x)=f(x)$شرط صدق کوي.

(2) د f تابع د طاقې تابع په نوم یادیږي که چېرې له $D(f)$ څخه هرعدد x لپاره د x – عدد هم په $D(f)$ پورې تړلي وي او د $f(-x)=-f(x)$ شرط صدق کړي.

ketabton.com - The Digital Library

باید یادونه وشي چې د جفتې تابع منحني نظر y محورته متناظر وي.

16مثال

الف. $f(x)=3x^2$ یوه جفته تابع ده، ځکه چې $D(f)=(-\infty,\infty)$ وي

$$f(-x)=3(-x)^2=3x^2=f(x)$$

ب. $g(x)=x^3+9x$ تابع طاقه ده، ځکه $D(g)=(-\infty,\infty)$

$$g(-x)=(-x)^3+9(-x)=-(x^3+9x)=-g(x)$$

17مثال

د $f(x)=|x|$ تابع جفته او د $v(x)=\frac{1}{x}$ تابع طاقه ده، ځکه چې

$$u(-x)=|-x|=|x|=u(x)$$

$$v(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-v(x)$$

18مثال

که چېرې د f او g تابع ګاني طاقي وي، نو د fg تابع جفته ده یا طاقه

حل:

$$(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=(-f(x))(-g(x))=f(x)g(x)=(fg)(x)$$

نو د fg تابع جفته ده.

19مثال

وښی چې دجفتې تابع ګراف نظر عمودي محور او د طاقې تابع ګراف نظر مبداته متناظر دی.

حل: که چېرې د f تابع جفته اود g تابع طاقه وي $G(f)$ او $G(g)$ په ترتیب سره دهغوي ګرافونه وي. په دې صورت کې

$$(x,f(x))\in G(f)\Rightarrow(-x,f(x))=(-x,f(-x))\in G(f)$$

یعنې د f تابع جفته ده په همدې ډول

ketabton.com - The Digital Library

$$(x,g(x))\in G(g)\Rightarrow(-x,-g(x))=(-x,g(-x))\in G(f)$$

نو د g تابع، طاقه تابع ده.

یادښت

هغه پولینومی تابع ګانې چې دټولو حدونو درجه یې جفته وي، جفتی تابع ګانې دي، په همدې ډول هغه پولینومي تابع ګانې چې دټولو حدونو درجې یې طاقې وي، طاقې تابع ګانې دي. ممکنه ده یو تابع نه طاقه وي او نه جفته. د مثال په توګه $f(x)=5x^4-x^3$

د تابعګانو تزاید او تناقص

1. په یوه انټرول کې د f تابع دقیقا متزایده بلل کیږي که چېرې په دې انټرول کې د x_1 او x_2 لپاره له $x_1<x_2$ خخه د $f(x_1)<f(x_2)$ شرط په لاس راشي.

2. یوه تابع f په یوه انټرول کې دقیقآ متناقصه بلل کیږي که چېرې د ټولو x_1 او x_2 لپاره له $x_1<x_2$ خخه د $f(x_1)>f(x_2)$ شرط په لاس راشي.

20مثال

الف. د $f(x)=2x+3$ تابع متزایده ده ځکه

$$x_1<x_2\Rightarrow 2x_1<2x_2\Rightarrow 2x_1+3<2x_2+3\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

ب. د $g(x)=-2x+1$ تابع متناقصه ده ځکه

$$x_1>x_2\Rightarrow -2x_1<-2x_2\Rightarrow -2x_1+1<-2x_2+1\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

انجکتیف تابع (one – one function)

یوه تابع f دانجکتیف تابع په نامه یادیږي، که چېرې د ټولو x او y لپاره له $f(x)=f(y)$ خخه د $x=y$ تساوي په لاس راشي یعنې

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

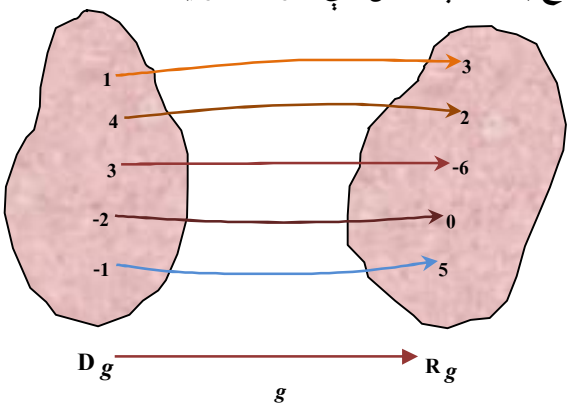
اویا

ketabton.com - The Digital Library

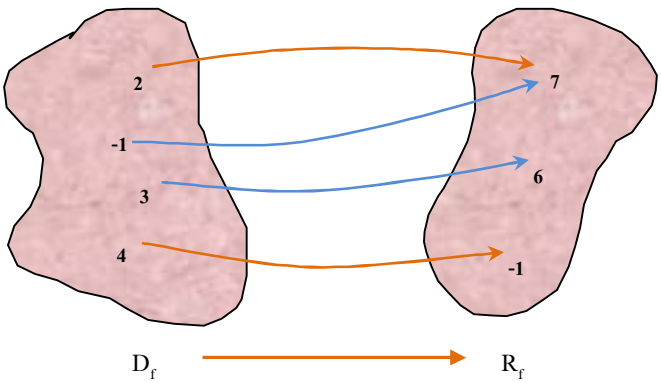
$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

21 مثال

د g ، یوــ یو، تابع په لاندې شکل کې ښودل شوي ده.



او دهغې تابع مثال چې یوــ یو، نه ده، په ورپسې شکل کې ښودل شوی دي.



22مثال

د $f(x) = 2x^3 + 1$ تابع، یوــ یو تابع ده، خو $g(x) = x^2 + 8$ ، یو په یو، تابع نه ده.

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x^3 + 1 = 2y^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

$$g(x) = g(y) \Rightarrow x^2 + 8 = y^2 + 8 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

ketabton.com - The Digital Library

د مثال په توګه

$$g(2)=12=g(-2)$$

1. که چېرې یوه تابع،یوـــ یو، وي، نو هر مستقیم خط چې له x محور سره موازي وي، ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کوي.
2. هغه تابع ګانې چې دقیقآ متزایدې او یا دقیقآ متناقصې وي، یوـــ یو، هم وي.

سورجکتیف (Onto function)

هغه تابع چې دقیمتونو ناحیه یې دقیمتونو له سېټ سره مساوي وي، سورجکتیف بلل کیږي، په بل عبارت د f تابع سورجکتیف ده که چېرې

$$range(f)=Codomain(f)$$

د تابع ګانو ترکیب

د f او g تابع ګانو ترکیب، که چېرې تعریف شوي وي، عبارت دي له

$$(f\circ g)(x) \quad = \quad f\left(g(x)\right) \quad , \quad (g\circ f)(x) \quad = \quad g\left(f(x)\right)$$

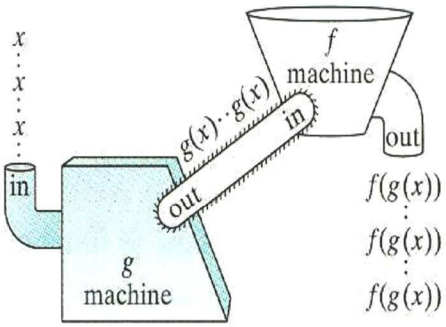
په داسې حال کې چې دتعریف ناحیې یې عبارت دي له

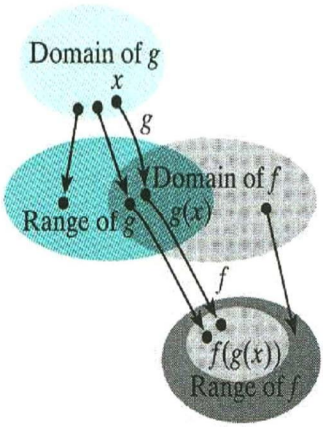
$$D(f\circ g)=\{x\in D(g): g(x)\in D(f)\}$$
$$D(g\circ f)=\{x\in D(f): f(x)\in D(g)\}$$

د fog او gof تابع ګاني، دمرکبو تابع ګانو (تابع تابع) په نامه یادیږي.

$(g\circ f)(x)$تابع د تعریف وړ ده که چېرې $R(f)\cap D(g)\neq\phi$ وي. په همدې ترتیب $(f\circ g)(x)$ تابع تعریف کیدلی شي، که چېرې $R(g)\cap D(f)\neq\phi$ وي.

ketabton.com - The Digital Library





23مثال

د $f(x)=x^2$ او $g(x)=\sqrt{1+x}$ تابع ګاني درکړل شوی دي، د $(f\circ g)(x)$ او $(g\circ f)(x)$ تابع ګاني وليکئ.

حل: خرنګه چې

$$D(f)=\mathbb{R} \text{ او } D(g)=[-1,\infty)\ ,\ R(f)=[0,\infty) \text{ او } R(g)=[0,\infty)$$

بنا پردې $D(f)\cap R(g)=[-1,\infty)\neq\phi$ او $D(g)\cap R(f)=[0,\infty)\neq\phi$ دي او $(f\circ g)(x)$ او $(g\circ f)(x)$ تابع ګاني دتعريف ورډ دي، او

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\sqrt{1+f(x)}=\sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x)=\sqrt{1+x^2}$$

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=[g(x)]^2=[\sqrt{1+x}]^2=1+x \Rightarrow (f\circ g)(x)=1+x$$

24مثال

د $f(x)=x^2+1$ او $g(x)=2x$ تابع ګانو لپاره fof, gof, fog او gog، بې له دې چې د تعريف ناحيو ته پاملرنه وکړئ وليکئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^2+1=(2x)^2+1=4x^2+1$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2f(x)=2(x^2+1)=2x^2+2$$
$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=2g(x)=2(2x)=4x$$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=(f(x))^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$
$$(f\circ g)(3)=4\cdot 3^2+1=37$$

$$(g\circ f)(2)=2\cdot 2^2+2=10$$
$$(f\circ f)(0)=0^4+2\cdot 0^2+2=2$$
$$(g\circ g)(8)=4\cdot 8=32$$

د ترکیب دعملیې خاصیتونه

دتابع ګانو د ترکیب په عملیه کې تبادلوی قانون همیشه نه صدق کیږي، مګر اتحادي قانون همیشه صدق کوي. یعنې د دریو تابع ګانو g,f او h لپاره د $(fog)oh=fo(goh)$ تساوي که چېرې تعریف شوي وي، درسته ده، په داسې حال کې چې fog او gof تساوي حتمي نه ده.

25 مثال

$f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=4x-1$ تابع ګانې نظر کې نیسو او fog او $D(fog)$ معلوم کړئ.

حل: لیدل کیږي چې $D(f)=[0,\infty)$ او $D(g)=\mathbb{R}$ بناپردي

$$D(f\circ g)=\{x\in D(g):g(x)\in D(f)\}=\{x\in\mathbb{R}:4x-1\in[0,\infty)\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}:4x-1\geq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}:x\geq\frac{1}{4}\right\}=\left[\frac{1}{4},\infty\right)$$
$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{4x-1}$$

ketabton.com - The Digital Library

26مثال

که $f(x)=\frac{x}{x+2}$ او $g(x)=\frac{1}{x-1}$ وی نو د fog او gof تابع ګاني دهغوی د تعریف له ناحیو سره په لاس راوړئ

حل:

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2\} \quad , \quad D(g)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$\Rightarrow D(f\circ g)=\{x\in D(g): g(x)\in D(f)\}$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}:,\frac{1}{x-1}\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 1, x\neq\frac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+2}=\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}+2}=\frac{1}{2x-1}$$

$$D(g\circ f)=\{x\in D(f): f(x)\in D(g)\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq -2, \frac{x}{x+2}\neq 1\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{f(x)-1}=\frac{1}{\frac{x}{x+2}-1}=-\frac{x+2}{2}$$

27 مثال

$f(x)=3x-1$ او $g(x)=\frac{x+1}{3}$ دوو تابع ګانو لپاره لرو، چې

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3g(x)-1=3.\frac{x+1}{3}-1=x+1-1=x$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=x=I(x)$$

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\frac{f(x)+1}{3}=\frac{3x-1+1}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

لهذا

ketabton.com - The Digital Library

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = x = I(x)$$

قضیه

1. ددوو جفتو تابع ګانو مجموعه او یا تفاضل، یوه جفته تابع ده.
2. دیوې طاقې او یوې جفتې تابع دضرب حاصل، یوه طاقه تابع ده.
3. د دوو طاقو تابع ګانو ترکیب یوه طاقه تابع ده.
4. دیوې جفتې اویوې طاقې تابع ترکیب یوه جفته تابع ده.

ثبوت

1. که f او g جفتې وي

$$(f \pm g)(-x) = f(-x) \pm g(-x) = f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x)$$

نو $f \pm g$ جفته تابع د ه.

2. که f جفته او g طاقه تابع وي، نو

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)\big(-g(x)\big) = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$$

نو $f \cdot g$ طاقه ده.

3. که f او g دواړه طاقې وې نو

$$(f \circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = -f\big(g(x)\big) = -(f \circ g)(x)$$

په دې ترتیب fog طاقه تابع ده.

4. که چېرې f جفته او g طاقه وي، نو

$$(f \circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x)$$

$$(g \circ f)(-x) = g\big(f(-x)\big) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$

fog او gof جفتې تابع ګانې دي.

معکوسه تابع

د f او g تابع ګانې یوه د بلې معکوسې بلل کیږي که چېرې دالاندې دوه شرطونه صدق کړي

ketabton.com - The Digital Library

$$a.\quad \forall x \in D_g \quad : \quad (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = x$$

$$b.\quad \forall x \in D_f \quad : \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = x$$

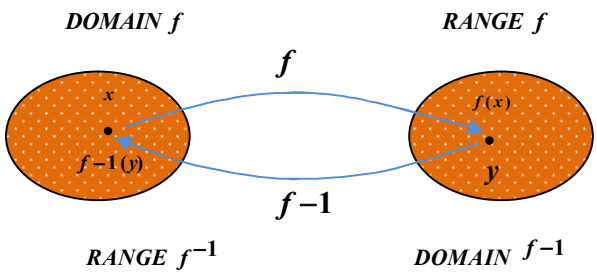
او په معموله توګه ليکي چې $g^{-1} := f$ او $f^{-1} := g$

خرګنده ده چې

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

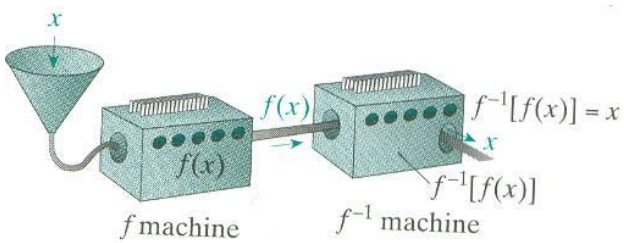
بناپردي

$$D(f) = R\left(f^{-1}\right) \quad , \quad D\left(f^{-1}\right) = R(f)$$



مثال 28

د $f(x) = 2x + 3$ او $g(x) = \frac{x-3}{2}$ تابع ګاني يو دبلې سره معکوسې دي.



د معکوسې تابع پيداکول

هرډول تابع معکوسه تابع نه لري او که چېرې يوه تابع معکوسه تابع ولري، نو لازمه او کافي ده چې هغه تابع يوــ يو(بايجکتيف) وي. ديوې يوــ يو تابع f معکوسه تابع په لاندې رابطو کې ديوې رابطې په مرسته په لاس راځي.

ketabton.com - The Digital Library

$$f\left(f^{-1}(y)\right)=y \quad , \quad f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$

$$y=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x=f^{-1}(y)$$

29مثال

د $f(x)=x^3-1$ معکوسه تابع پیداکړئ.

حل: که f^{-1} د f تابع معکوسه وي، نو

$$\left(f\,o\,f^{-1}\right)(x)=x \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Leftrightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^3-1=x$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^3=x+1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

30مثال

د $g(x)=x^2$ تابع د $D_g=\{x\epsilon\mathbb{R}/x>0\}$ معکوسه تابع لري. g^{-1} په لاس راوړو.

$$g\left(g^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow \left(g^{-1}(x)\right)^2=x \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

31مثال

د $h(x)=\frac{1}{x}$ تابع معکوسه تابع پیداکړئ.

$$\left(hoh^{-1}\right)(x)=x \Rightarrow h\left[h^{-1}(x)\right]=x \Rightarrow \frac{1}{h^{-1}(x)}=x \Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{1}{x}$$

لیدل کیږي چې دلته h او h^{-1} یوه له بلې سره مساوي دي.

یادښت

د $y=f(x)$ تابع معکوسه یعنې د $f^{-1}(x)$ تابع که چېرې موجود وی په څرګنده ډول له $f(y)=x$ رابطې څخه پیداکولی شو.

ketabton.com - The Digital Library

32 مثال

د $f(x) = 2x^3 + 4$ تابع معکوسه تابع په لاندې ډول په لاس راځي

$$f(y)=x \Rightarrow 2y^3+4=x \Rightarrow 2y^3=x-4 \Rightarrow y^3=\frac{x-4}{2}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{x-4}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-4}{2}}.$$

33مثال

د $g(x) = \frac{9}{5}x + 32$ تابع معکوسه تابع په لاس راوړو.

$$y=\frac{5}{9}(x-32) \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32).$$

34مثال

د $f(x) = x^2 - 8x + 12$ تابع معکوسه تابع د تعریف دناحیې په مناسب محدودیت سره په لاندې ډول پیداکیږي.

$$f(y)=x \Rightarrow y^2-8y+12=x \Rightarrow y^2-8y+12-x=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-a(c-x)}}{a}=4 \pm \sqrt{16-(12-x)}=4 \pm \sqrt{4+x}$$

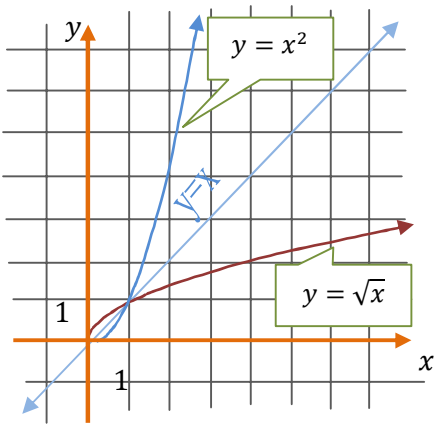
لهذا $f^{-1}(x)=4+\sqrt{4+x}$, $x \geq -4$

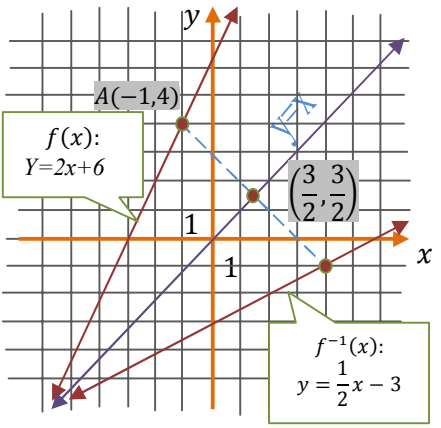
اویا $f^{-1}(x)=4-\sqrt{4+x}$, $x \geq -4$

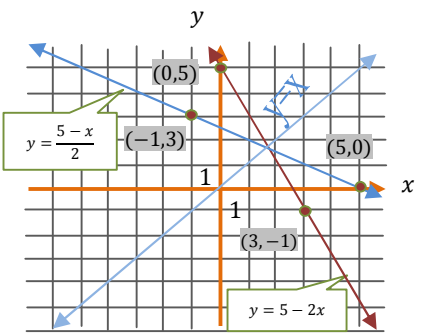
د معکوسې تابع ګراف

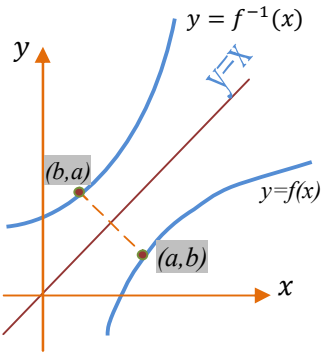
هغه تابع ګاني چې یوه د بلې معکوسې وي، ګرافونه یې نظر $y = x$ مستقیم خط ته متناظر وي. دلته مخکنې نمونې په پام کې نیسو او ګرافونه یې رسم کوو.

ketabton.com - The Digital Library









ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

په لاندې سټونو(ګرافونو) کې کوم یو، یوه تابع راپه ګوته کوي.

1. $A=\{(1,3),(2,5),(1,7)\}$, 2. $B=\{(1,2),(2,5),(3,6),(4,2)\}$

3. $\mathbb{C}=\{(x,y): y=2x+1, x\in\mathbb{R}\}$

4. د $f(x)=4x-3$ تابع چې دتعریف ناحیه یې $D_f=\{-3,-2,0,1,3\}$ ده، د مرتبو جوړو و په حالت کې دیوې رابطې دګراف په توګه ولیکي.

5. د $f(x)=3x^2+4$ تابع د تعریف ناحیه او دقیمتونو سټ دحقیقي عددونوپه سټ کې معلوم کړئ.

6. د $g(x)=5x^3-1$ تابع په پام کې نیولو سره یو حقیقي عدد x_0 دا ډول پیداکړي چې $g(x_0)=3$ وي.

7. د $f(x)=\sqrt{x+3}$ او $g(x)=\sqrt[8]{4-x^2}$ تابع ګانو دتعریفونو ناحیې او دقیمتونو سټونه معلوم کړئ.

د f او g تابع ګانو تساوي په لاندې مثالونو کې په ګوته کړئ.

8. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$, $g(x)=x+1$

9. $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

10 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{|x|}$

دا لاندې f او h تابع ګانې په پام کې ونیسئ، نو د $f\pm h$ ، fh ، $\dfrac{f}{h}$ ، $f\circ h$ ، $h\circ f$ ، $f\circ f$ او $h\circ h$ تابع ګانې پیداکړئ.

ketabton.com - The Digital Library

11. $f(x)=2x-5$, $h(x)=-4x$
12. $f(x)=\sqrt{2-x}$, $h(x)=\sqrt{2-x}$
13. $f(x)=5x^3-6$, $h(x)=\sqrt[3]{\frac{x+6}{5}}$

په لاندی تابعګانو کې کومې جفتی، کومې طاقې او کومې تابعګاني نه جفتی او نه طاقی دي.

14. $f(x)=7x^6+4x^2-3$, 15. $f(x)=-x^3+x$
16. $f(x)=x^5-x^4$, 17. $f(x)=|x-4|$

18. وښیئ چې $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ، $f(x)=2x+5$ تابع یوه سورجکتیف تابع نه ده.

19. وښیئ چې د $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=x^3+\frac{1}{5}$ تابع یوه سورجکتیف تابع ده.

20. وښیئ چې د $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ ، $f(x)=x^2+2$ تابع کومه چې په وسیله تعریف شوي ده یوه سورجکتیف تابع نه ده (دګراف رسم وکاروئ)
وښیئ چې لاندې تابع ګاني انجکتیف دي.

21. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x-8$
22. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-4$
23. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=|x+3|$

24. وښیئ چې د $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=1+\frac{2}{x}$ تابع انجیکتیف ده، اما سور جکتیف نه ده.
وښیئ چې لاندې تابع ګاني په ورکړل شویو انټرولونو کې مونوتون (یونواخت) دي.

25. $f(x)=4x+7$, $(-\infty,\infty)$
26. $f(x)=-3x+9$, $(-\infty,\infty)$
27. $f(x)=|x|+2$, $(0,\infty)$

وښیئ چې لاندې تابع ګاني په ورکړل شویو انټرولونو کې مونوتون (یونواخت) نه دي.

ketabton.com - The Digital Library

28. $f(x)=3x^2+5$, $(-\infty,\infty)$
29. $f(x)=|x+3|$, $(-\infty,\infty)$
30. $f(x)=-x^2+4$, $(-\infty,\infty)$

دلاندې تابع ګانو معکوسې تابع ګانې پیدا کړئ.

31. $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$, 32. $g(x)=\dfrac{2x+4}{x-2}$
33. $h(x)=(x-1)^2-2$, 34. $u(x)=x^3-4$

پولینومي تابع ګانې (پولینومونه)

دا تابع د $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ شکل لري. د $a_0, a_1, \ldots, a_n$ عددونه ددې پولینوم ضریبونه او n دهغې درجه ده، $a_n\neq 0$ ته هادي (لارښود) ضریب وایي.

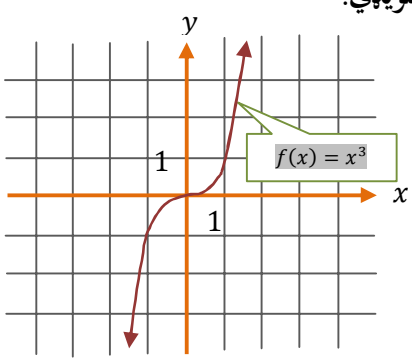
که چېرې n طاق وي، نودپولینومي تابع د قیمتونو ناحیه د حقیقي عددونو سېټ دی.

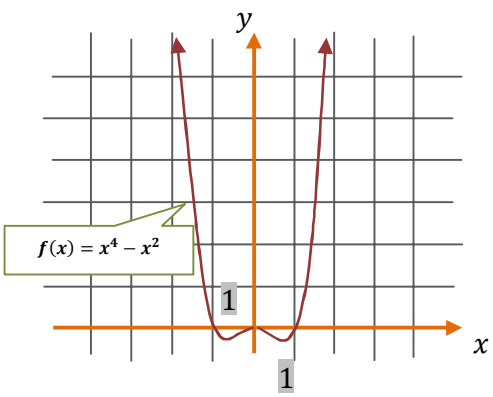
په دې حالت کې تابع سورجکتیف ده، ممکن انجکتیف نه وي.

که چېرې n جفت وي، نو دپولینومي تابع دقیمتونو سیټ دحقیقي عددونو دسېټ یوفرعي سېټ دی، مګر تابع نه سورجکتیف او نه هم انجکتیف ده.

(دپولینومونو په هکله په عمومي ریاضي I کې بحث شویدی، دلته دهغې تکرار لازم نه دي)

په دې لړکې د $f(x)=x^3$ او $f(x)=x^4-x^2$ تابعګانو ګرافونه دنمونې په توګه رسم شویدي.





ketabton.com - The Digital Library

ناطقي تابع ګاني (نسبتي تابع ګاني)

دپولينومي تابع ګانو دجمع حاصل، تفاضل او دضرب حاصل، بيا هم پولينومي تابع ګاني دي. مګر هغه تابع ګاني چې د دوو پولينومونو له تقسيم څخه په لاس راځي، په عمومي توګه د پولينومونو په ډول نه وي، دا تابع ګاني له ناطقو يا نسبتي تابع ګانو څخه عبارت وي. البته پولينومي تابع ګاني دناطقوتابع ګانو خاص حالت دی چې د مخه مو هغې ته اشاره کړې ده. دلته موږ ددې تابع هغه حالتونه تر مطالعې لاندې نيسو چې پولينومي شکل نه لري.

که چېرې $P(x)$او $Q(x)$ دوې پولينومي تابع ګاني وي. نو د

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad Q(x)\neq 0$$

تابع د ناطقي يانسبتي تابع په نوم يادېږي.

په طبعي توګه د دا ډول تابع ګانو د تعريف ناحيې حقيقي عددونه دي، کوم چې مخرج نه صفر کوي.

1 مثال

د $y=\frac{1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

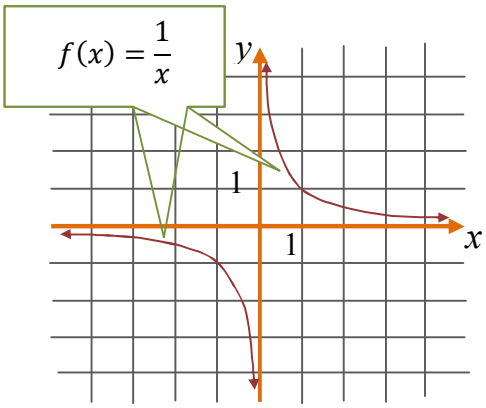
حل: څرګنده ده چې

$$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$
$$x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

نو دګراف يوه برخه په لومړئ ربع او دوهمه برخه يې په دريمه ربع کې واقع ده او لاندې جدول داګراف نور هم ښه په ګوته کوي

x:	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y:	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

ketabton.com - The Digital Library



عمودي مجانب

که چېرې د ناطقي تابع $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ په صورت او مخرج کې په عين وخت کې مشترک فکتور موجود نه وي، $g(a)\neq 0$ او $h(a)=0$ وي، په دې صورت کې د $x=a$ مستقيم خط د $f(x)$ عمودي مجانب بلل کيږي. ليدل کيږي چې عمودي مجانب د مخرج ډيولينوم له جذرونو څخه په لاس راځي او دعمودي مجانبونو شمير دمخرج دجذرونو له شمير سره مساوي وي. بناپردې عمودي مجانب هغه چې د y له محور سره موازي مستقيم خط دی او په بي نهايت کې له منحني سره مماس وي.

2 مثال

د $f(x)=\frac{3x-6}{x^2-x-2}$ تابع عمودي مجانبونه معلوم کړئ.

حل: په لومړی سرکې دتابع کسر اختصار کوو.

$$f(x)=\frac{3x-6}{x^2-x-6}=\frac{3(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{3}{x+1}$$

اوس ليدل کيږي چې د $x=-1$ لپاره مخرج صفر کيږي، په داسې حال کې چې صورت دصفر خلاف دی. بناپردې $x=-1$ عمودي مجانب دی.

3 مثال

د $f(x)=\frac{4x+5}{2x^2-5x-3}$ عمودي مجانبونه پيداکړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل: دمخرج جذرونه معلوموو.

$$2x^2-5x-3=0\Rightarrow(2x+1)(x-3)=0\Rightarrow 2x+1=0, x-3=0$$

$$\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2} \quad , \quad x_2=3$$

د کسر مخرج په $-\frac{1}{2}$ او 3 کې صفر کيږي مګر صورت دصفر خلاف دي، نو $x=-\frac{1}{2}$ او $x=3$ عمودي مجانبونه دي.

4 مثال

$f(x)=\frac{4x}{x^2+7}$ په پام کې نيسو. ددې تابع مخرج د x متحول په هيڅ قيمت باندې نه صفر کيږي. نو $f(x)$ عمودي مجانب نه لري.

مايل مجانب. که چېرې په يوه ناطقه تابع کې دصورت درجه له مخرج څخه يو واحد زياته وي، صورت پرمخرج تقسيموو او نومورې تابع ديوې خطي تابع او يوې ناطقې تابع، کومه چې دصورت درجه يې دمخرج له درجې څخه کمه وي، له حاصل جمع څخه په لاس راځي کله چې د x قيمتونه زياتيږي دتابع کسري برخه کوچنی کيږي او په نهايي حالت کې دتابع قيمتونه دخطي برخې د قيمتونو سره هم اهنګ کيږي او دغه خطي تابع ته دتابع مايل مجانب وايي. مايل مجانب يو مايل مستقيم خط دی چې په نهايي حالت کې د ګراف سره مماس کيږي.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=(ax+b)+\frac{r(x)}{h(x)}$$

دلته $y=ax+b$ د $y=f(x)$ اړونده مايل مجانب دي.

5 مثال

د $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

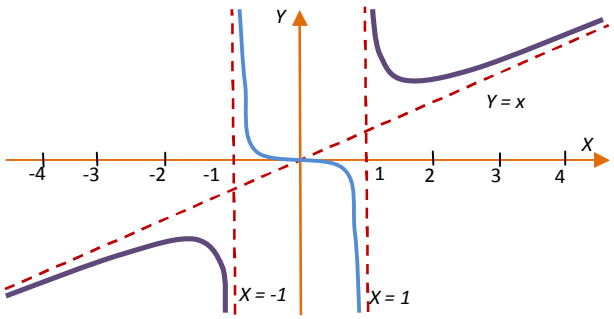
ketabton.com - The Digital Library

حل: څرګنده ده چې $x=1$ او $x=-1$ عمودي مجانبونه دي. مګر کولی شو دا تابع د $y=x+\frac{x}{x^2-1}$ په شکل هم وليکو، نو $y=x$ دمنحني مايل مجانب دي د $x>1$ لپاره دګراف يوه څانګه دمايل مجانب دپاسه او د $x<-1$ لپاره يې بله څانګه دمجانب لاندې پرته ده.

په $[-1,1]$ انټرول کې منحني نظر مبدا ته متناظر دي. په لاندې جدول کې دمنحني مو قعيت په انټرول کې تثبيتوي.

x:	$\pm 0,5$	0	± 1	$\pm 1,5$	± 2	$\pm 2,5$	± 3	± 4
y:	$\pm 0,17$	0	∞	$\pm 2,7$	$\pm 2,67$	$\pm 3,0$	$\pm 3,4$	$\pm 4,3$

دامنحني په دوهمه طريقه کيدلی شي د دوومنحني ګانو $y=\frac{x}{x^2-1}$ او $y=x$ د ترتيبونو له حاصل جمع څخه رسم شي.



6 مثال

د $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$ مجانبونه معلوم او دتابع ګراف رسم کوو.

ليدل کيږي چې د تابع مخرج په $x=0$ کې صفر کيږي، نو د y محور دهغې عمودي مجانب دي. دصورت له تقسيم څخه پرمخ باندې په لاس راځي چې

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}$$

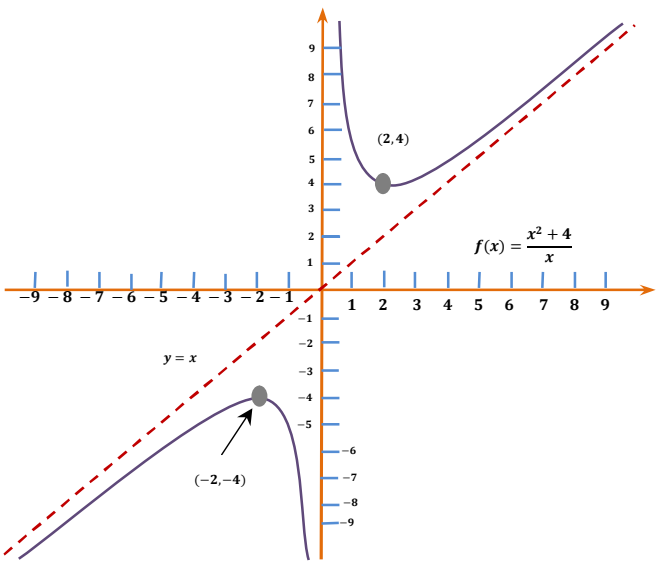
ketabton.com - The Digital Library

د $|x|$ دلويو قيمتونو لپاره د $\frac{1}{x}$ قيمت کوچني کيږي او $y = f(x)$ او $y = x$ يوله بله سره معادل کيږي، نو $y = x$ دتابع مايل مجانب دی.

څرګنده ده، چې

$$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$
$$x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

بناپردې مطلوب ګراف په متقابلو ناحيو کې په لاندې شکل کې رسميږي



افقي مجانب

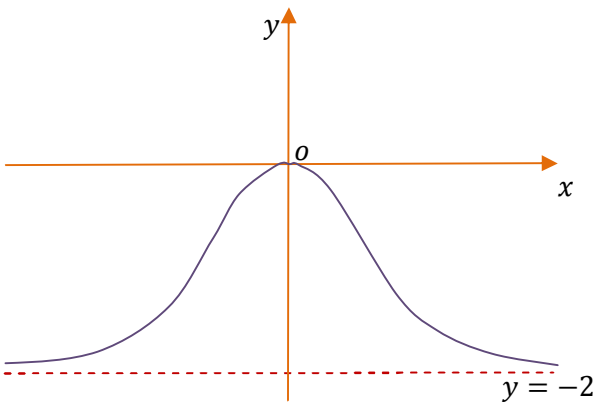
که چېرې په يوه ناطقه تابع کې صورت او مخرج، هم درجه وي، دويش حاصل به يوثابت عدد b وي، نو مايل مجانب د $y = b$ په شکل بدليږي چې د x له محور سره موازي دی. دې مستقيم خط ته افقي مجانب وايي. افقي مجانب په معموله توګه داسې معلوميږي چې b دصورت او مخرج دلوړو توانونو دضريبونو نسبت وي. بناپردې که يوه ناطقه تابع افقي مجانب ولري، نو هغه مايل مجانب نه لري او برعکس.

ketabton.com - The Digital Library

7 مثال

د $g(x) = -\frac{2x^2}{x^2+1}$ ګراف رسموو.

x	-100	-10	-1	0	1	10	100
f(x)	-1.99	-1.98	-1	0	-1	-1.98	-1.99



د $|x|$ په زیاتوالي د تابع قیمتونه په تدریج سره د -2 عدد ته نږدې کیږي (له جدول څخه ئې وګورئ)

او د تابع لوي قیمت صفر دی. د $y = 2$ مستقیم دتابع افقي مجانب دی.

د ناطقوتابع ګانو د مجانبونو معلومول

فرضوو $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ناطقه تابع کې د m او n عددونه په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي. نو

1. که $m < n$ وي، د x محور افقي مجانب دی.
2. که $m = n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی. b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی.

ketabton.com - The Digital Library

3. د $m > n$ لپاره افقي مجانب موجود نه دی. دمایل مجانب دشته والي احتمال شته.

4. په هغه صورت کې چې $m = n+1$ یعنې د صورت درجه یو واحد دمخرج له درجې څخه زیاته وي، تابع حتما مایل مجانب لري. په دې ډول یو حالت کې افقي مجانب موجود نه وي.

په عمومي توګه یوه ناطقه تابع به څو عمودي مجانبونه ولري (د مخرج دجذرونو په تعداد). خو یوازې یو مایل یا افقي مجانب لرلی شي.

8 مثال

د $f(x) = \frac{8}{x^2-4}$ تابع ګراف رسم کړئ.

څرنګه چې دصورت درجه له مخرج څخه کمه ده، نود تابع ګراف افقي مجانب، $y = 0$ لري چې د افقي محور څخه عبارت دی.

مګر عمودي مجانبونه د مخرج دجذرونو په پیداکولو سره په لاندې ډول لاس ته راځي.

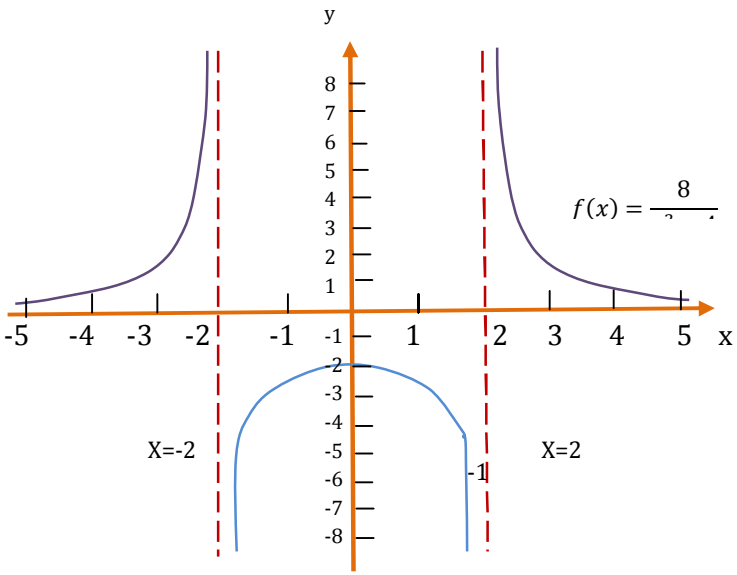
$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

نو عمودي مجانبونه عبارت دي له $x=2$ او $x=-2$. دامستقیم خطونه یعنې عمودي مجانبونه مستوي په دریو برخو ویشي چې د x لپاره په دا هره یوه برخه کې دګراف موقعیت تثبیت کیږي.

$$x \in (-\infty, -2) \quad , \quad x \in (-2, 2) \quad , \quad x \in (2, +\infty)$$

x	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-2)$	$+$	$-$	$+$
$\frac{8}{(x-2)(x+2}$	$+$	$-$	$+$

ketabton.com - The Digital Library



هوموګرافیکه تابع

یوه ناطقه تابع چې په هغې کې صورت او مخرج لومړی درجه پولینومونه وي، د هوموګرافیکې تابع په نامه یادیږي. ددې تابع ګراف دهایپربولا شکل لري چې د معمول افقي وضعیت څخه بې په یوه معینه زاویه دوران کړی وي او دا ګراف یوه جوړه مشابه منحنی ګان جوړوي چې نظر عمودي او افقي مجانبونو ته په دوو متقابلو (مخامخ) ناحیو کې موقعیت اخلي. په دې ترتیب هوموګرافیکه تابع د $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ شکل لري، افقي مجانب بې $y = \frac{a}{c}$ دی او عمودي مجانب بې $x = -\frac{d}{c}$ دی.

د دی تابع یو خاص حالت $f(x) = \frac{1}{x}$ دی چې دمخه ورته اشاره شوي ده.

ketabton.com - The Digital Library

غیرناطقه تابع (Irrational faction)

که چېرې په $y=f(x)$ تابع کې دجمع، تفریق، ضرب او تقسیم پر عملیو سربیره په ځېنو مواردو کې دهغې افادې یا متحول له تامو عددونو څخه پرته نور توانونه ولري، هغې ته غیر ناطقه تابع وایي.

$$y=\sqrt{x} \text{ او } y=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ ، } y=\frac{5x^2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4x+1}}$$

د غیروناطقو تابع ګانو نمونې دي.

لوګارتمي او اکسپوننشیل تابع ګاني

د $f(x)=a^x$ تابع کله چې a صفر، یو او منفي نه وي، د اکسپو نینشیل تابع په نوم یادیږي. په همدې ډول $g(x)=\log_a x$ لوګارتمي تابع بلل کیږي. څرګنده ده چې دا دواړه یو دبل معکوسې تابع ګاني دي. د $a>1$ لپاره د f او g تابع ګاني متزایدې او د $0<a<1$ لپاره دا تابع ګاني متناقصې دي. د اکسپو نینشیل او لوګارتمي تابع ګانو ګرافونه په مشخصو حالاتو کې په لاندې ډول رسمیږي.

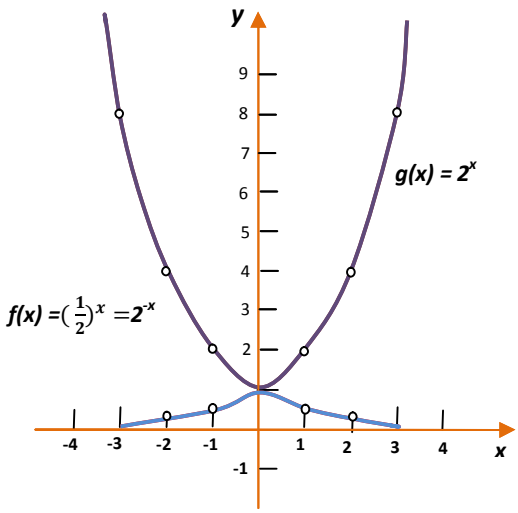
د $g(x)=2^x$ او $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ تابع ګانو ګرافونه دمثالونو په توګه لاندې ښودل شوي دي.

9 مثال

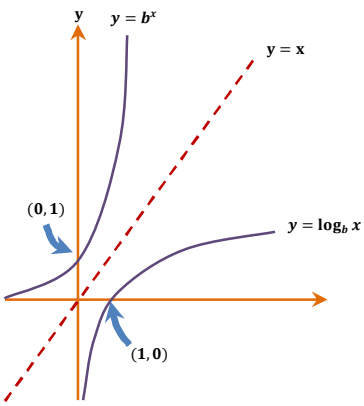
د $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ او $g(x)=2^x$ تابع ګاني په پام کې نیسو او ګرافونه یې رسموو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

ketabton.com - The Digital Library



د $y=b^x$ او $y=\log_b x$ تابع ګانو ګرافونه د $b>0$ لپاره، کومې چې یودبل معکوسې دي لاندې شکلونه لري.



د اویلر د عدد $e=2.7182818284\cdots$ په نام کې نیولوسره $y=e^x$ ته طبیعي اکسپوننشیل تابع او $y=\log_e x:=\ln x$ ته دطبیعي لوګارتم تابع وایي.

ketabton.com - The Digital Library

د اکسپوننشیل او لوګارتمي تابع ګانو خاصیتونه له طاقت لرونکو عددونو او لوګارتم څخه منشا اخلي چې هغه د I عمومي ریاضي په کتاب کې په تفصیل سره تربحث لاندې نیول شوي دي او دلته یې تفصیل ته اړتیا نه شته.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

1. $y=3^x$ ، 2. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ، 3. $y=\left(\frac{5}{2}\right)^x$

دا لاندې کومه یوه تابع متزایده او کومه یوه یې متناقصه ده.

4. $y=e^x$ ، 5. $y=e^{-x}$ ، 6. $y=5^x$ ، 7. $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

د لاندې عددونو لوګارتمونه پیدا کړئ.

8. $\log_2 64$ ، 9. $\log_2 \frac{1}{64}$ ، 10. $\log_2 64$ ، 11. $\log_3 81$

لاندې معادلې حل کړئ.

12, $5^{2x}-3(5)^x+2=0$ ، 13. $\log x^3+2\log x-5=0$

14. $\frac{\log 2}{1-\log x}=\frac{1}{3}$ ، 15. $\log(x+1)+\log(x-2)=1$

16. $\log_9(x-6)-\log_9(x+3)=1$ ، 17. $\ln x+2\ln x=\ln 8$

18. که a او b دوه مثبت عددونه او $\log_b a=\frac{2}{3}$ وي، نو د a او b ترمنځ اړیکه په ګوته کړئ.

د لاندې تابع ګانو دتعریف ناحیې وټاکئ.

19. $f(x)=\sqrt{\log_3 x}$ ، 20. $g(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$ ، 21. $h(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$

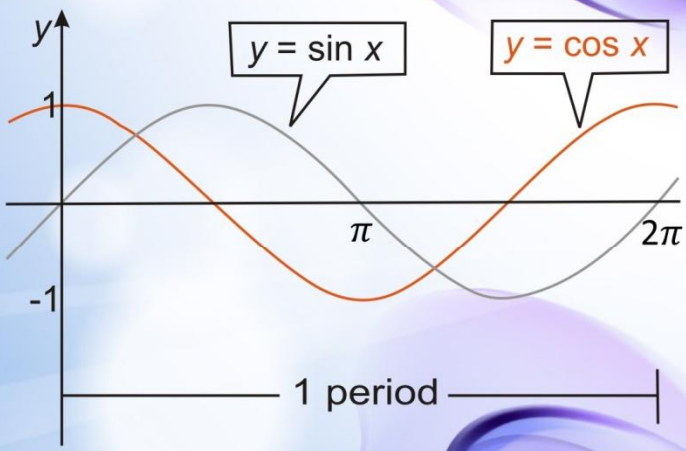
22. وښیئ چې د $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$ تابع جفته ده.

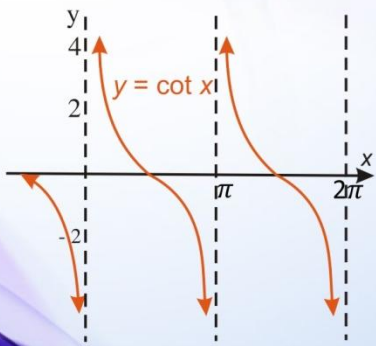
23. وښیئ چې $g(x)=\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ تابع طاقه ده.

د لاندې تابع ګانو افقي او عمودي مجانبونه او ګرافونه وټاکئ.

24. $f(x)=\frac{1}{x}$ ، 25. $g(x)=\frac{x}{x^2-9}$ ، 26. $h(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

ketabton.com - The Digital Library





دوهم ټولګی

مثلثاتي تابع ګانې

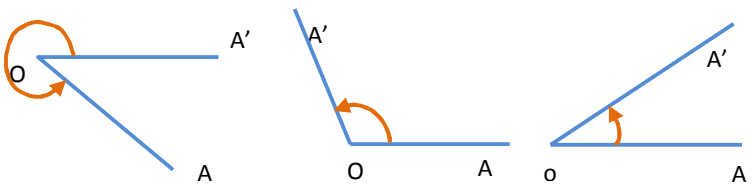
ketabton.com - The Digital Library

مثلثاتي تابع ګانې

مثلثاتي تابع ګانې په ریاضیاتو کې مشهورې تابع ګانې دي چې د حقیقي او کمپلکسو (مختلطو) عددونو په ساحو کې د دایروي تابع ګانو یا مثلثاتي تابع ګانو تر عنوانونو لاندې مطالعه کیږي. دا تابع ګانې دریاضي او فزیک دمسالو په حل کې کارول کیږي. په دې بحث کې په لنډ ډول مثلثاتي تابع ګانې تر مطالعې لاندې نیول شوي دي.

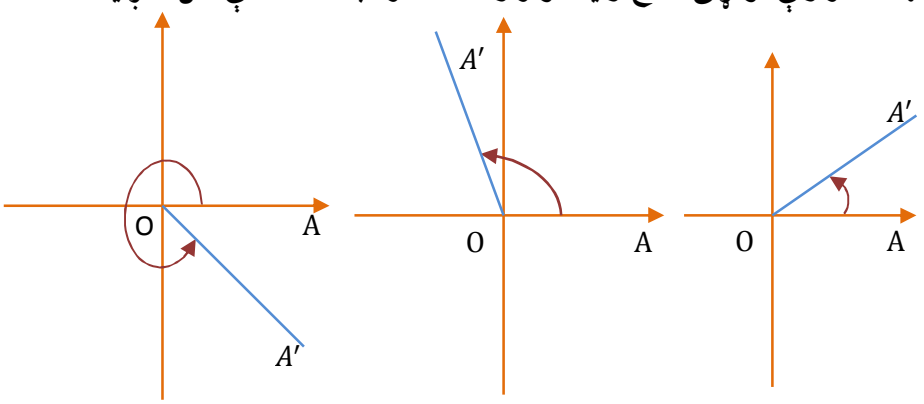
زاویه

زاویه دیوې ثابتې نقطې O په چاپیره دیونیم خط OA له دوران څخه عبارت دی. چې مثبت جهت یې دساعت دعقربې په خلاف ده.



د زاویې معیاري حالت

که چېرې په قایمو مختصاتو کې د یوې زاویې لومړنۍ ضلع د x پرمحور منطبق او راس یې دقایمو مختصاتو پرمبدا په پام کې ونیول شي، داسې چې د x محور مثبت جهت د زاویې لومړنۍ ضلع وي، نو زاویه دستنهرې په حالت کې بلل کیږي.



ketabton.com - The Digital Library

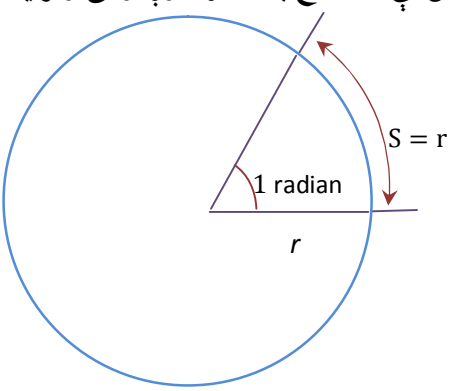
قایمه زاویه. د هغې زاویې څخه عبارت ده چې اضلاع یې یو پر بل عمود وي. په یوه مستوي کې دیوې نقطې چاپیره څلور قایمې زاویې ګنجایش لري. دلته قایمه زاویه د زاویو د اندازه کولو دمعیار په توګه په پام کې نیول شوي ده. په بل عبارت اولنی معیار، دکوم له مخې چې د زاویې واحدونه تعریف کیږي، قایمه زاویه ده.

د زاویې واحدونه

درجه: د هغې زاویې اندازه ده چې پراخوالی یې د قایمې زاوایې نوییمه $\left(\frac{1}{90}\right)$ برخه وي. نو یوه قایمه زاویه 90^o درجې ده او په یوه مستوي کې دیوې نقطې چاپیره څلور قایمې زاویې چې د 360 درجو سره مساوي کیږي، ګنجایش لري.

رادیان

په یوه دایره کې دیوې مرکزي هغې زاویې له اندازې څخه عبارت دی چې دهغې مقابل قوس یې د شعاع په اندازه اوږدوالی ولري.



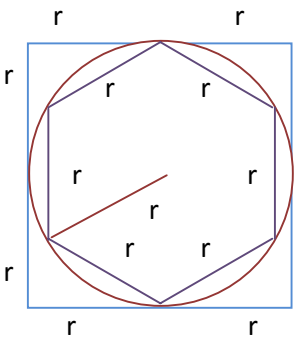
د یوې دایرې د محیط او قطر ترمنځ نسبت

د یوې دایرې د محیط او قطر تر منځ نسبت په π سره لیکي. یعنې که د یوې دایرې محیطc او شعاع یې r وي، نو

ketabton.com - The Digital Library

$$\pi = \frac{c}{2r} \Rightarrow c = 2\pi r$$

په دې ترتیب دیوې دایرې د محیط اوږدوالی چې شعاع یې r وي، له $2\pi r$ څخه عبارت دي.



د π د عدد تخمین

یوه دایره چې شعاع یې r وي له یوې محاطې شپږ ضلعي او محیطي مربع سره په پام کې نیسو. څرګنده ده چې دشپږ ضلعي محیط $6r$ دی. دمربع محیط $8r$ او د دایرې محیط $2\pi r$ دی.

د مربع محیط> د دایرې محیط> د شپږ ضلعي محیط

د نامساوي ګانو دواړه خواوې پر $2r$ تقسیموو لرو، چې $6r < 2\pi\ r < 8r$

$$3 < \pi < 4$$

په دې ترتیب π هغه عدد دی چې د 3 او 4 عددونو ترمنځ واقع دی. د حسابونې په طریقو د π قیمت په لاندې ډول په لاس راغلی دی.

$$\pi = 3.1415926545.....$$

د π عدد ناطق عدد نه دی. دا دارشمیدس دعدد په نامه یادوي. داعدد په کتابونو کې له اعشاری څخه وروسته تر زرو رقمونو پورې حساب شوي دي.

څرنګه چې د دایرې محیط د r په شعاع سره $2\pi r$ دی، نو په یوه مستوي کې دیوې

ketabton.com - The Digital Library

نقطې چاپیره 2π راډیان چې تقریبا 6.28 راډیان ګنجایش لري، کوم چې د 360^o سره برابری کوي.

په راډیان باندې د درجې اړونه

لکه څرنګه چې دمخه وویل شول 360^o درجې له 2π راډیان سره برابری کوي، نو که چېرې دیوې زاویې پراخوالی په درجه سره په D او دهمغې زاویې اندازه په راډیان سره په R وښیو لرو، چې

$$\frac{D}{360}=\frac{R}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$$

له وروستي تناسب څخه د درجې او راډیان د یوبل په بدلونه کې کار اخیستل کیږي.

1 مثال

د $30^o,45^o,60^o,90^o$ او 270^o په راډیان بدلې کړئ.

$$D=30^\circ \Rightarrow \frac{R}{\pi}=\frac{30}{180} \Rightarrow R=\frac{30\pi}{180}=\frac{\pi}{6}rad$$

$$D=45^\circ \Rightarrow \frac{R}{\pi}=\frac{45}{180} \Rightarrow R=\frac{45\pi}{180}=\frac{\pi}{4}rad$$

په همدې ترتیب

$$60^\circ=\frac{\pi}{3}rad \quad , \quad 90^\circ=\frac{\pi}{2}rad \quad , \quad 270^\circ=\frac{3\pi}{2}rad$$

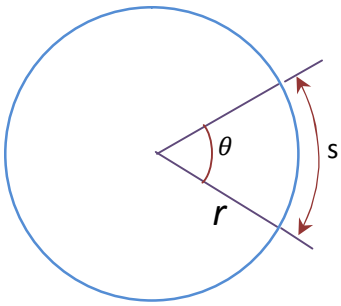
د یوې دایرې د مرکزي زاویې او د هغې د مقابل قوس ترمنځ رابطه (اړیکه)

که چېرې S په راډیان سره دیوې مرکزي زاویې θ دمخامخ قوس اندازه او r د همغې دایرې شعاع وي، نو د دې په پام کې نیولوسره چې دیوې دایرې محیط، کوم چې د ټولې مرکزي زاویې 2π راډیان په مقابل کې پروت دی، $2\pi r$ واحده دی، نودا لاندې تناسب په پام کې نیولی شو.

ketabton.com - The Digital Library

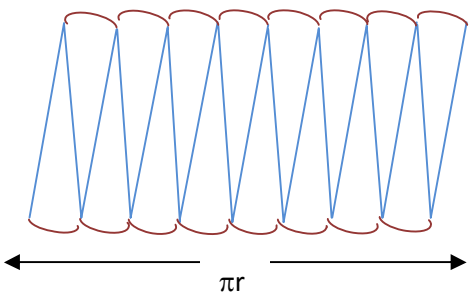
د قوس اوږدوالی په راډیان	زاویه د راډیان له مخې
$2\pi\ r$	2π
s	θ

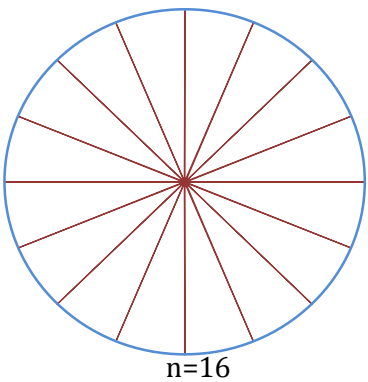
$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\theta}=\frac{2\pi r}{s} \quad \Rightarrow \quad S=\frac{2\pi r\theta}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad S=r\theta$$



د دایرې مساحت

یوه دایره چې شعاع یې r وي په پام کې ونیسي، دهغې مساحت له شکل سره سم په n مساوي مثلثونو ویشو، داسې چې راسونه یې د دایرې مرکز او دریمې ضلعې یې د دایرې د محیط یوه برخه وي. که چېرې دا مثلثونه په متقابله توګه یو دبل تر څنګ کیښودل شي، نو لاس ته راغلي شکل به د مستطیل سره شباهت ولري.





ketabton.com - The Digital Library

په هره اندازه چې ددې مثلثونو شمیر زیات شي، مستطیل واقعیت ته نږدې کیږي داسې چې سور (عرض) یې r، اوږدوالی (طول) یې د دایرې د محیط نیمایي π سره برابری کوي. په دې توګه د دایرې او ددې مستطیل مساحتونه یو له بل سره مساوي دي، نو

$$s = (\pi r)(r) = \pi r^2$$

بناپردې د دایرې مساحت عبارت دی له

$$s = \pi r^2$$

د دایرې د قطاع مساحت

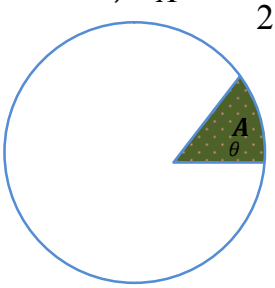
د r په شعاع د دایرې یوه قطاع، چې د دوو شعاع ګانو او θ زاویې په محدوده کې پرته وي، په پام کې نیسو.

پوهیږو چې ددایرې مساحت چې مرکزی زاویه یې 2π راډیان وي، πr^2 او د قطاع مساحت چې مرکزي زاویه یې θ دی، A وي، نو د لاندې تناسب څخه استفاده کولی شو.

مساحت	زاویه په راډیان سره
πr^2	2π
A	θ

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\theta} = \frac{r^2\pi}{A} \Rightarrow A = \frac{\pi r^2\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}r^2\theta$$



ketabton.com - The Digital Library

2 مثال

د يوې دايرې شعاع $10cm$، دهغې محيط او مساحت حساب کړئ.

د 105 درجې مرکزي زاويې مخامخ قوس او د اړونده قطاع مساحت په دې دايره کې په لاس راوړئ.

حل

د دايرې محيط $C = 2\pi r = 2(3.14)10 = 62.8cm$

د دايرې مساحت $S = \pi r^2 = (3.14)10^2 = 314cm^2$

$$105^0 = \frac{7\pi}{12} rad$$

د قوس اوږد والی $\ell = r\theta = 10\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 18.32cm$

د قطاع مساحت $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}10^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 183.17cm^2$

د مثلثاتي نسبتونو تعريف

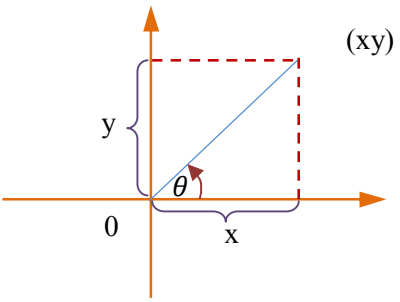
که چېرې د θ يوزاويه د ستندرډ (معياري) په حالت کې وي، د دې زاويې پر دويمه ضلعه له مبداځخه پرته د (x, y) يوه نقطه او سربيره پردې $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ له مبدا ځخه د دې نقطې مسا فه وي. په دې صورت د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad , \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

ketabton.com - The Digital Library



په طبيعي توګه په څلورو وروستيو حالتونو کې مخرجونه بايد صفر نه وي.

اساسي رابطې

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{\frac{r}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{\frac{r}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\tan^2\theta+1=\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{x^2+y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}=\sec^2\theta$$

په همدې توګه $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$ لاس ته راځي.

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\quad,\quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\,.$$

مثلثاتي تابع ګاني

که چېرې x دمتحول دکیمیت په توګه د راډیان واحد له جنسه په پام کې ونیول شي، نو $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x$ او $y=c\sec x$ ته مثلثاتي تابع ګاني وایي.

د مثلثاتي تابع ګانو د قیمتونو ترمنځ رابطې

که چېرې x ، $-x$ ، $\frac{\pi}{2}\pm x$ ، $\pi\pm x$ او $2\pi\pm x$ زاویې په واحده دایره کې د ستندرډ په حالت کې په پام کې ونیول شي او دقایم الزاویه مثلثونو دتساوي خاصیتونه وکارول شي، دمثلثاتي تابع ګانو دقیمتونو تر منځ لاندني اړیکې په اسانۍ سره په لاس راځي.

$$\begin{cases}\sin(-x)=-\sin x\\ \cos(-x)=\cos x\\ \tan(-x)=-\tan x\\ \cot(-x)=-\cot x\end{cases}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\tan x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\pi-x)=\sin x\\ \cos(\pi-x)=-\cos x\\ \tan(\pi-x)=-\tan x\\ \cot(\pi-x)=-\cot x\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}\sin(\pi+x)=-\sin x\\ \cos(\pi+x)=-\cos x\\ \tan(\pi+x)=\tan x\\ \cot(\pi+x)=\cot x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(2\pi-x)=-\sin x\\ \cos(2\pi-x)=\cos x\\ \tan(2\pi-x)=-\tan x\\ \cot(2\pi-x)=-\cot x\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}\sin(2\pi+x)=\sin x\\ \cos(2\pi+x)=\cos x\\ \tan(2\pi+x)=\tan x\\ \cot(2\pi+x)=\cot x\end{cases}$$

د مثلثاتي تابع ګانو د قیمتونو تر منځ دځینو اړیکو لنډ جدول

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$-\ x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2}-x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{2}+x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\pi-x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\pi+x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$\cot x$
$2\pi-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$2\pi+x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$

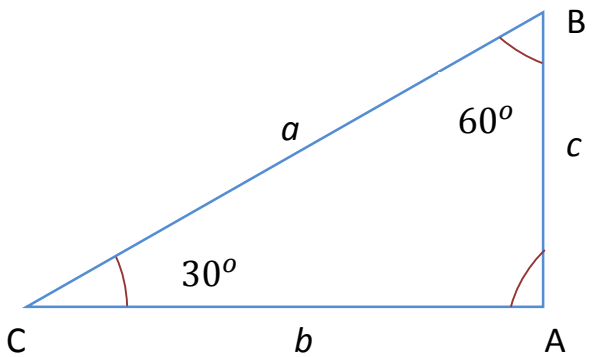
ketabton.com - The Digital Library

د پورتنیو اړیکو ثبوت د شاګردانو په غاړه دی.

3 مثال

د 30^0 او 60^0 زاویو مثلثاتي نسبتونه حسابوو، په دې منظور یو قایم الزاویه مثلث په پام کې نیسو چې درې زاویې یې په ترتیب سره 90^0، 30^0 او 60^0 وي. داسې چې مقابلې ضلعې یې په ترتیب سره b,a اوc دي. پوهیږو چې په داډول مثلث کې د 30^0 زاویې مقابله ضلعه دوترنیمایې ده یعنې

$$c=\frac{a}{2}, b^2+c^2=a^2 \Rightarrow b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow b^2=a^2-\frac{a^2}{4} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



دا مثلث په قایمو مختصاتو کې دا ډول په پام کې نیسو چې 30^0 او 60^0 زاویې په ترتیب سره د ستنډرډ په حالت کې واقع شي. د تعریف سره سم

$$\sin 30^o=\frac{c}{a}=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ=\frac{b}{a}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

په همدې ډول

$$\cos 60^o=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \quad , \quad \sin 60^o=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\Rightarrow \tan 30^o = \frac{\sin 30^o}{\cos 30^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^o = \frac{\sin 60^o}{\cos 60^o} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

4 مثال

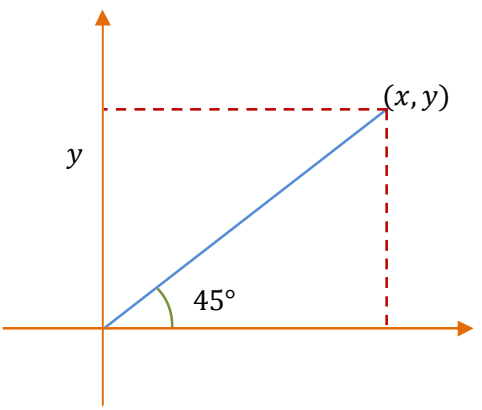
د 45^o زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکوو او د هغې لپاره یو قایم الزاویه متساوي الساقین مثلث د قایمو مختصاتو په سیستم کې دا ډول ځای پر ځای کوو چې په هغې کې د 45^o زاویه د ستنډرډ په حالت کې واقع شي (لاندې شکل ته وګورئ) څرګنده ده چې $x = y$ ده او لرو چې

$$\sin 45^o = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + y^2}} = \frac{y}{y\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

په همدې ډول:

$$\cos 45^o = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بناپردې



ketabton.com - The Digital Library

$\frac{\pi}{6}$	X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د جمع فورمولونه

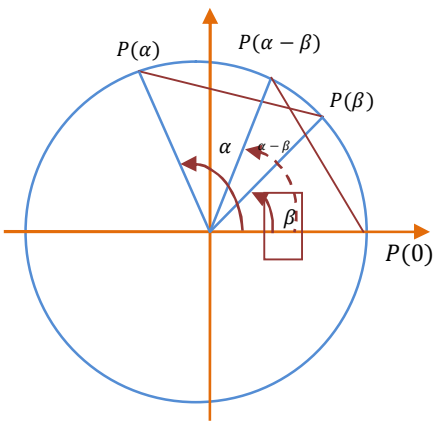
د α ، β او $\alpha \pm \beta$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکي چې د جمع د قوانینو په نامه یادیږي، عبارت دي له

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ثبوت

لومړی څلورمه رابطه ثبوتوو کوو او وروسته یې د همدغه له مخې نورې رابطې ثبوت کیږي.

د $p(\alpha)$ ، $p(\beta)$ ، $p(\alpha-\beta)$ او $p(0)$ نقطې د واحدي دایرې پر محیط باندې په پام کې نیسو. دا نقطې نظر مختصاتو ته عبارت دي له



ketabton.com - The Digital Library

$$p(\alpha)=(\cos\alpha,\sin\alpha) \quad , \quad p(\beta)=(\cos\beta,\sin\beta)$$

$$p(\alpha-\beta)=(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)) \ , \ p(0)=(1,0).$$

که چېرې $\alpha>\beta$ وي، نو د $p(\beta)$ او $p(\alpha)$ نقطو تر منځ د قوس اوږدوالی عبارت له $\alpha-\beta$ څخه دی اود $p(\alpha-\beta)$ او $p(0)$ د نقطو ترمنځ د قوس د اوږد والي سره مساوي دی، نو ددې قوسونو مخامخ وترونه یوله بله سره مساوي دي.

$$d(P(\alpha-\beta),p(0))=d(p(\alpha),p(\beta))$$

اویا

$$\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)]^2}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$$

$$[\cos(\alpha-\beta)-1)]^2+[(\sin(\alpha-\beta)]^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

$$\Rightarrow\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)$$

$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta$$

د $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ په پام کې نیولوسره له وروستۍ رابطې څخه په لاس راځي چې

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\boxed{\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

له وروستنی رابطې څخه دجمع دنورو فورمولونو دثبوت لپاره داساس په توګه کاراخیستل کیدلی شي. په دې لړکې دمتقابلو، مکملو اومتمموزاویو له مثلثاتي نسبتونوڅخه کاراخیستل کیږي.

که چېرې په وروستۍ رابطه کې د β پرځای $-\beta$ ځای پرځای کړو لرو، چې

$$\cos\left[\alpha-(-\beta)\right]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\boxed{\Rightarrow\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta}$$

ketabton.com - The Digital Library

همدارنګه:

$$\sin(\alpha+\beta)=-\cos\left[(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\right]=-\cos\left(\alpha+(\beta+\frac{\pi}{2})\right)$$

$$=-\left[\cos\alpha\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\alpha\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=-\cos\alpha(-\sin\beta)+\sin\alpha\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

اوپه اخرکې

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

5 مثال

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\boxed{\Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

که په وروستی رابطه کې که له β پرځای $-\beta$ ځای پرځای شي، په لاس راځي چې

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

ketabton.com - The Digital Library

د دوه چنده زاویې فومولونه

که د جمع په فورمولونو کې β په α عوض شي

$$\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$

په همدې ډول:

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

د نیمه زاویو فورمولونه

دزاویې د دوه چنده، قوانینو په استفاده لرو، چې

$$\cos\alpha=\cos\left(2\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\quad,\quad \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

له دې ځایه:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\quad,\quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

د ضرب فورمولونه

کولی شو دمثلثاتي نسبتونو دضرب حاصل دهغوی دجمع په حاصل سره بدل کړو. پوهیږو، چې

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

له دې ځایه لرو چې

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

په همدې ډول د مختلفو مثلثاتي نسبتونو دضرب حاصل په لاس راتلی شي.

لهذا

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

که چېرې په دې رابطوکې $x=\alpha+\beta$ او $y=\alpha-\beta$ په پام کې ونیسو. $\alpha=\frac{x+y}{2}$ او $\beta=\frac{x-y}{2}$ لاس ته راځي. بناپردې دضرب فورمولونه لاندې شکل اخلي.

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

د مثلثاتي تابع ګانو تناوب

د f یوه تابع د p دورې په تناوب سره، متناوبه (پریودیک) تابع بولي، که چېرې $P\neq 0$ ترټولوکوچنی مثبت عدد وي، چې له D_f څخه د هر x لپاره د $x+p$

ketabton.com - The Digital Library

عدد هم د D_f عنصر او $f(x+P)=f(x)$ وي. د مثال په توګه $f(x)=\sin x$ یوه متناوبه تابع ده. اود تناوب دوره یې 2π ده ځکه، چې

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x$$

په همدې ډول $g(x)=\cos x$ متناوبه تابع ده.

6 مثال

$f(x)=\sin 4x$ تابع تناوب معلوم کړی.

حل: فرض کوو چې p د دې تابع $f(x)$ تناوب وي. په دې صورت کې

$$f(x+p)=f(x)\Rightarrow \sin\left[4(x+p)\right]=\sin 4x\Rightarrow \sin(4x+4p)=\sin 4x$$

$$\Rightarrow 4p=2\pi\Rightarrow p=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

بناپردې د $f(x)$ پریود $p=\frac{\pi}{2}$ دی.

د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ مثلثاتي تابع ګانو ګرافونه

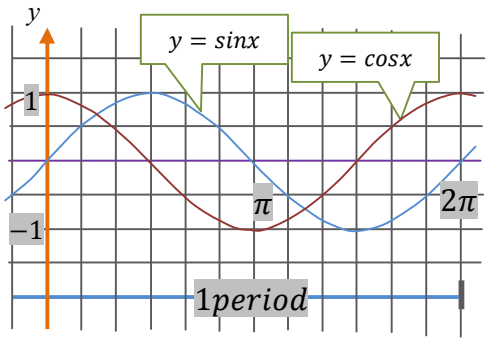
پوهیږو چې د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ تابع ګانو تناوب 2π دی. نوځکه ددې تابع ګانو ګرافونه د 2π په اوږدوالی په معین انټرول کې تکراریږي. په دې ترتیب ددې تابع ګانو ګرافونه د $[0\,،2\pi]$ په انټرول کې رسم کیږي.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

د یادونې وړه چې د زاویې واحد (د x قیمت) په راډیان حسابیږي.

$\pi\approx 3.14$ او $2\pi\approx 6.28$ په پام کې نیول کیږي.

ketabton.com - The Digital Library



لیدل کیږی چې د دوو تابع ګانو $\sin x$ او $\cos x$ د تعریف ناحیې دحقیقي عددونو سټ او د قیمتونو سټ یې د $[-1,1]$ انټرول دی.

$$D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R} \quad , \quad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$$

همدارنګه د $\sin x$ تابع طاقه او د $\cos x$ تابع جفته ده، ځکه چې

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ او } \cos(-x) = \cos x.$$

د $y = tanx$ او $y = cotanx$ تابع ګانو ګرافونه

خرنګه چې $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ و $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ دی

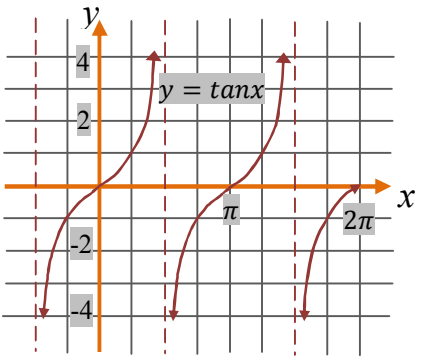
$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} \quad , \quad D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\}$$

د $y = tanx$ او $y = cotanx$ تابع ګانې متناوبې دي او تناوب یې π دی.

د $y = tanx$ ګراف کولای شو، د $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ په انټرول کې تر مطالعې لاندې ونیسو.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	-1	0	1	∞

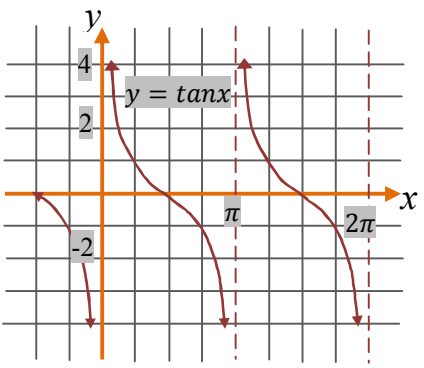
ketabton.com - The Digital Library



د $x = \pm\frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د $y = tanx$ منحني عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $y = cotanx$ تابع لپاره د $(0, \pi)$ په انټرول کې لرو، چې

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
(	∞	1	0	1	$-\infty$



د $x = 0$ او $x = \pi$ مستقیم خطونه د $y = cotx$ عمودي مجانبونه دی.

معکوسي مثلثاتي تابع ګاني

د مثلثاتي تابع ګانو دهرې یوې دتعریف ناحیه، کولی شو داډول محدوده کړوچې تابع په هغه محدوده کې معکوسه تابع ولري.

ketabton.com - The Digital Library

د $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ ، $y=\tan x$ او $y=\cot x$ تابع ګانو، معکوسي تابع ګاني په ترتیب سره په $y=\arcsin x$ ، $y=\arccos x$ ، $y=\arctan x$ ، $y=arc\cot x$ یا $y=\sin^{-1}x$ ، $y=\cos^{-1}x$ ، $y=\tan^{-1}x$ ، $y=\cot^{-1}x$ لیکي.

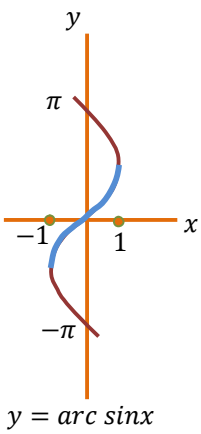
$$x=\sin y \Leftrightarrow y=\arcsin x$$
$$x=\cos y \Leftrightarrow y=\arccos x$$
$$x=\tan y \Leftrightarrow y=\arctan x$$
$$x=\cot y \Leftrightarrow y=arc\cot x$$

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو دتعریف ناحیې او دقیمتونو سټټونه عبارت دي له

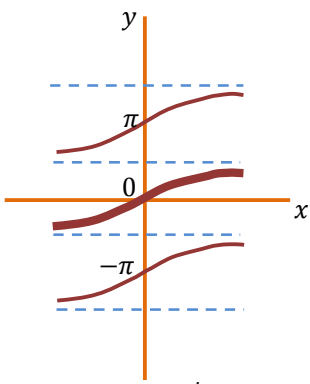
$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$arc\cot x$
D_f	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
R_f	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$

په مشابه ډول د $y=\sec x$ او $y=\csc x$ تابع ګانو معکوسي تابع ګاني په ترتیب سره عبارت دي له $y=arc\sec x$ او $y=arc\csc x$ دي.

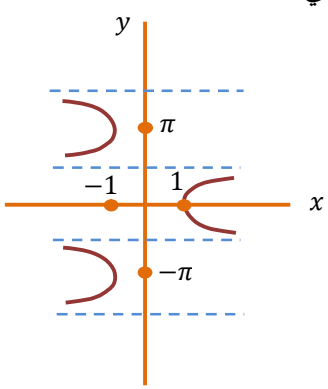
څرنګه چې اصلي او معکوسي تابع ګاني یوه له بلې سره نظر $y=x$ مستقیم خط ته متناظري دي، نو ځکه دهغوي ګرافونه داصلي تابع ګانو د ګرافونو په مرسته رسم کیدلی شي.



$y=arc\ sinx$

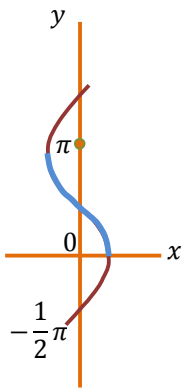


$y=arc\ tanx$

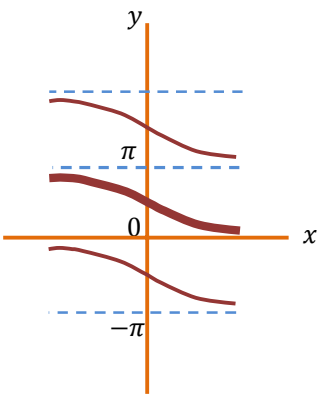


$y=arc\ secx$

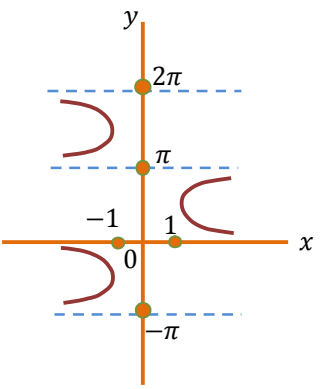
ketabton.com - The Digital Library



$y = arc\ cosx$



$y = arc\cot x$



$y = arc\ cscx$

یادښت

که چېرې f او f^{-1} تابع ګاني یوه دبلې سره معکوسي وي. پوهیږو، چې

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ، \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

بناپردې:

$$\arccos(\cos x) = x \quad , \quad \cos(\arccos x) = x$$
$$\arcsin(\sin x) = x \quad , \quad \sin(\arcsin x) = x$$
$$\arctan(\tan x) = x \quad , \quad \tan(\arctan x) = x$$
$$arc\cot(\cot x) = x \quad , \quad \cot(arc\cot x) = x$$

7 مثال

د $\arcsin\frac{1}{2}$ او $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ مفاهیم محاسبه کړئ.

$$\theta = \arcsin\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$
$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

ketabton.com - The Digital Library

8 مثال

د $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ عدد حساب کړئ.

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f^{-1}(x)=\arcsin x$$
$$\Rightarrow (f^{-1}of)(x)=x \Rightarrow \arcsin(\sin x)=x.$$
$$\Rightarrow \quad \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\frac{\pi}{4}$$

9 مثال

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $\cos^{-1}(0)$ او $\cos^{-1}(1)$ پیدا کړئ.

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

$$\cos^{-1}(0)=\beta \Rightarrow \cos\beta=0 \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$$
$$\cos^{-1}(1)=\gamma \Rightarrow \cos\gamma=1 \Rightarrow \gamma=0 \Rightarrow \cos^{-1}(1)=0$$

10مثال

ثبوت کړئ چې

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ثبوت

فرض کوو چې $\arcsin x=\theta$ وي په دې صورت کې

$$Sin\theta=x \Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \theta=\arccos\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \arcsin x=\theta=\arccos\sqrt{1-x^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

له بلې خوا،

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\theta = arc\sqrt{1-x^2}.$$

11مثال

وښیئ چې $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ده.

حل: وضع کوو، چې

$$\arcsin x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = x$$
$$\arccos x = \beta \Rightarrow \cos\beta = x$$

بناپردې:

$$\sin\alpha = \cos\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

12مثال

وښیئ، چې

$$\arctan x = arc\cot\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

حل: بیاهم وضع کوو، چې

$$\arctan x = \theta \Rightarrow \tan\theta = x \Rightarrow cat\theta = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \theta = arc\cot\frac{1}{x}, \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ketabton.com - The Digital Library

له بلې خوا

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

په نتیجه کې

$$\theta=\arctan x=arc\cot\frac{1}{x}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

پوښتنې

د لاندې زاویو مثلثاتي نسبتونه معلوم کړئ

1. 120° , 2. 225° , 3. -30° , 4. -45°

د لاندې افادو قیمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه په لاس راوړئ.

5. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$, 6. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$

7. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$, 8. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$

د لاندې افادو قیمتونه د $\tan\alpha$ او $\cot\alpha$ له جنسه پیدا کړئ.

9. $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$, 10. $\tan\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

11. $\cot\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$, 12. $\cot\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

13. د 105 او 195 زاویو مثلثاتي نسبتونه حساب کړئ.

14. که $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ ، او $\alpha\le\frac{\pi}{2}$ وي، نو لاندې نسبتونه حساب کړئ.

i. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, *ii.* $\cos(4\pi-\alpha)$, *iii.* $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

ketabton.com - The Digital Library

15. که چېرې $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ او $\alpha\le\frac{\pi}{2}$، $\cos\beta=\frac{3}{4}$ او $\beta\le\frac{\pi}{2}$ وي، لاندې نسبتونه په لاس راوړئ.

i. $\sin(\alpha+\beta)$, *ii.* $\cos(\alpha+\beta)$, *iii.* $\tan(\alpha+\beta)$

iv. $\cot(\alpha+\beta)$, *v.* $\sin(\alpha-\beta)$, *vi.* $\cos(\alpha-\beta)$

vii. $\tan(\alpha-\beta)$, *viii.* $\cot(\alpha-\beta)$, *ix.* $\sin 2\alpha$

د لاندې مثلثاتي تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

16. $y=-\sin x$, 17. $y=-\cos x$, 18. $y=-2\cos x$

19. $y=\sin(x-1)$, 20. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, 21. $y=\cos x+1$

لاندې زاویې (قوسونه) په ګوته کړئ.

22. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$, 23. $\arcsin(-1)$, 24. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

25. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$, 26. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, 27. $\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

28. $\cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$, 29. $\tan\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$, 30. $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

31. $\cot\left(arc\cot(-1)\right)$, 32. $\cot\left(arc\cot 9\right)$, 33. $arc\cot(-1)$

مثلثاتي معادلې

هغه معادلې چې په هغې کې یو یا څو مثلثاتي نسبتونه کارول شوي وي، د مثلثاتي معادلې څخه عبارت دی، لکه:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library

مثلثاتي مطابقت هغه تساوي ده چې د زاويې دټولو قيمتونو لپاره صدق کوي. په داسې حال کې چې مثلثاتي معادله دمجهول دځينو قيمتونو لپاره صدق کوي، دالاندې

$$\sin^2 x - \cos^2 x = 1$$

يو مثلثاتي مطابقت دی. په دې مبحث کې د مثلثاتي معادلو د څومثالونو حل تر بحث لاندې نيول کيږي.

د مثلثاتي معادلو حل (د مثلثاتي معادلو جذرونه)

اصلي حل: هغه عدد چې دمجهولې زاويې پرځای معادله صدق کړي، دمعادلې د حل (جذر) په نامه يادیږي. لکه څرنګه چې د $\sin x = 1$ اصلي حل عبارت دی له $x = \frac{\pi}{2}$.

عمومي حل. څرنګه چې مثلثاتي تابع ګانې دوره يې (متناوبې) دي. بناپردې دهغې حل ديوې متناوبې تابع په مرسته تعميم کيږي. هغه حل چې ديوې مثلثاتي معادلې ټول ممکنه حلونه وښيي، دهغې معادلې د عمومي حل په نامه يادیږي.

يوه مثلثاتي معادله يوعمومي حل او يو اصلي حل لري. په لاندې جدول کې څو مثلثاتي معادلې دهغوي د عمومي حل سره ورکړل شوی دي.

معادله	عمومی حل
$\sin x = 0$	$x = n\pi \ , n \in \mathbb{N}$
$\cos x = 0$	$x = (2n+1)\frac{\pi}{2} , n \in \mathbb{N}$
$\tan x = 0$	$x = n\pi \ , n \in \mathbb{N}$
$\sin x = \sin\alpha$	$x = n\pi + (-1)^n \alpha , -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} , n \in \mathbb{N}$
$\cos x = \cos\alpha$	$x = 2n\pi \pm \alpha , 0 \le \alpha \le \pi , n \in \mathbb{N}$

ketabton.com - The Digital Library

$\tan x = \tan \alpha$	$x = n\pi + \alpha , -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} , n \in \mathbb{N}$
$\sin^2 x = \sin^2 \alpha$	$x = n\pi \pm \alpha , n \in \mathbb{N}$
$\cos^2 x = \cos^2 \alpha$	$x = n\pi \pm \alpha , n \in \mathbb{N}$
$\tan^2 x = \tan^2 \alpha$	$x = n\pi \pm \alpha , n \in \mathbb{N}$
$\sin x = 1$	$x = (4n+1)\frac{\pi}{2} , n \in \mathbb{N}$
$\cos x = 1$	$x = 2n\pi , n \in \mathbb{N}$
$\cos x = -1$	$x = (2n+1)\pi , n \in \mathbb{N}$

1 مثال

د $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} , (\sin x \neq 2)$$

$$\Rightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$$

2 مثال

د $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$ معادله حل کړئ.

حل: پوهیږو، چې له

ketabton.com - The Digital Library

$$\tan 3x = \tan(x+2x) = \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x}$$

$$\Rightarrow tax3x - \tan x \tan 2x \tan 3x = \tan x + \tan 2x$$

$$\Rightarrow \tan x \tan 2x \tan 3x = \tan 3x - \tan x - \tan 2x$$

$$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$$

$$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

$$\Rightarrow 2\tan x = -2\tan 2x \Rightarrow tax2x = \tan(-x) \Rightarrow 2x = n\pi + (-x)$$

$$\Rightarrow 3x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{N}.$$

3 مثال

د $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$ معادله حل کړئ.

حل

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$$

$$\Rightarrow \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x = \left(n\pi + \frac{\pi}{6}\right) + (-1)^n \frac{\pi}{2}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

4 مثال

د $\dfrac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1$ معادله حل کړئ.

حل

$$\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1 \Rightarrow \tan(3x - 2x) = \tan\frac{\pi}{4}$$

ketabton.com - The Digital Library

خود $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ لپاره د $\tan 2x$ قیمت د تعریف وړ نه دئ، نو د معادلې دحلونو سېټ خالي دی.

5 مثال

د $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$ معادله حل کړئ.

حل

$$\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan x + \tan 2x = 1 - \tan x \tan 2x$$

$$\frac{\tan x + \tan 2x}{1 + \tan x \tan 2x} = 1 \Rightarrow \tan 3x = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 3x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, n \in IN$$

6 مثال

د $(\cos x)^{\sin^2 - 3\sin x + 2} = 1$ معادلې عمومي حل پیداکړئ.

په داسې حال کې چې $x \neq \frac{n\pi}{2}$ فرض شي.

حل

$$(\cos x)^{\sin x^2 - 3\sin x + 2} = 1 \Rightarrow \sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 2)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 1$$

له بلې خوا د $x \neq \frac{n\pi}{2}$ شرط ایجابوي چې $\cos x$ نه شي کولی د 0، 1 او -1 قیمتونه واخلي، نو معادله عمومي حل نه لري.

7 مثال

د $|4\sin x - 1| < \sqrt{5}$ نامساوات د حلونو سېټ د $x \in (-\pi, \pi)$ لپاره پیداکړئ.

حل

$$|4\sin x - 1| < \sqrt{5} \Rightarrow -\sqrt{5} < 4\sin x - 1 < \sqrt{5}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}<\sin x<\frac{\sqrt{5}+1}{4}\Rightarrow -\sin\frac{\pi}{10}<\sin x<\cos\frac{\pi}{5}$$
$$\Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)<\sin x<\sin\frac{3\pi}{5}\Rightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{10},\frac{3\pi}{10}\right)$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو عمومي حل پیدا کړئ.

1. $2\sin x-\sqrt{3}=0$, 2. $2\cos 2x=\sqrt{3}$, 3. $\cos^2 2x=3$
4. $2\sin x\cos c-\sin x=0$, 5. $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$
6. $2\sin^2 2x-3\cos 2x-3=0$, 7. $4\sin^2 x\cos x-\sin 2x=0$
8. $\sin 3x-\sin 3x=0$, 9. $\sqrt{3}\tan x-\sec x-1=0$
10. $\sin x+\cos x=1$, 11. $\tan 2x+\tan x=1$
12. $\sin^2 x+\sin x=2$, 13. $\sin^{10} 2x=1+\cos^{10} x$
14. $\sqrt{2}\sec x+\tan x=1$, 15. $\cos^2 x=\cos 2x$

د لاندې معادلو خصوصي حلونه دورکړل شوي شرطونو په پام کې نیولوسره معلوم کړئ.

16. $\sin x=\sqrt{3}\cos x$, $-\pi<x<0$
17. $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$, $0<x<2\pi$
18. $(2\cos x-1)(3-2\cos x)=0$, $0<x<2\pi$
19. $|\cot x|=\cot x+\frac{1}{\sin x}$, $0<x<3\pi$

د یومثلث د عناصرو تر منځ رابطې او د مثلث حل

یو مثلث درې ضلعې او درې زاویې لري او هغوی دمثلث عناصر بولی. په بل عبارت یو مثلث شپږ عناصر لري. د ABC په یومثلث کې زاویې په A, B او C سره ښیي

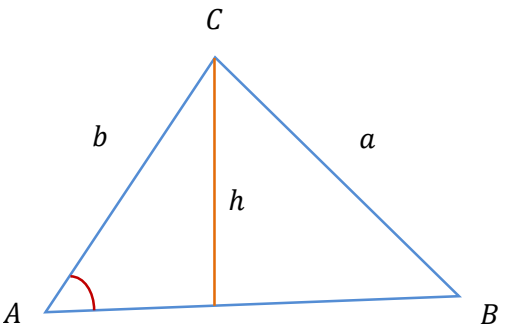
ketabton.com - The Digital Library

او د دې زاویو مقابلې ضلعې په ترتیب سره په c, b, a سره ښیي، دمثلث محیط په $2S$ او مساحت یې په Δ سره نوموي، نو $s=\frac{a+b+c}{2}$ دی. په دې بحث کې په مثلثاتي نسبتونه پورې اړونده ځینې خاصیتونه په لنډه توګه یادوو.

د ساین قضیه

یعنې د یوه مثلث د زاویو ساینونه دهغوی له مخامخ ضلعو سره مستقیم تناسب لري.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



ثبوت

له شکل څخه لیدل کیږي، چې

$$h = a\sin B \quad , \quad h = b\sin A$$

$$\Rightarrow a\sin B = b\sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

په همدې ډول د دوهمې ارتفاع په پام کې نیولو سره لاس ته راځي، چې

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

د دوو وروستنیو رابطو د پرتله کولو څخه په لاس راځي، چې

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

ketabton.com - The Digital Library

1 مثال

د ABC په مثلث کې که $a=10cm$ ، $b=15cm$ او $B=50^\circ$ وي، د $\hat{A}$ زاویه معلومه کړئ.

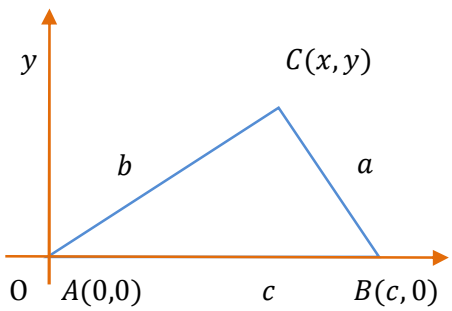
حل: د ساینونو دقانون څخه لرو، چې

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow \sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{10}{15}\sin 50^0=0.5107$$
$$\Rightarrow \sin A=0.5107\Rightarrow A=\arcsin(0.5107)=30^\circ\ 42'\ 37''$$

د کوساین قضیه

د ABC په مثلث کې دهغې د اضلاعو او داخلي زاویو کوساینونو ترمنځ لاندې رابطې موجودې دي.

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$



ثبوت

له شکل سره سم د ABC مثلث د قایمو مختصاتو په سیستم کې داسې ځای پر ځای کوو چې د A راس د مختصاتو پر مبدا او د AB ضلع یې د OX پر محور

ketabton.com - The Digital Library

منطبق شي. اوس نود دوو نقطو $B(c,o)$ او $C(x,y)$ تر منځ مسافه چې له a څخه عبارت دی، په لاندې ډول حسابوو.

$$a=\sqrt{(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2}$$

د $x=b\cos A$ او $y=b\sin A$ په پام کې نیولوسره لرو، چې

$$\Rightarrow a^2=b^2\cos^2 A-2bc\cos B+c^2+b^2\sin^2 C$$
$$\Rightarrow a^2=b^2\left(\cos^2 A+\sin^2 A\right)+c^2-2bc\cos A$$
$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

دوې نورې رابطې په عین طریقه ثبوت کیږي.

2مثال

د ABC په یوه مثلث کې دوې ضلعې $b=5cm$ ، $c=8cm$ او $A=60^\circ$ وي، نود a ضلع اوړدوالی پیداکړئ.

حل: د کوساین دقضیې په پام کې نیولو سره لرو، چې

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+64-2\times5\times8\cos60^\circ$$
$$\Rightarrow a^2=89-80\times\frac{1}{2}\Rightarrow a^2=49\Rightarrow a=\sqrt{49}\Rightarrow a=7$$

3 مثال

که $a=9cm$ ، $b=11cm$ او $c=14cm$ وي، د A زاویه وټاکئ.

حل: دکوساین د قضیې سره سم لرو، چې

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{121+196-81}{2\times11\times14}=\frac{236}{304}=0.7662$$
$$\Rightarrow \cos A=0.7662\Rightarrow A=\arccos(0.7662)=39^\circ\,58'\,59''$$

ketabton.com - The Digital Library

د تانجنت قضیه

د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې لاندې رابطې شته دي.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}\quad,\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

ثبوت. وضع کوو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=D\Rightarrow\begin{cases}a=D\sin A\\ b=D\sin B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=D(\sin A+\sin B)\\ a-b=D(\sin A-\sin B)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}$$

که د وروستۍ رابطې دښي خوا صورت او مخرج د $\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ پر افاده تقسیم کړو، په لاس راځي، چې

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

دوې نورې رابطې په همدغه طریقه په لاس راځي.

4 مثال

د $\overset{\Delta}{ABC}$ په یوه مثلث کې دوې ضلعې $a=925cm$ ، $c=432cm$ او یوه زاویه $B=42^\circ\ 30'$ دي د A او C زاویې معلومې کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل:

$$A+C=180^\circ-B=180^\circ-42^\circ\ 30'=137^\circ\ 30'\Rightarrow\frac{A+C}{2}=68^\circ\ 45'$$

اوس لرو، چې

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}\Rightarrow\frac{925+432}{925-432}=\frac{\tan(68^\circ\ 45')}{\tan\frac{A-C}{2}}\Rightarrow\frac{1357}{483}=\frac{\tan(68^\circ\ 45')}{\tan\frac{A-C}{2}}$$

$$\Rightarrow\tan\frac{A-C}{2}=\frac{483}{1357}\tan(68^\circ\ 45')\Rightarrow\frac{A-C}{2}=42^\circ\ 59'\Rightarrow A-C=85^\circ\ 58'$$

بناپردې:

$$\begin{matrix}A+C=137^\circ\ 30'\\A-C=85^\circ\ 58'\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{(A+C)+(A-C)}{2}=\dfrac{137^\circ\ 30'+85^\circ\ 58'}{2}=111^\circ\ 44'\\C=\dfrac{(A+C)-(A-C)}{2}=\dfrac{137^\circ\ 30'-85^\circ\ 58'}{2}=25^\circ\ 46'\end{cases}$$

د یو مثلث د داخلي نیمو زاویو مثلثاتي نسبتونه

که چېرې د ABC مثلث د محیط نیمایي s وي، په هغه صورت کې لاندې رابطې شته دي.

1. $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ ، 2. $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

3. $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ ، 4. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{ca}}$

5. $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ ، 6. $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

7. $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ ، 8. $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

ketabton.com - The Digital Library

9. $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

ثبوت

$$2\cos^2\frac{A}{2}-1=\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}\Rightarrow\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{2bc}}\quad\bullet$$

په همدې ډول:

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b^2-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}=\frac{2(s-c)2(s-b)}{2bc}$$

$$\Rightarrow\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-c)(s-b)}{bc}\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}\quad\bullet$$

د $\sin\frac{A}{2}$ له تقسیم څخه پر $\cos\frac{A}{2}$ باندې لرو، چې

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{2bc}}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\quad\bullet$$

د هیرون (Heron) فورمول

د ABC په مثلث کې د اضلاعو، محیط او مساحت ترمنځ رابطې په لاندې ډول موجودې دي.

ketabton.com - The Digital Library

$$\Delta = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

ثبوت

د مثلث مساحت د قاعدې او ارتفاع د ضرب د حاصل دنیمایي څخه عبارت دي.

بناپر دې

$$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \left(\frac{1}{2}bc\right)2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}\ \bullet$$

5 مثال

دهغې مثلث مساحت معلوم کړئ دکوم چې $a=11cm$، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل: د دستور سره سم $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{11+12+13}{2}=18$ دی. بناپردي

$$\Delta=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\sqrt{18(18-11)(18-12)(18-13)}$$

$$=\sqrt{18(7)(6)(5)}=\sqrt{3780}\approx 61.48$$

$$R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{11\times12\times13}{4(61.48)}=\frac{1716}{245.92}\approx 6.98$$

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{61.48}{18}\approx 3.42$$

په مثلث کې د ارتسام قاعدې

د ABC مثلث دضلعو او د داخلی زاویو دکوساینونو تر منځ لاندې رابطې شته دي.

ketabton.com - The Digital Library

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

د نیپر (Napier)رابطې

1. $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$
2. $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$
3. $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

د یو مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې

که چېرې د ABC په یوه مثلث کې دمحیطي دایرې شعاع R او محاطي دایرې شعاع r، مساحت یې Δ او د محیط نیمایي یې s وي. په هغه صورت کې

1. $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4\Delta}$
2. $r = \frac{\Delta}{s}$ ، 3. $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

د مثلث حل

د یومثلث درې ضلعې او دریو زاویو ته د هغې عناصر وایې. که چېرې دیو مثلث درې عنصره (په دې شرط چې درې واړه زاویې معلومې نه وي) معلوم وي.نو د دې مثلث نور درې عنصره هم معلومیدلی شي. دمثلث د عناصرو معلومولو عملیه د مثلث دحل په نامه یادوي. دیوه مثلث په حل کې دمثلث له خاصیتونو څخه کار اخیستل کیږي.

6 مثال

هغه مثلث حل کړئ چې $b = 100$ ، $c = 100\sqrt{2}$ او $B = 30^\circ$ وي.

ketabton.com - The Digital Library

حل

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\Rightarrow \sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\left(100\sqrt{2}\right)\sin 30^{\circ}}{100}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow C=45^{\circ}\Rightarrow A=180^{\circ}-\left(B+C\right)=180^{\circ}-\left(30^{\circ}+45^{\circ}\right)=105^{\circ}$$

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{100\sin 105^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}=\frac{100\times 0.2588}{0.5}=51.76$$

7 مثال

که چېرې د $\overset{\Delta}{\mathrm{ABC}}$ په مثلث کې د $a=2b$ او $|A-B|=\frac{\pi}{3}$ رابطې موجودې وي، د C زاویه وټاکئ.

حل

$$a=2b\Rightarrow A>B\Rightarrow A-B=\frac{\pi}{3}$$

د نیپر د رابطو په پام کې نیولوسره لرو، چې

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\Rightarrow \tan\frac{\pi}{6}=\frac{2b-b}{2b+b}\cot\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\cot\frac{C}{2}\Rightarrow \cot\frac{C}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow \frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$$

ketabton.com - The Digital Library

پونښتنې

د ABC قایم الزاویه مثلث چې په هغې کې $C=90^\circ$ وي، حل کړئ، داسې چې دوه عنصره يې په لاندې ډول درکړل شوي وي.

1. $c=232$, $A=52^\circ 46'$, 2. $a=450$, $b=240$
3. $c=540$, $a=380$, 4. $c=632$, $b=240$

5. د يوه بيرغ دلرګي لوړه څوکه له 200 متره فاصلې څخه د 30° زاويې لاندې ليدل کيږي، دبيرغ ارتفاع به څووي؟

6. ديوې ونې ارتفاع 400 متره ده. دهغې لوړه نقطه له 250 متره واټن (مسافې) څخه په څو درجو زاويه ليدل کيږي؟

7. ديو برج لوړه څوکه (کله) په افق کې له دوو نقطو څخه کومې چې، يوه له بلې 300 متره لرې دي، د 30° زاويې او 60° زاويې لاندې ليدل کيږي. ددې برج ارتفاع به څو وي.

د ABC مثلث د معلومو عناصرو له مخې نامعلوم عناصر معلوم کړئ

8. $b=24$, $c=16$, $\sin B=?$, $\sin C=?$
9. $b=20$, $c=70^\circ$, $A=?$, $C=?$
10. $a=3$, $b=7$, $B=85^\circ$, $\sin A=?$

11. که چېرې ديوې متوازی الاضلاع دوې مجاورې ضلعې a او b او دهغوی تر منځ زاويه $\propto$ وي وښيئ چې د متوازالاضلاع قطر عبارت دی له

$$R=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$$

12. هغه مثلث حل کړی چې $a=45$ ، $b=34$ او $\hat{C}=52^\circ$ وي.

د ABC مثلث دلاندې شرطونو په لرلوسره حل کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

13. $c = 4 \quad , \quad A = 70^\circ \quad , \quad C = 42^\circ$
14. $a = 48 \quad , \quad b = 32 \quad , \quad C = 42^\circ$
15. $a = 224 \quad , \quad b = 380 \quad , \quad c = 340$

د ABC مثلث مساحت، کوم چې شرطونه يې په لاندې ډول درکړل شوي دي حساب کړئ.

16. $b = 414 \quad , \quad c = 485 \quad , \quad A = 49^\circ\ 47'$
17. $a = 212 \quad , \quad b = 415 \quad , \quad c = 321$
18. $a = 35 \quad , \quad B = 60^\circ \quad , \quad C = 45^\circ$

19. د هغې مثلث د محيطي او محاطي دايرو شعاع ګانې پيداکړئ چې ضلعې يې 53 مټره 65 مټره او 60 مټره وي.

20. د هغې مثلث دمحاطي او محيطي دايرو شعاع ګانې پيداکړې چې ضلعې يې 55مټره، 25 مټره او70 مټره وي.

د يو اختياري مثلث ABC لپاره ثبوت کړئ، چې

21. $Rr(\sin A + \sin B + \sin C) = \Delta$
22. $\frac{abc}{4s}(\sin A + \sin B + \sin C) = \Delta$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

n	$\frac{1}{n}$	2 $1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704812829
1,000	0.001	1.001	2.716923932
10,000	0.0001	1.0001	2.718145926
100,000	0.00001	1.00001	2.718268237
1,000,000	0.000001	1.000001	2.718280469
1,000,000,000	10^{-9}	$1 + 10^{-9}$	2.718281828

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

دریم څپرکی

دتابع ګانو لیمیټ

ketabton.com - The Digital Library

د تابع ګانو لېمېټ

د تابع ګانو لېمېټ د تابع ګانو دنهايي قيمتونو دتحولاتو دسير او يا مبهمو قيمتونو معلومول دي.

د تطبيقي رياضياتو او انجينري عمده مسالی لکه مشتق، انتګرال، سلسلې او نورې د لېمېټ په وسيله تعريف او توضيح کيږي. درياضياتو هغه برخې چې دلېمېټ دمفهوم په پام کې نيولوسره تحليل او بررسي کيږي، د رياضي انالیز، کلکولس Calculus او يا دتفاضلي او انتګرال دحساب په نومونو يې يادوي. په دې څپرکي کې د تابع ګانو لېمېټ په لنډه توګه ترمطالعې لاندې نيول کيږي.

د متحول تقرب (نږدې والی)

ويل کيږي چې د x متحول يو معين عدد a ته تقرب کوي، کله چې x په اختياري توګه a ته نږدې شي يعنې د x او a ترمنځ فرق له هر کوچنی مثبت عدد $\delta > 0$ څخه کوچنی شي. پورتنی مفهوم په سمبوليکه توګه په ورته عبارتونو په لاندې ډول افاده کيږي.

$$x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0 \quad \text{يا}$$

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$$

له بنې خوا څخه د متحول تقرب $(x \to a^+)$

که چېرې په يو رديف کې د x قيمتونه له بنې خوا څخه په تدريج سره په اختياري اندازه a ته نږدې شي، لکه

$$x : a+0.1, \quad a+0.01, \quad a+0.001, \quad a+0.0001, \quad .... \quad \to a^+$$

دا ډول تقارب ته دبنې خوا يا بنې لاس تقارب (نږدې والی) وايي.

ketabton.com - The Digital Library

له چپې خوا څخه د متحول تقارب $(x \to a^-)$

کله چې د x قیمتونه له چپې خوا څخه په تدریج سره په اختیاري اندازه a ته نږدې شي، لکه

$$x : a-0,1 \quad , \quad a-0,01 \quad , \quad a-0,001 \quad , \quad a-0,0001 \quad , \quad .... \quad \to a^-$$

نو دا ډول نږدې والي (تقرب) ته دچپ خوا تقرب یا چپ لاس تقرب وایي.

کله چې یو متحول x له دواړو (ښي اوچپ) خوا ووځخه a ته تقرب وکړي، نو وایي چې x، a ته تقرب کوي

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad \left(x \to a^+ \wedge x \to a^-\right)$$

1مثال

د x متحول 4 عدد ته نږدې کړئ (تقرب ورکړئ). په بل عبارت $x \to 4$ واضح کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{llllll} x : 4,1 & , & 4,01 & , & 4,001 & , & 4,0001 & , & ... & \to 4^+ \\ x : 3,9 & , & 3,99 & , & 3,99 & , & 3,999 & , & ... & \to 4^- \end{array}\right\} \Rightarrow x \to 4$$

په یوه تابع کې د لېمېټ مفهوم

که چېرې یوه تابع $f(x)$ په یو خلاص انټرول کې چې a پکې شامل دی، تعریف شوي وي (ولو چې په a کې دتعریف وړ هم نه وي) او a ته د x په تقرب سره $f(x)$، په اختیاري توګه l ته نږدې شي. نو وایي چې د $f(x)$ لېمېټ، کله چې x و a ته تقرب وکړي له a څخه عبارت دی. په دې حالت کې لیکي چې

ketabton.com - The Digital Library

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{يا} \quad f(x) \longrightarrow l \quad x \longrightarrow a$$

پورتني بیانونه په بېلو، بېلو عبارتونو سره تعریف کېږي.

په یوه تابع کې د لیمټ تعریف

د $f(x)$ تابع لیمټ کله چې x, a ته تقرب کوي د l عدد سره مساوي دی که چېرې

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

دا سمبولیک عبارت له لاندې دوو عبارتونو سره معادل دی.

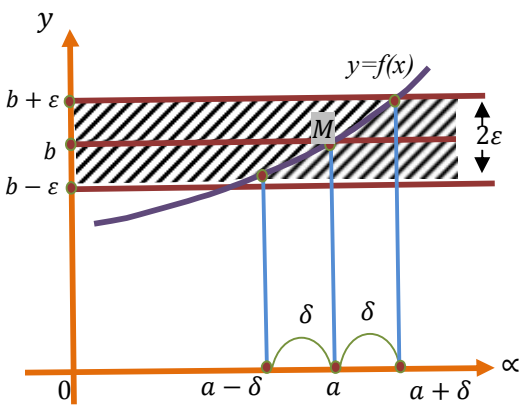
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

اویا

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (x - \delta, x + \delta) \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

پورتنی تعریف داسې هم توجیهه کیدلی شي

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \left(|x - a| \to 0 \Rightarrow |f(x) - l| \to 0 \right)$$



ketabton.com - The Digital Library

د بنې او چپ خوا لېمټونه

1. د $f(x)$ تابع د a په عدد کې بنې خوا لېمټ l_1 لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یوکوچنی عدد $\delta > 0$ وجود ولري.، داسې چې

$$x \in (a\,,\, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon\,,\, l_1 + \varepsilon)$$

او په سمبولیکه توګه لیکو

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l_1 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$$

2. د $f(x)$ تابع په a کې د l_2 چپ خوا لېمټ لري که چېرې دهر $\varepsilon > 0$ لپاره یو عدد $\delta > 0$ وجود ولري، داسې چې

$$x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2 - \varepsilon\,,\, l_2 + \varepsilon)$$

په مشابه ډول لیکي، چې

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l_2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$$

3. د $f(x)$ تابع کله چې $x \to a$، د l لېمټ لري یعنې $\lim_{x \to a} f(x) = l$ په دې شرط، چې

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \;=\; l \;=\; \lim_{x \to a^+} f(x)$$

په دې ترتیب که دیوې تابع بنې خوا او چپ خوا لېمټونه سره مساوي نه وي، نو هغه تابع لېمټ نه لري.

2 مثال

وښئ چې د $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ لپاره $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$ دی.

حل: د دې تابع بنې او چپ خوا لېمټونه مطالعه کوو.

ketabton.com - The Digital Library

x	3.5	3.1	3.01	3.001	$\to 3^+$
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	$\to 6$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$$

او

x	2.5	2.9	2.99	2.999	$\to 3^-$
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	$\to 6$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$$

لیدل کیږي چې د ښي خوا او چپ خوا لېمېټونه سره مساوي دي، یعنې

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = 6 = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

بناپر دې:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

3 مثال

ثبوت کړئ چې $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ **موجوده نه ده.**

x	2.5	2.1	2.01	2.001	$\to 2^+$
$g(x)$	1	1	1	1	$\to 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$$

په همدې ډول

ketabton.com - The Digital Library

x	1.5	1.9	1.99	1.999	$\to 2^-$
$g(x)$	-1	-1	-1	-1	$\to -1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} g(x) = -1$$

لیدل کیږي چې $\lim_{x\to 3^+} g(x) = 1 \neq \lim_{x\to 3^-} g(x) = -1$ دی نو $\lim_{x\to 2} g(x)$ موجود نه دي.

4 مثال

د لیمټ تعریف وکاروئ وښیئ چې $\lim_{x\to 3}(4x+8) = 20$ دی.

حل: د اختیاري عدد $\varepsilon > 0$ لپاره قبلوو چې $|(4x+8)-20| < \varepsilon$ وي. اوس د $\delta > 0$ عدد معلوموو.

$$|(4x+8)-20| < \varepsilon \Rightarrow |4x-12| < \varepsilon \Rightarrow 4|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

په دې ترتیب $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ او لرو، چې

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 4|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |4x-12| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |4x+8-8-12| < \varepsilon \Rightarrow |(4x+8)-20| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 3}(4x+8) = 20 \ .$$

بې نهایت، د تابع د لیمټ په توګه

ویل کیږي چې $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$، که چېرې وکړای شوچې $f(x)$ د هر اختیاري مثبت عدد څخه لوی په پام کې ونیسو. په داسې حال کې چې x په اختیاری توګه a عدد ته نږدې شي.

ketabton.com - The Digital Library

په همدې ډول وایو چې $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ که چېرې $f(x)$ له هر منفي اختیاري عدد څخه کوچنی په پام کې ونیول شي، په داسې حال کې چې x په اختیاري توګه a ته نږدې شي.

په پورتنیو حالاتو کې نشو ویلی چې f په $x = a$ کې لېمېټ لري، ځکه چې $+\infty$ او $-\infty$ عددونه، نه دي.

5 مثال

د $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ تابع په پام کې ونیسی، ځېنې قیمتونه په لاندې جدول کې محاسبه شوي دي.

x	3	2.5	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	1	4	100	10000	100000

لیدل کېږي چې په هره پیمانه چې x د ښي خوا څخه 2 ته نږدې شي، $f(x)$لوییږي. بناپر دې کولی شو $f(x)$ بی اندازې لوی کړو. په دې شرط چې x بې اندازې له ښي خوا څخه 2 ته نږدې شي، نو

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

په همدې ډول لاندې جدول په پام کې نیسو.

x	1	1.5	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	1	4	100	10000	100000

لیدل کېږي چې په هر ه پیمانه چې x له کېنې خوا څخه 2 ته نږدې شي، د $f(x)$ قیمت لوییږي.

بناپردې کولی شو $f(x)$ بې اندازې یې لوی کړو، په دې شرط چې x له چپې خواڅخه 2 ته بې اندازې نږدې شي، نو

ketabton.com - The Digital Library

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$$

په پورته دواړو حالتونوکې په لاس راځي چې $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

6 مثال

له پورتني مثال څخه پیروي وکړئ، وښیئ چې $\lim_{x\to 2^+}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$

لیمټ په بې نهایت کې

وایو چې که $x>N$ وي، نو $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ دی، که چېرې دهر مثبت عدد ε لپاره یو مثبت عدد N موجود وي، داسې چې له $|x|>N$ نامساوي څخه د $|f(x)-l|<\varepsilon$ نامساوي په لاس راشي. یعنې

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0\,,\exists N>0:|x|>N\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

پورتنی تعریف د دوو حالتونو ضمانت کوي.

اول. که $x>N$ وی، نو $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ دی.

دوم. که $x<-N$ وي، نو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ وي.

د تابع محدودیت

یوه تابع $f(x)$ په یوه ناحیه (انټرول) کې محدوده بلل کیږي، که چېرې د $|f(x)|$ قیمتونه له یو معین مثبت عدد څخه لوی نشي، یعنې

$$|f(x)|\le M$$

7 مثال

د $f(x)=\cos x$ تابع محدودیت ارزیابي کړئ.

حل: څرنګه چې دهر حقیقي عدد x لپاره د $Cosx$ قیمت د $[-1,1]$ په ترڅ

ketabton.com - The Digital Library

انټرول کې محدود دی، یعنې $-1 \le \cos x \le 1$ په بل عبارت $|\cos x| \le 1$، نو دا تابع د حقیقي عددونو په هر انټرول کې محدوده ده.

8 مثال

د $g(x)=\frac{1}{x}$ تابع محدودیت د $(1,\infty)$ او $(-\infty,-1)$ په انټرولونو کې وڅیړئ.

حل: په $(1,\infty)$ کې دهر x لپاره دتابع قیمتونه له 1 څخه کوچني دي. نو $g(x)$ تابع په دې انټرول کې محدوده ده. مګر دهمدې تابع قیمتونه په $(-\infty,-1)$ کې په اختیاري توګه لوییدلی شي. نو دا تابع په دې انټرول کې غیر محدوده ده.

د لیمټ اساسی قاعدې

که چېرې $\lim_{x\to a} f(x)$ او $\lim_{x\to a} g(x)$ معین وي، په هغه صورت کې لاندې قاعده صدق کوي.

1. د تابع ګانو د مجموعې لیمټ د هغوی د لیمټونو له مجموعې سره مساوي دی یعنې

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

2. د دوو تابع ګانو د ضرب دحاصل لیمټ د هغوی دلیمټونو دضرب له حاصل سره مساوي دی، یا:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=[\lim_{x\to a} f(x)].[\lim_{x\to a} g(x)]$$

3. د تابع ګانو د نسبت لیمټ د هغوی د لیمټونو له نسبت سره مساوي دی. په دې شرط چې دویمه تابع (مخرج) صفر نه وي. په بل عبارت:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

ketabton.com - The Digital Library

نتیجه. د $f(x)$ تابع او ثابتو عددونو c او λ لپاره لرو، چې

1. $f(x)=c \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

2. $f(x)=x \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=a$

3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)\right]^n$

4. $\lim\limits_{x\to a}[\lambda\ f(x)] = \lambda \lim\limits_{x\to a} f(x)$

5. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

9 مثال

$(i).\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=1+0=1$

$(ii).\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x+6}{3x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(5x+6)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)}=\dfrac{5\lim\limits_{x\to 2}x+6}{3\lim\limits_{x\to 2}x+2}=\dfrac{5\cdot 2+6}{3\cdot 2+2}=\dfrac{16}{8}=2.$

$(iii).\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=3+3=6.$

یادښت. په هغه حالتونو کې چې $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ او $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ وي، نو ممکنه ده چې د لېمټ خاصیتونه صدق نشي. لاندې مثالونو ته پاملرنه وکړئ

10 مثال

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}=\infty,\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x^2}=\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to 1}[x(1+x)]=2$$

11 مثال

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+5)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}(2-x^2)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[(x^2+5)+(2-x^2)\right]=7$$

ketabton.com - The Digital Library

د تابع ګانو د قیمتونو ترتیب او لېمټونه یې

1. که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې وي، داسې چې $f(x)<g(x)$ ، نو دلېمټونو د موجودیت په صورت کې لرو چې $\lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)$ یعنې

$$f(x)<g(x)\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)$$

2. که چېرې د $f(x)$ ، $g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې په یو خلاص انټرول کې کوم چې د a عدد په ځان کې لري، د هر x (ولو $x\neq a$) لپاره د $f(x)\le g(x)\le h(x)$ نامساوي ګانې صدق کړي.

او که $\lim_{x\to a} f(x)=l=\lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x)=l$ دی، یعنې

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\le g(x)\le h(x) \\ \lim_{x\to a} f(x)=l=\lim_{x\to a} h(x)\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=l$$

12 مثال

د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ په پام کې نیسو. څرګنده ده چې د $f(x)<g(x)$ لپاره $x>1$ خو

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{15-\frac{4}{x}}{5+\frac{6}{x}}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{15+\frac{4}{x}}{5-\frac{6}{x}}=\frac{15}{5}=3.$$

لیدل کیږي چې $f(x)<g(x)$ ، مګر $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)$ ده.

13 مثال

که چېرې $u(x)$ یوه تابع وي کومه چې د $1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{4}$ خاصیت ولري، نو $\lim_{x\to 0} u(x)$ معلوم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل: په څرګنده لیدل کیږي، چې

$$\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})=1=\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{4})=1$$

د پورتنۍ قضیې له مخې $\lim_{x\to 0}u(x)=1$ دی.

14 مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to a}x^n=\left(\lim_{x\to a}x\right)\left(\lim_{x\to a}x\right)...\left(\lim_{x\to a}x\right)=aaa...a=a^n$$

$$(ii).\quad \lim_{x\to a}\left(cx^4+dx^5\right)=\lim_{x\to a}\left(cx^4\right)+\lim_{x\to a}\left(dx^5\right)=ca^4+da^5$$

$$(iii).\quad \lim_{x\to a}\frac{8x^2-5x+3}{4x^3+7x+6}=\frac{\lim_{x\to a}\left(8x^2-5x+3\right)}{\lim_{x\to a}\left(4x^3+7x+6\right)}=\frac{8a^2-5a+3}{4a^3+7a+6}$$

د پولینومي او ناطقو تابع ګانو لیمټ

که چېرې $P(x)$ او $Q(x)$ پولینومونه وي، داسې چې $Q(x)\neq 0$ نو

$$1.\ \lim_{x\to a}P(x)=P(a)\quad ,\quad 2.\ \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

15 مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to 2}\left(x^3-5x^2+4x+9\right)=2^3-5\cdot 2^2+4\cdot 2+9=5$$

$$(ii).\quad \lim_{x\to 3}\frac{2x^4-5x+8}{-x^3+4x^2+6}=\frac{2\cdot 3^4-5\cdot 2+8}{-3^3+4\cdot 3^2+6}=\frac{150}{15}=10$$

په بې نهایت کې د پولینوم لیمټ

د پولینوم لیمټ کله چې $x\to\pm\infty$ وي د هغه حد د لیمټ سره مساوي دي، کوم چې لوړتوان لري.

ketabton.com - The Digital Library

16مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to\infty}\left(2x^4-8x^3-3x^2+1\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x^4\left(2-\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\right]$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}x^4\right)\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=\left(\lim_{x\to\infty}x^4\right)\times 2=\infty\times 2=\infty$$

د لیمټ مبهم حالتونه

د جمع د حاصل، ضرب د حاصل او د تابع ګانو د نسبت د لیمټونو په حسابولو کې ځینې وخت دمبهمو شکلونو $\infty-\infty$، $0\cdot\infty$، $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ سره مخامخ کیږو چې دلته مونږ د هغوی د نمونې ترکتنې لاندې نیسو.

لومړی حالت $\frac{0}{0}$: که چېرې $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ د $\frac{0}{0}$ شکل ولري، په داسې حالت کې چې $f(x)$ او $g(x)$ پولینومي تابع ګانې دي، په صورت او مخرج کې د اختصار وړ مشترک فکتور $x-a$ دی. چې ځینې وختونه امکان لري، دوه ځلیز او یا څوځلیز وي.

17مثال

د هغو لیمټونو څو نمونې چې د $\frac{0}{0}$ حالت ولري، تحلیل کیږي

$$a.\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}=\infty$$

$$b.\quad \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8.$$

$$c.\quad \lim_{h\to o}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to o}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to o}\frac{h(2x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}(2x+h)=2x.$$

ketabton.com - The Digital Library

18مثال

$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}$ پیدا کړئ.

حل: دلته $x=y^5$ او $a=b^5$ وضع کوو، په دې ترتیب:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}=\lim_{y\to b}\frac{y-b}{y^5-b^5}=\lim_{y\to b}\frac{y-b}{(y-b)(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}$$
$$=\lim_{y\to b}\frac{1}{(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}=\frac{1}{5b^4}=\frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}}$$

دوهم حالت $\frac{\infty}{\infty}$. که چېرې $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل غوره کړي، په دې حالت کې $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ د $\frac{0}{0}$ په شکل بدلیږي.

له دې سره سره چې د دې دستور په رعایت سره، کولی شو په نهایي تحلیل کې ابهام رفع کړو، ولې امکان لري چې دمسالې شکل کله په اسانۍ سره دحل وړ وي، دمثال په توګه که د دوو تابع ګانو، له هغې جملې څخه د دوو پولینومونو په نسبت کې د $\frac{\infty}{\infty}$ حالت څرګنده شي، نوپه دې حالت کې صورت او مخرج په عین وخت کې دمتحول پر لوړ طاقت ویشو، ابهام له منځه ځي.

19 مثال

دهغه حالت دلېمټونو چې د $\frac{\infty}{\infty}$ حالت لري، څو نمونې وړاندې کوو.

$$(i)\ .\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$$

ketabton.com - The Digital Library

$$(ii).\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{4x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{\infty+0}{4+0}=\frac{\infty}{4}=\infty$$

$$(iii).\quad \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{\sqrt{9+\frac{1}{x^4}}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

$$(iv).\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-8x^2+5}{4x^5+x^4-6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^5}}{4+x-\frac{6}{x^4}}=\frac{2-0+0}{4\infty+\infty-0}=\frac{2}{\infty}=0$$

نتیجه. که چېرې د $p_m(x)$ پولینوم درجه m اود $p_n(x)$ پولینوم درجه n وي، په دې حالت کې د $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p_m(x)}{p_n(x)}$ د پیداکولو لپاره دکسر صورت او مخرج په x^α تقسیمو په داسې حال کې چې $\alpha=\max(m,n)$ دی. په لاس راځي، چې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p_m(x)}{p_n(x)}=\begin{cases}c & , \quad m=n\\ \pm\infty & , \quad m>n\\ 0 & , \quad m<n\end{cases}$$

کله که $m=n$ وي، نو c ثابت عدد چې دصورت او مخرج دهغو حدونو دضریبونو نسبت دی، کوم چې لوړطاقتونه لري، مطلوب لیمټ په لاس راکوي

20 مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to\infty}\frac{6\times2^{5x}-3\times2^x-8}{3\times2^{5x}-2^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{5x}\left(6-\frac{3}{2^{4x}}-\frac{8}{2^{5x}}\right)}{2^{5x}\left(3-\frac{3}{2^{4x}}+\frac{1}{2^{5x}}\right)}=\frac{6}{3}=2$$

ketabton.com - The Digital Library

دریم حالت $0\times\infty$. داسې امکان شته چې $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ د $0\times\infty$ په شکل وي. نوپه داسې یو حالت کې $f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ د $\frac{0}{0}$ شکل ځان ته غوره کولی شي او دا حالت په اصل کې د $\frac{0}{0}$ د حالت معادل دی.

21 مثال

$$\lim_{x\to5}\left[(x^2-25).\frac{1}{x-5}\right]=\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=10$$

څلورم حالت $\infty-\infty$. که چېرې $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]$ د $\infty-\infty$ شکل ولري، په هغه صورت کې $f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$ په یوله $\frac{\infty}{\infty}$ او یا $0\times\infty$ حالتونو بدلیږي. په هغه صورت کې چې داحالت د دووکسرونو په تفریق (تفاضل) یا دجذري افادو په تفاضل کې پیښ شي، نو دکسرونو دیو له بل څخه د تفریق کولو یا د جذر لرونکو افادو ضرب او تقسیم دهغوی پر مزدوجونو باندې، امکان لري، نوموړی ابهام د حذف وړ وي.

22 مثال

د $\infty-\infty$ ډوله لېمټونه نمونه وار بررسی کوو:

$$(20).\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

$$(21).\quad \ell im_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})=\ell im_{x\to1}\frac{1+x-1}{1-x^2}=\ell im_{x\to1}\frac{x}{1-x^2}=\infty$$

$$(22).\quad \lim_{x\to\infty}\left(x^5-8x^3\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x^5\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\right]=\infty\times1=\infty$$

ketabton.com - The Digital Library

د مثلثاتي تابع ګانو لېمټونه

که د مثلثاتی تابع ګانو د لېمټونو په حسابولو کې مبهم حالتونه منځ ته راشي چې تر ټولو مهم شکل په دې ډول لېمټونو کې د $\frac{0}{0}$ شکل دی او غالبا داشکل دیو عمده فکتور $\frac{\sin x}{x}$ په تشخیص کولوسره رفع کیږی.

مګر دهغې دمخه لاندې نمونې له نظره تیروو.

23مثال

$(i).\ \lim_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$, $(ii).\ \lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$

$(iii).\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1$, $(iv).\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos x=\cos\frac{\pi}{2}=0$

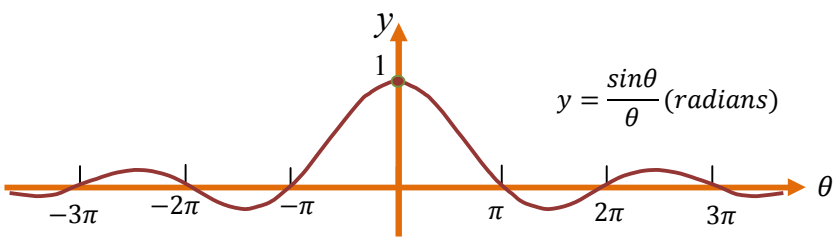
$(v).\ \lim_{x\to 0}\tan x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim_{x\to 0}\sin x}{\lim_{x\to 0}\cos x}=\frac{0}{1}=0$

$(vi).\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x} = \infty$

اساسي قضيه

کله چې x زاویه صفر ته تقرب کوي، $sinx$ او x نسبت 1 ته تقرب کوي یعنې

$$\lim_{x\to o}\frac{\sin x}{x} = 1$$



ketabton.com - The Digital Library

24 مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot 1=1$$

$$(ii).\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\sin(\alpha x)}{\alpha x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=\alpha\cdot 1=\alpha$$

$$(iii).\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

$$(iv).\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha\ x)}{\sin(\beta\ x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\frac{\sin(\alpha\ x)}{\alpha\ x}}{\beta\frac{\sin(\beta\ x)}{\beta\ x}}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha\ x)}{\alpha\ x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\beta\ x)}{\beta\ x}}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

$$(v).\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

د طاقتنما (اکسپونشیل) او لوګارتمي تابع ګانو لېمټ

په لوګارتمي اوطاقتنما تابع ګانو کې هم د لېمټ نیولو په وخت کې مبهم حالتونه منځ ته راځي، په خاصه توګه د 1 ډوله مبهم حالت په دې تابع ګانو کې تر سترګو کیږي.

د طاقتنما تابع ګانو په لېمټونو کې مبهم شکل درفع کولو لپاره دا لاندې قضیه محراقي ماهیت لري.

اساسي قضیه

که چېرې n بې نهایت ته تقرب وکړي، نو $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ افاده $e=2,7182818284\ldots$ عدد ته تقرب کوي یعنې

ketabton.com - The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

یادښت. که چېرې دقیق ثبوت ته له مراجعې څخه پرته د $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ دترادف قیمتونه په یو جدول کې په تدریج سره فهرست شي،نو لرو چې

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1,000	0.001	1.001	2.716923932
10,000	0.0001	1.0001	2.718145926
100,000	0.00001	1.00001	2.718268237
1,000,000	0.000001	1.000001	2.718280469
1,000,000,000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

بناپر دې $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=2,718281828\ldots$ دی. د $e=2,7182818284\ldots$ عدد د اویلر د عدد په نامه یادیږي.

1. که x بې نهایت ته تقرب وکړي، د $\varepsilon(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ تابع $e=2,7182818284\ldots$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

ketabton.com - The Digital Library

نتیجه

1. $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ ، 2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ، 4. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

ثبوت

1. $x=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

2. $u=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$

2. د طبیعي لوګارتم د خاصیتونو څخه لرو، چې

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

3. په دې برخه کې لاندې تعویض په پام کې نیسو.

$$y=e^x-1\quad\Rightarrow\quad e^x=1+y\quad\Rightarrow\quad x=\ln(1+y)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1\cdot$$

25 مثال

a. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}=e.1^2=e.1=e$

ketabton.com - The Digital Library

$$b.\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}=1$$

$$c.\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x-1+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x-1+3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+3}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{3}=e^{4}\cdot 1=e^{4}.$$

عمومي حالت. په عمومي ډول کې د لوګارتم او لېمېټ د خاصیتونو په پام کې نیولوسره لرو چې

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\lim_{x\to a}\left[e^{\ln u(x)}\right]^{v(x)}=\lim_{x\to a}\left[e^{\left[\ln u(x)\right]v(x)}\right]=e^{\lim\limits_{x\to a}\left[\left[\ln u(x)\right]v(x)\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\left[\ln u(x)\right]\lim\limits_{x\to a}v(x)}=e^{\ln\left[\lim\limits_{x\to a}u(x)\right]\lim\limits_{x\to a}v(x)}=\left[\lim_{x\to a}u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\left[\lim_{x\to a}u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$$

که چېرې د یوې طاقتنما (اکسپوننشیل) تابع لېمېټ د $\lim\limits_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)}$ په شکل وي او د 1^{∞} مبهم شکل ځان ته غوره کړي، نوپه دې حالت کې د $\alpha=u(x)-1$ په عوض کولو سره لرو، چې

$$\lim_{x\to a}u^{v}=\lim_{x\to a}\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+u(x)-1)^{\frac{v(x)}{u(x)-1}(u(x)-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v(x)}{\alpha}\alpha}\right]=\left[\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v(x)\alpha)}$$

ځرنګه چې $\alpha=u-1$ او $u\to 1$، نو $\alpha\to 0$ په نتیجه کې

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}\left[v(u-1)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to a}\left[v(u-1)\right]}$$

ketabton.com - The Digital Library

بناپر دې:

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)} = e^{p} \quad , \quad p:=\lim_{x\to a}\left[v(u-1)\right]$$

باید یادونه وکړو چې پورتنی فورمول یوازې د 1^{∞} په مبهم حالت کې د تطبیق وړدی.

26 مثال

$$I.\quad \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^{1} = e$$

$$II.\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{p} \quad , \quad (v=\frac{1}{x}, u=\cos x)$$

$$p=\lim_{x\to 0}\left[v(u-1)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-(\cos^2 x+\sin^2 x)}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot 0=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1$$

یادښت. د مختلفو تابع ګانو په لېمټ کې د $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0\cdot\infty$ ، $\infty-\infty$ او 1^{∞} مبهم حالتونه په قسمي توګه بررسي شوي دي.

ketabton.com - The Digital Library

په پنځم څپرکي کې د هوپتیال دقاعدو تر عنوان لاندې پورتني پنځه حالتونه د دوو نورو مبهمو حالتونو 0^0 او ∞^0 په شمول په عمومي توګه د مشتق په مرسته تر مطالعي لاندې نیول شوی دي.

د تابع ګانو متمادیت (پیوستګي)

یوه تابع $f(x)$ د $x = a$ په نقطه کې متمادي بلل کیږي، که چېرې دالاندې درې شرطونه صدق کړي.

اول ــ د f تابع په a کې تعریف شوي وي.

دوهم ــ د f تابع په a کې لېمټ ولري.

دریم ــ د f تابع لېمټ په a کې له $f(a)$ سره مساوي وي یعني

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

کله که د $f(x)$ تابع د انټرول په هره نقطه کې متمادي وي، نو $f(x)$ په هغه انټرول کې متمادي بلل کیږي.

قضیه

1. که چېرې $\lim_{x \to a} g(x) = b$ اوده f تابع په $x = b$ کې متمادي وي، نو

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(b)$$

2. که $g(x)$ تابع په $x = a$ او $f(x)$ تابع په $x = g(a)$ کې متمادي وي، نو د $f(g(x))$ تابع په $x = a$ کې متمادي ده. یعني

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a))$$

نتیجه:

1. $\lim_{x \to a} (f(x))^{\alpha} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

ketabton.com - The Digital Library

2. $\lim_{x \to a} \left[a^{f(x)} \right] = a^{\lim_{x \to a} f(x)}$

3. $\lim_{x \to a} \left(\log_b f(x) \right) = \log_b \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)$

4. $\lim_{x \to a} \left(\sin f(x) \right) = \sin \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)$

غیر متمادیت (انفصال)

که چېرې د f تابع په $x = a$ کې حد اقل یو له دریو شرطونو څخه صدق نه کړي نو وایو چې f په a کې غیر متمادی ده او a د هغې دانفصال نقطه ده.

انفصال په درې ډوله تشخیص کیږي.

لومړی ډول ــ د f تابع په $x = a$ کې د کینې اوښي خوا لېمټونه لري، مګر دواړه سره مساوي نه وي.

دوهم ډول ــ که چېرې حد اقل یوله دوو لېمټونو څخه موجود نه وي.

دریم ډول ــ که چېرې یوه تابع په یوه نقطه کې لېمټ ولري ولې په هغې نقطه کې تعریف شوي نه وي (یوازې یوه نقطه خالي وي) په دې حالت کې کیدای شي انفصال له منځه ولاړشي.

27 مثال

(الف) د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع په $x=0$ کې غیر معینه ده او دا نقطه د تابع د تعریف په ناحیه کې شامله نه ده، نو دا دوهم او دریم ډول انفصال دی.

(ب) د $g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ تابع په $x=2$ کې لېمټ لري، خو 2 د $g(x)$ دتعریف په ناحیه کې شامل نه دی، نودا انفصال دریم ډوله انفصال دی.

ketabton.com - The Digital Library

په حقیقت کې د $g(x)$ او $h(x)=x+2$ تابع ګانې له $x=2$ نقطې څخه پرته یو پر بل سره منطبقې دي، خو د $g(x)$ تابع ګراف یوازې په $x=2$کې یوه خالي نقطه لري او کولی شو دا انفصال په لاندې ډول حذف کړو

$$g^*(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq 2 \\ 4 & x=2 \end{cases}$$

د متمادیت خاصیتونه

که چېرې د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې متمادي وي، نود $f(x)g(x), f(x)\pm g(x)$ او $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع ګانې هم متمادي دي (په یوه نقطه یا انټرول کې) د $\frac{f(x)}{g(x)}$ په حالت کې باید مخرج په اړونده نقطه یا انټرول کې صفر نه وي.

څرنګه چې د $f(x)=x$ تابع متمادي دی، نو د هر طبیعي عدد n لپاره د $g(x)=x^n$ تابع هم متمادي ده، په نتیجه کې هره پولینومي تابع متمادي ده.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

لاندې لیمټونه محاسبه کړئ.

1. $\lim_{x\to 4} 25$, 2. $\lim_{x\to 4}(5x)$, 3. $\lim_{x\to 4}(6x+8)$

4. $\lim_{x\to 3}(3x^2-5x+9)$,5. $\lim_{x\to 0}(3x^8-5x^4+9x+1)$

6 . د $f(x)=|x-2|$ تابع لپاره $\lim_{x\to 2+} f(x)$ او $\lim_{x\to 2-} f(x)$ حساب کړئ.

7. د $f(x)=\dfrac{3x-2}{|x|-2}$ تابع لپاره $\lim_{x\to 0+} f(x)$ او $\lim_{x\to 0-} f(x)$ حساب کړئ.

8 د $f(x)=\begin{cases}3x-2, x\le 1\\ 2x+a, x>1\end{cases}$ په تابع کې a داسې وټاکې چې $\lim_{x\to 1} f(x)$ وجود ولري.

لاندې لیمټونه حساب کړئ.

9. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$, 10. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$, 11. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$

12. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$, 13. $\lim_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$, 14. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$

15. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{2x^2}$, 16. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$, 17. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

18. $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^3}$, 19. $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x+3}{x^2-1}$, 20. $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-3}{2x^2+7x-1}$

21. $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$, 22. $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{16x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{4x+\sqrt{x}}}$

23. $\lim_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}$, 24. $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+2}$, 25. $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{-\sqrt{2}x}$

ketabton.com - The Digital Library

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$ ، 27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$ ، 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1+x}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n}-1}{2^{n}+2}$ ، 30. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^{2}}$ ، 31. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$

32. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[5]{x^{5}-x^{3}+1}}{2x^{2}-1}$ ، 33. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-1}$ ، 34. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x-1}$

35. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+\sqrt{x}}}$ ، 36. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}}\right)$

د لاندې هرې یوې تابع لپاره هغه فاصله معلومه کړئ چې تابع پکې متمادي وي.

37. $f(x)=x^{2}-3x+4$ ، 38. $g(x)=\frac{4}{x^{2}-8+10}$

39. $f(x)=x^{4}+e^{x}-5$ ، 40. $g(x)=\log(2x-6)$

41. $f(x)=\frac{e^{x}+4x}{3e^{2x}-3}$ ، 42. $g(x)=\sqrt{25-x^{2}}$

43. وښیی چې د $f(x)=x^{3}$ تابع دټولو حقیقي عددونو په سیټ کې متمادي ده.

44. ثبوت کړی چې $g(x)=|x|$ د $x=0$ په نقطه کې متمادي ده.

ketabton.com - The Digital Library

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

څلورم څپرکی

دتابع ګانو مشتق

ketabton.com - The Digital Library

د تابع ګانو مشتق

د مشتق مقدماتي فکر د اولسمې میلادي پیړۍ په لومړیو کې د فرانسوي ریاضي پوه پیرفرما له خوا منځ ته راغلی دی، خو د هغې دقیق مفهوم دهمغې پیړۍ په منځ کې د دوو مشهورو ریاضي پوهانو اسحق نیوتن (انګلیسي) او لایب نېتز (الماني) له خوا په یووخت، مګر یو له بل څخه مستقل بنیان ګذاري شوی دی.

نن ورځ په ریاضیاتو کې مشتق د تفاضلي حساب او انتګرال یو اصلي او مهم مفهوم دی.

د ریاضیاتو ځینې عمده بحثونه، لکه انتګرالونه او تفاضلي معادلات د مشتق پرمفهوم بنا شوي دي. مشتق یو اوږد بحث دی، له دې سره سره به کوښښ وشي چې دا موضوع د امکان په صورت کې فشرده او لنډه تر مطالعې لاندې ونیول شي.

د مشتق تعریف

که چېرې د $y = f(x)$ په تابع کې د x متحول د h (یا Δx) په اندازه زیات شي نو نومورې تابع د $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ په اندازه زیاتوالی (تزاید) کوي.

د دی تابع اومتحول د زیاتولو نسبت عبارت دی له

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

کله چې

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

موجود وي، ویل کیږي چې نومورې تابع د x په نقطه کې مشتق لري. د پورتني یاد شوي لېمېټ لاس ته راوړنې ته دمشتق نیونې عملیه وایي. د $y = f(x)$ تابع مشتق د پورتنی نمونې سره سم په یو له لاندې سمبولونو سره ښودل کیږي.

ketabton.com - The Digital Library

$$y' = f'(x) \text{ ، } \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \text{ اویا } Dy = Df(x)$$

یعنې

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اویا

$$y' := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} := f'(x)$$

د وروستنیو رابطو سره معادل د $f(x)$ تابع مشتق په لاندې ډول تعریف کیږي.

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

او د $f(x)$ مشتق په $x = x_0$ کې عبارت دی له

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

د مشتق په حسابونه او د قضیو په ثبوت کې دا پورتني هر یو تعریف په کاریږي.
خو د هغوی څخه ځینې په خاصوموارد و کې ګټور او مناسب وي.

1مثال

د $f(x) = x^2$ تابع مشتق لاس ته راوړئ.

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

بناپردې

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

مشتق پذيري او متماديت

هغه تابع چې په يوه نقطه کې مشتق پذيره وي، نو په هغه نقطه کې متمادی هم وي مګر برعکس ديوې تابع متماديت دهغې تابع د مشتق پذيری لپاره کافي نه ده يعنې دا امکان شته چې يوه تابع په يوه نقطه کې متمادي وي، ولې مشتق پذيره نه وي.

د مثال په توګه د $f(x)=|x|$ تابع په $x=0$ کې متمادي ده اما مشتق پذيره نه ده.

د طاقت تابع مشتق

د $f(x)=x^n$ ، $(n\in\mathbb{N})$ تابع مشتق عبارت دی له $f'(x.)=nx^{n-1}$

ثبوت

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n$$

$$=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n-x^n$$

$$\Rightarrow f(x+h)-f(x)=nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\ldots+h^n$$

د وروستنی رابطې د تقسيم څخه پر h باندې په لاس راځي چې

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}xh+\ldots+h^{n-1}$$

$$f'(x)=\ell im_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\ell im_{h\to 0}(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}xh+\ldots+h^{n-1})$$

$$\boxed{\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}\Rightarrow (x^n)'=nx^{n-1}}$$

ketabton.com - The Digital Library

پورتنی قاعده د طبیعي عدد n لپاره ثبوت شوه، خودا فورمول کله چې n حقیقي عدد وي هم صدق کوي چې په وروسته کې به ثبوت شي. (دلوګارتم په مرسته دمشتق نیونې په مبحث کې).

2 مثال

دپورتنۍ قاعدې له مخې د $y=\sqrt{x}$ مشتق پیداکوو.

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad (\sqrt{x})' \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3 مثال

د $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ د تابع مشتق په لاس راوړئ.

$$y'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}$$

4 مثال

د ثابتې تابع $g(x)=c$ مشتق حساب کړئ.

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}\Rightarrow g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

د مشتق نیونې الجبري قاعدې

که چېرې د u او v تابع ګانې د مشتق نیونې وړوي، نو

$$(u+v)'=u'+v' \quad , \quad (uv)'=u'v+uv' \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

5 مثال

که v,u او w دمشتق نیونې وړ تابع ګانې وي.

$$(uvw)' = \left[u(vw)\right]' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw')$$
$$\Rightarrow (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

6 مثال

که v دمشتق نېونې وړ تابع او c یو ثابت عدد (ثابته تابع) وي، نو

$$(cv)' = c'v + cv' = 0 \cdot v + cv' = cv' \Rightarrow (cv)' = cv'.$$

د مثلثاتي تابع ګانو مشتق

د ساین او کوساین مثلثاتي تابع ګانو مشتق عبارت دی له

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x}$$

7 مثال

د $y = tanx$ او $y = cotx$ تابع ګانو مشتق پیداکړی.

حل. دمشتق نیونې دقاعدو له مخې لرو چې

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$= -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\Rightarrow (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad , \quad (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

8 مثال

د $y = \frac{x^2}{\cos x}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

$$y' = \frac{2x\cos x - (-\sin x)x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$$

9 مثال

د $y = x^3 \sin x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = (x^3)'\sin x + (x^3)\sin' x = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

د لوګارتمي تابع ګانو مشتق

د لوګارتمي تابع $y = \log_a x$ مشتق عبارت دی له $y' = \frac{1}{x}\log_a e$ یعني

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e}$$

نتیجه. په خاصو حالتونو کې دطبیعي او معمولي لوګارتمونو لپاره لرو، چې

$$(\ln x)' = (\log_e x)' = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$$

$$(\log x)' = (\log_{10} x)' = \frac{1}{x}\log_{10} e = \frac{1}{x}\log e.$$

بناپردې

ketabton.com - The Digital Library

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad , \quad (\log x)' = \frac{1}{x}\log e$$

د مرکبو تابع ګانو (تابع تابع) مشتق

که چېرې $y = f(u)$ او $u = g(x)$ یعنې $y = f(g(x))$ وي، په دې صورت کې

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) \text{ یا } y'_x = y'_u\, u'_x \text{ اویا } f'_x(g(x)) = f'_g(g(x))g'_x(x)$$

مثال10

د $y = \sin(ax^2 + bx + c)$ مشتق پیداکړئ.

$u = ax^2 + bx + c$ او $y = \sin u$ ، $u'_x = 2ax + b$ او $y'_u = \cos u$

$$\Rightarrow y'_x = y'_u u'_x = (\cos u)(2ax + b) = (2ax + b)\cos(ax^2 + bx + c).$$

مثال11

د $g(x) = (\ln x)^3$ تابع مشتق پیدکړئ.

$$g'(x) = 3(\ln x)^2(\ln x)' = \frac{3}{x}(\ln x)^2.$$

د ضمني تابع ګانو مشتق

که چېرې د x او y متحولونه د $y = f(x)$ رابطې په وسیله یو دبل سره مربوط شي. په دې حالت کې وایې چې y د x متحول صریحه تابع ده. ولې دا امکان شته چې د x او y ترمنځ اړیکي د $F(x,y)$ رابطې په مرسته تعین شوي وي په دې صورت کې ویل کیږي چې y د x ضمني یاغیر صریحه تابع ده.

د مثال په توګه $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ دوه صریحي تابع ګانې $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ او $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ افاده کوي، په داسې حال کې چې پورتنۍ معادله دنومورې تابع ګانو ضمني حالت دی.

ketabton.com - The Digital Library

د ضمني تابع y مشتق نیونې لپاره نظر x متحول ته، په معموله توګه د معینې معادلې د واړه خواوې نظر x ته دا ډول مشتق نیسو چې په هغې کې د y متحول نظر x ته مربوط فرض شي.

12مثال

د y مشتق نظر x ته په $x^2+y^2-r^2=0$، ضمني تابع کې پیداکړئ، دلته r یو ثابت عدد دی.

حل

$$(x^2+y^2-r^2)'=0\Rightarrow 2x+2yy'=0\Rightarrow y'_x=-\frac{x}{y}.$$

13مثال

د yمشتق نظر x ته، په ضمني تابع $y^6-y-x^2=0$ کې په لاس راوړئ.

حل: $$y^6-y-x^2=0\Rightarrow 6y^5y'-y'-2x=0\Rightarrow y'=\frac{2x}{6y^5-1}$$

د لوګارتم په مرسته مشتق نیونه

په ځینو مواردو کې د تابع ګانو مشتق دلوګارتم په مرسته نیول کیږي، داسې چې په اوله کې د $y=f(x)$ رابطې دواړو خواو طبیعي لوګارتم نیسو.

$$\ln y=\ln f(x)$$

په $lnf(x)$ کې دلازمو عملیو سره، د پورتني رابطې دواړه خواوې دضمني تابع په توګه مشتق نیولی شو یعنې

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow f'(x)=f(x)\big[\ln f(x)\big]'$$

ketabton.com - The Digital Library

د طاقت د تابع مشتق

که څه هم د $y=x^n$ ، $n\in\mathbb{N}$ مشتق مولاس ته راوړی دی، خو اوس د $y=x^a$ ، $\alpha\in\mathbb{R}$ تابع مشتق دلوګارتم په مرسته پیداکوو.

$$y=x^{\alpha}\Rightarrow \ln y=\ln x^{\alpha}\Rightarrow \ln y=\alpha\ln x\Rightarrow (\ln y)'_x=(\alpha\ln x)'_x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow y'=\frac{\alpha}{x}y=\frac{\alpha}{x}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\Rightarrow \left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

د اکسپوننشیل تابع مشتق

د $y=a^x$ تابع مشتق په دریو طریقو نیول کیدلی شي. دمشتق له تعریف څخه د معکوسي تابع له مشتق څخه او دلوګارتم په مرسته مشتق نیونه. اوس وروستني طریقه کاروو.

$$y=a^x\Rightarrow \ln y=\ln a^x\Rightarrow \ln y=x\ln a\Rightarrow (\ln y)'_x=(x\ln a)'_x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\ln a\Rightarrow y'=y\ln a=a^x\ln a\Rightarrow y'=a^x\ln a$$

$$\Rightarrow (a^x)'=a^x\ln a$$

نتیجه

$$(e^x)'=e^x\ln e=e^x\Rightarrow \left(e^x\right)'=e^x$$

مثال 14

د $y=x^{2x}$ تابع مشتق دلوګارتم په مرسته پیداکړئ.

$$\ln y=\ln x^{2x}\Rightarrow \ln y=2x\ln x$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\Rightarrow (\ln y)' = (2x\ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = 2(\ln x + 1)y = 2(\ln x + 1)x^{2x}.$$

15مثال

د $y = u^v$ تابع، u او v د x تابع ګانې دي، مشتق په لاس راوړئ.

$$\ln y = \ln u^v \Rightarrow (\ln y)' = (v\ln u)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = v'\ln u + v(\ln u)'$$

$$\Rightarrow y' = (v'\ln u + v\frac{u'}{u})y \Rightarrow y' = (v'\ln u + v\frac{u'}{u})u^v.$$

16مثال

د $y = \dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x.$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

$$\Rightarrow y' = \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right]\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}.$$

د معکوسو تابع ګانو مشتق

که f او g مشتق پذیرې او یو د بل دوې معکوسې تابع ګانې وي یعنې

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

په دې صورت کې

ketabton.com - The Digital Library

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{يا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ثبوت. د ضمني تابع ګانو او د تابع تابع مشتق د خاصيتونو په پام کې نيولو سره لرو، چې

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} \bullet$$

17مثال

د $y = a^x$ تابع مشتق دمعکوسې تابع له مشتق څخه په استفاده په لاس راوړو.

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{(1/y)\log_a e} = y \ln a \Rightarrow y' = a^x \ln a.$$

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق، کيدلی شي د مثلثاتي تابع ګانو د مشتق په کارولو سره پيدا کړو.

1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، 2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ، 4. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

ثبوت

1. $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ketabton.com - The Digital Library

2. $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4. $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$\Rightarrow (arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y$$

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

18مثال

د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}.$$

هایپربولیکي تابع ګانې او دهغوئ مشتقات

د دوو طاقتنما $y = e^x$ او $y = e^{-x}$ تابع ګانو څخه کولی شو، څلور تابع ګانې په لاندې ډول تعریف کړو.

ketabton.com - The Digital Library

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

پورتني تابع ګاني د هايپربوليکو تابع ګانو په نامه يادېږي او دايروي (مثلثاتي) تابع ګانو ته ورته خاصيتونه لري.

$$\begin{cases} \cos^2 hx - \sin^2 hx = 1 \\ \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y . \end{cases}$$

پورتني رابطې په اسانۍ سره ثبوت کيدلی شي. د مثال په ډول

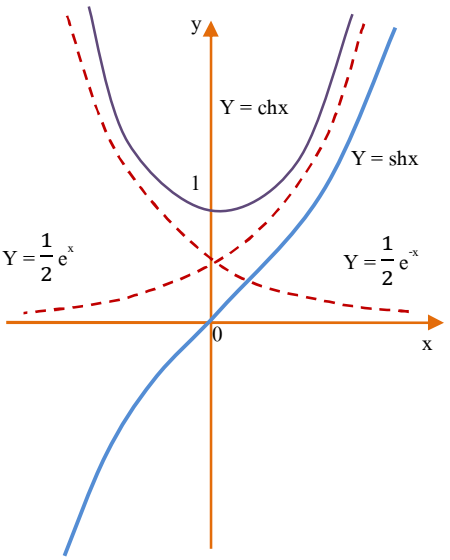
$$\cos^2 hx - \sin^2 hx = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

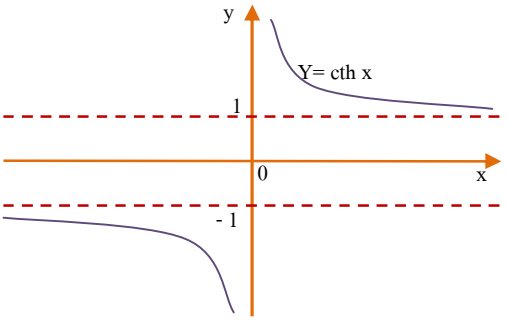
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

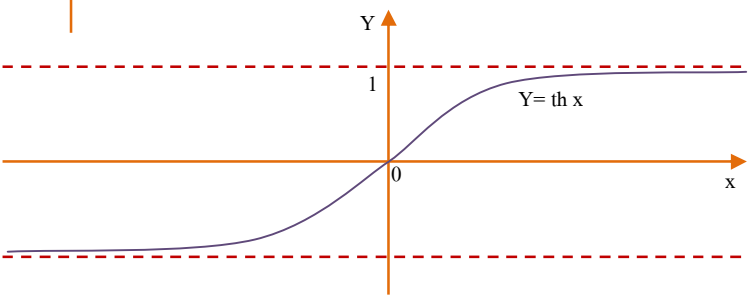
دوې نورې رابطې هم دتعريف له مخې له ښي نه چپ ته په لاس راوړلی شو.

دهايپربوليکو تابع ګانو ګرافونه پهلاندې شکلونو کې ترسيم شوي دي

ketabton.com - The Digital Library







د هایپربولیکو تابع ګانو نومونه له دې ځایه راپورته شوي دی چې د دایروي تابع ګانو دهایپربول د موجودیت سره شباهت لري.

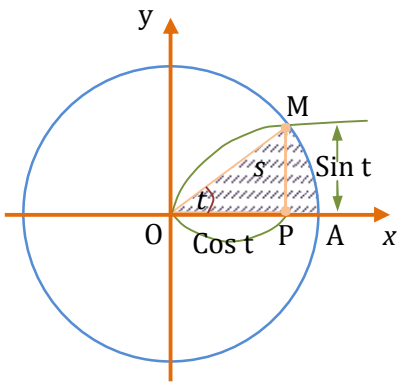
$x^2 - y^2 = 1$ (هایپربول) $x^2 + y^2 = 1$ (دایره)

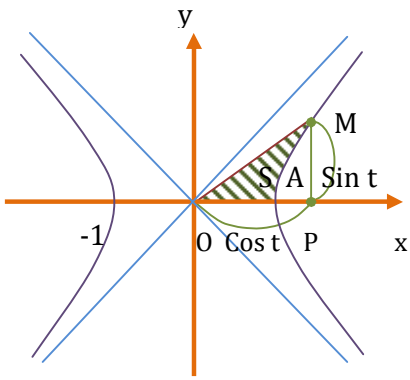
$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

ښي خواته د هایپربولا معادلې او چپ خواته د دایرې معادلې هر یوه په اصلي او پارامتریکه توګه ښودل شوي دي.

ketabton.com - The Digital Library

که چېرې دپورتنیو معادلو اړونده د دایرې او هایپربولا لاندې شکلونه په پام کې ونیول شي





په دایره کې dt پارامتر په عددې توګه، لهAOM زاویې سره او یا د دایرې اړونده AOM قطاع دمساحت له دوه چنده سره برابره دی. یعنې $t = 2s$ په مشابه ډول په هایپربولا کې هم dt پارامتر دهایپربولا دAOM قطاع دوه برابره دی. دهایپربولیکو تابع ګانو مشتق نیونه د دوی دتعریف او داکسپوننشیل تابع ګانو له مشتق څخه په لاس راتلې شي.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\Rightarrow (\sinh x)' = \cosh x \quad , \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

د $\tanh x$ او $\coth x$ مشتق نیونه بیاد $\sinh x$ او $\cosh x$ دنسبتونو په توګه په اسانې سره پیداکیدای شي.

ketabton.com - The Digital Library

$$\tanh\ x = \frac{\sinh\ x}{\cosh\ x} \quad , \quad \coth\ x = \frac{\cosh\ x}{\sinh\ x}$$

$$(\tanh\ x)' = \left(\frac{\sinh\ x}{\cosh\ x}\right)' = \frac{\cos^2 hx - \sin^2 hx}{\cos^2 hx} = \frac{1}{\cos^2 hx}$$

$$(\coth x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sin^2 hx - \cos^2 hx}{\sin^2 hx}$$

$$= \frac{-(\cos^2 hx - \sin^2 hx)}{\sin^2 hx} = \frac{-1}{\sin^2 hx}$$

19مثال

که چېرې $\sinh x = 2$ وي، نو نورې ټولې هایپربولیکي تابع ګانې حساب کړئ او د x عدد په لاس راوړئ.

حل

$$\cos^2 hx - \sin^2 hx = 1 \Rightarrow \cos^2 hx = 1 + \sin^2 hx$$

$$\Rightarrow \cos^2 hx = 1+4 \Rightarrow \cos^2 hx = 5$$

$$\Rightarrow \cosh x = \sqrt{5} \Rightarrow \tanh x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\coth\ x = \frac{\sqrt{5}}{2}\ ,\ \cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\Rightarrow x = \ln(\cosh x + \sinh x) = \ln(5+2).$$

20 مثال

د x دهایپربولیکو تابع ګانو قیمت داسې معلوم کړئ چې $x = ln4$ وي.

ketabton.com - The Digital Library

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{\ln 4} + e^{-\ln 4}}{2} = \frac{4 + \frac{1}{4}}{2} \Rightarrow \cosh x = \frac{17}{8}.$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{\ln 4} - e^{\ln 4}}{2} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{8}$$

$$\tanh x = \frac{15}{17} \quad , \quad \coth x = \frac{17}{15}.$$

معکوسي هايپربوليکي تابع ګاني او د هغوي مشتقات

خرنګه چې هايپربوليکي تابع ګاني اکسپونشيل ډوله دي،نو بايد چې دهغوی معکوسي تابع ګاني، لوګارتمي تابع ګاني وي. دا تابع ګاني په $\sin^{-1} hx$ ، $\cos^{-1} h\, x$ ، $\cot^{-1} hx$, $\tan^{-1} hx$ $\arccos h\, x$ ، $\arcsin h\, x$ او $\arctan h\, x$ $arc\coth x$ سره ښودل کيږي او هغوي په لاندې ډول په لاس راوړو.

د $y = \arcsin hx \Leftrightarrow x = \sinh y$ په پام کې نيولو سره لرو چې

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$$

$$\Rightarrow e^y - e^{-y} = 2x \Rightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0$$

$$\Rightarrow (e^y - e^{-y} - 2x)e^y = 0 \cdot e^y \Rightarrow e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0$$

$$\Rightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \; : \; u = e^y$$

$$\Rightarrow u^2 - 2xu - 1 = 0 \Rightarrow u = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

دلته منفي علامه ځکه حذف شوه چې ښي خواته يو مثبت عدد ده او بناپر دې

ketabton.com - The Digital Library

$$\arcsin h\ x = In(x + \sqrt{x^2+1}), x \in \mathbb{R}$$

په همدې ترتیب کولی شو په لاس راوړو چې

$$\arccos h\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), x \geq 1$$

$$\arccos h\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$$

$$\arccos h\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, |x| > 1$$

دهایپربولیکو تابع ګانو مشتقات دهغوی دمعکوسو تابع ګانو په مرسته په لاندې ډول په لاس راځي.

1. $y = \arcsin h\, x \Leftrightarrow x = \sinh y$

$$\Rightarrow (arc\, sinh\, x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sinh y)'}$$

$$= \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$(\arcsin \mathrm{h}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. $y = \arccos hx \Leftrightarrow x = \cosh y$

$$\Rightarrow (\arccos h\, x)' = y'_x = \frac{1}{y'_x}$$

$$= \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$(\arccos\ hx)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1$$

3. $y = \operatorname{arctan} h\, x \Leftrightarrow x = \tanh y$

$$(\operatorname{arctan} h\, x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tanh y)'} = \frac{1}{1/\cosh^2 y} = \cosh^2 y$$

$$\frac{\cosh^2 y}{1} = \frac{\cosh^2 y}{\cosh y^2 - \sin^2 hy} = \frac{1}{1-(\tanh y)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

4. $(arc\coth x)' = y'_x = \frac{1}{x'_x} = \frac{1}{(\coth y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 y}} = \sinh^2 y$

$$\frac{\sinh^2 y}{1} = \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{\coth^2 y - 1} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow (arc\ \coth\ x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x|>1$$

د معکوسو هایپربولیکو تابع ګانو مشتقات په مستقیمه توګه له

$$\cosh x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) \quad , \quad \sinh x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \quad , \quad \tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

څخه هم په لاس راتلای شي.

دیو تابع پرله پسې (متوالي) مشتقات

د یوې تابع مشتق پخپله دیوې نوې تابع په توګه کیدلی شي، دمشتق نیونې وړ وي.

د یوې تابع دمشتق، مشتق ته دوهمه مرتبه مشتق وایي. په همدې توګه شاید وکولی شو، یوه تابع څو ځلې او یا ځنې تابع ګانې حتی n ځلې $n \in \mathbb{N}$ مشتق ونیسو او دا مشتقات په پرله پسې ډول داسې ښیو

تابع $y = f(x)$

ketabton.com - The Digital Library

لومړی مشتق $$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

دوهم مشتق $$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

دریم مشتق $$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$$

$$\vdots$$

nام مشتق $$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

21 مثال

دلاندې تابع ګانو اول، دوم، دریم، او څلورم مشتق پیداکړئ.

$$(a) \quad \begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y' = 3ax^2 + 2bx + c \\ y'' = 6ax + 2b \Rightarrow y''' = 6a \Rightarrow y^{(4)} = 0. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{array}{llll} y & \sin x & , & y \quad \cos x \\ y & \sin x & , & y \quad \cos x \\ y^{(4)} & \sin x & , & \end{array}$$

$$(c) \quad y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x \Rightarrow y''' = e^x.$$

د پرله پسې مشتقاتو قاعدې

که چېرې u او v تابع ګانې د $n-$ ام مرتبې (n څلې) مشتقات ولري.

1. $(\lambda u(x))^{(n)} = \lambda u^{(n)}(x)$, 2. $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$.

3. $(uv)' = u'v + uv'$, 4. $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$

ketabton.com - The Digital Library

5. $(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$
6. $(uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$

که پاملرنه وکړو نود بنیوم نیوتن د انکشاف ورکړل شوی حالت او د دوو تابع ګانو د حاصل ضرب د پرله پسې مشتقاتو ترمنځ شباهت او تناظر موجود دی. داسې چې

$$(u\,v)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \binom{n}{3}u^{(n-3)}v''' + \cdots + uv^{(n)}$$

وروستنې فورمول دلایب نیټزا دفورمول په نامه یادیږي.

22 مثال

د $y = e^{\alpha x}\cdot x^2$ دریم مشتق لاس ته راوړئ.

حل

$$y' = \left(e^{\alpha x}\right)'.x^2 + e^{\alpha x}\left(x^2\right)' = \alpha\, e^{\alpha x}.x^2 + 2e^{\alpha x}x$$
$$y'' = (e^{\alpha x})''x^2 + 2(e^{\alpha x})'(x^2)' + e^{\alpha x}(x^2)''$$
$$\Rightarrow y'' = a^2e^{\alpha x}x^2 + 4ae^{\alpha x}x + 2e^{\alpha x}$$
$$y''' = (e^{\alpha x})'''x^2 + 3(e^{\alpha x})''(x^2)' + 3(e^{\alpha x})'(x^2)'' + e^{\alpha x}(x^2)'''$$
$$\Rightarrow y''' = a^3e^{\alpha x}x^2 + 6e^{\alpha x}\alpha^2x + 6\alpha\, e^{\alpha x}$$
$$\Rightarrow y''' = (\alpha^2x^2 + 4\alpha + 4)\alpha\, e^x.$$

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1. وښئ چې د $f(x)=|x-5|$ تابع په $x=5$ کې $x=5$ کې مشتق پذیره نه ده.
2. د $g(x)=-|x+9|$ تابع د x متحول په کومو قیمتونو دمشتق نیونې وړنه ده؟

د لاندې تابع ګانو مشتقات پیداکړئ.

3. $y=4x^3-6x^2+12x-10$ ، 4. $y=4x^{\frac{2}{3}}-x^{-2}+\frac{9}{x}$

5. $y=(x^2+1)(x^3-4)$ ، 6. $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)(ax^2+bx+c)$

7. $y=4x^5(3x-9)^2$ ، 8. $y=5x^4\sqrt{2x^2+9x+10}$

9. $y=(x-2)(x^2+1)(2x+3)$ ، 10. $y=\frac{2x}{2x^2+4x+8}$

11. $y=\frac{1-4x^5}{(4x+5)^2}$ ، 12. $y=\frac{7}{\sqrt{3x-6}}$ ، 13. $y=x^{-7}\sqrt{x}$

14. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x^3}\right)$ ، 15. $y=\sqrt[3]{(4x^2+3)^2}$

16. $y=(x^3+2)\sqrt[5]{x^2+1}$ ، 17. $y=\frac{(5x^2-1)^2}{\sqrt{2x^3-3x^2+6}}$

18. $y=|x-5|$ ، 19. $y=|7x-3|$ ، 20. $y=|4x|$

21. $y=5\sin 4x$ ، 22. $y=\cos 2x-\tan 4x+\sin\sqrt{x}$

23. $y=x\sin^3 2x+4\cos^2 x$ ، 24. $y=\cos^5(x^2-1)$

25. $y=\tan(\cot x)$ ، 26. $y=\frac{1}{\cos x}$ ، 27. $y=\frac{1}{\sin x}$

28. $y=\sec 5x+-\cos 4x$ ، 29. $y=\sqrt{\tan 7x}$

د لاندې تابع ګانو دوهمه او دریمه مرتبه مشتقات پیداکړئ.

30. $y=5x^4+3x^2$ ، 31. $y=\sin x-\cos x-x^2+4x$

32. $y=(5x^2+3)^4$ ، 33. $y=(ax^2+bx+c)^2$

ketabton.com - The Digital Library

د لاندې تابع ګانو پنځمه مرتبه مشتقات پیداکړئ.

34. $y=-\sin x$, 35. $y=x^4+3x^2-1$, 36. $y=\frac{1}{x}$

37. **د** y **تابع مشتق نظر** x **ته له** $xy=cosy$ **رابطې څخه پیداکړئ.**

38. **د** $y=\sin(x+y)$ **تابع مشتق پیداکړئ.**

39. **د** $x^3+y^3+xy=8$ **تابع مشتق په** $x=0$ **کې حساب کړئ.**

40. **له** $y^3-5x^2+4xy=0$ **تابع څخه** $\frac{dy}{dx}$ **د** $x=y=1$ **په نقطه کې پیداکړئ.**

د لاندې هرې یوې تابع مشتق پیداکړئ.

41. $y=\log\frac{x}{x+1}$, 42. $y=\sqrt{\log x}$, 43. $y=\frac{\ln x}{x}$

44. $y=2\ln\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$, 45. $2\ln\left(x^3+4x^2\right)^{\frac{1}{4}}$

46. **د** $f(x)=\ln\frac{x}{x^2+1}$ **تابع مشتق په** $x=1$ **کې حساب کړئ.**

47. **د** $x=-2y=0$ **تابع مشتق په** $(0,0)$ **نقطه کې په لاس راوړئ.**

48. **د** $y=(\sin x)$ **تابع مشتق په** $x=\frac{\pi}{2}$ **کې په لاس راوړئ.**

د لاندې تابع ګانو مشتقات پیداکړئ.

49. $y=e^x\ln x$, 50. $y=e^{-\frac{1}{x}}$, 51. $y=3^x$

ketabton.com - The Digital Library

52. $y = \arcsin\left(5x^3 - 2\right)$, 53. $y = e^{\arcsin\ x^2}$

54. $y = \arccos\ \sqrt{x}$, 55. $y = e^{\arccos\ 4x}$

56. $y = \ln(\arctan 7x)$, 57. $y = arc\cot(\sin x) + \arctan(\cos x)$

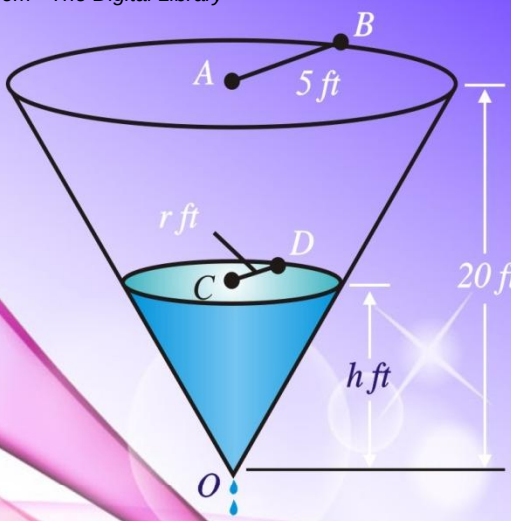
58. $y = arc\sec(e^{3x})$, 59. $y = arc\sec\sqrt{x} + arc\sec x^2$

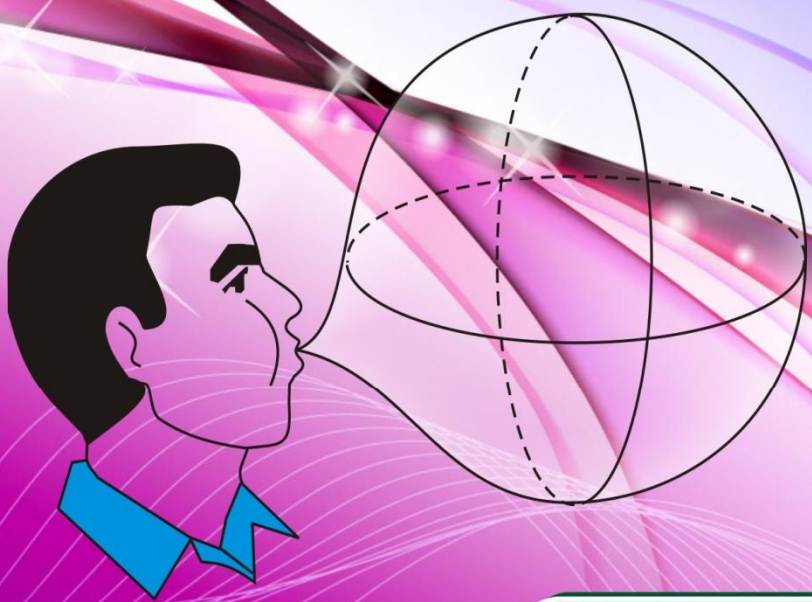
60. $y = x\sinh\ x$, 61. $y = (\arcsin\ x)(\arccos\ hx)$

62. $y = \dfrac{\arctan\ x}{x}$, 63. $y = \arctan\ x - arc\coth\ x$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library





پنځم څپرکی

له مشتق څخه ګټه اخیستنه

ketabton.com - The Digital Library

له مشتق څخه ګټه اخیستنه

له مشتق څخه د تابع ګانو د تحولات په مطالعه لکه د تابع زیاتوالی او کم والی (تزاید او تناقص) په یوه تابع کې د اعظمي ګانو او اصغري ګانو پیداکول او د کږوالي (انحنا) په ډول کې ګټه اخیستل کیږي.

همدا رنګه کولی شو دتابع ګانو په لیمټونو کې دمبهمو شکلونه په پیداکولو کې له مشتق څخه استفاده وکړو. له مشتق څخه په استفاده یوې تابع ته دتایلور په سلسله کې انکشاف ورکول کیږي.

لکه څرنګه چې په عددې محاسبو کې ورڅخه ګټه اخیستل کیږي، په صنعت، اقتصاد، تجارت او نورو کې حسابي مسالې دمشتق په مرسته تحلیل او تجزیه کیدلی شي. دمشتق مسالې په فزیک کې، لکه حرکت، سرعت او تعجیل په زیاته پیمانه کارول کیږي.

د مشتق هندسي تعبیر

که چېرې د یوې تابع $y = f(x)$ په ګراف باندې یوه نقطه $p(x_0, y_0)$ په پام کې ونیسو (لاندې شکل). که چېرې د x متحول د Δx په اندازه تحول وکړي، نو د $p(x_0, y_0)$ نقطه $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ نقطې ته انتقال کوي او د تابع تحول عبارت دی له

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \overline{RQ}$$

په PRQ قایم الزاویه مثلث کې لرو چې

$$\tan \overset{\angle}{QPR} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

څرګنده ده چې $m = \tan \overset{\angle}{OPR}$ د PQ قاطع دمیل څخه عبارت دی. اوس که

ketabton.com - The Digital Library

Δx صفر ته تقرب کوي، نود Q نقطه P ته نږدې کیږي او د PQ وتر د P په نقطه کې د T مماس ته نږدې کیږي. په نتیجه کې $tan\theta, m$ (دمماس میل) ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې θ د x محور او د T ترمنځ زاویه ده بناپر دې

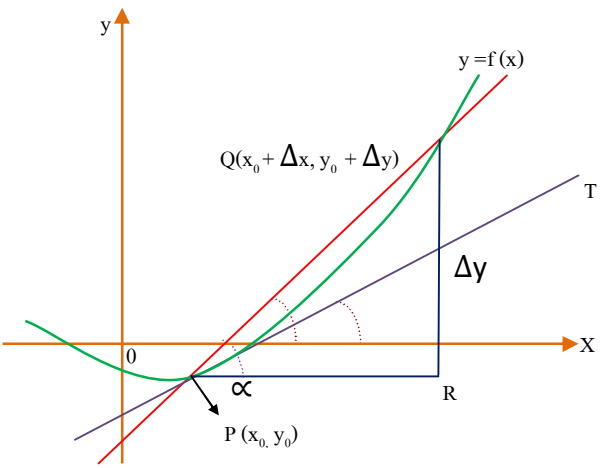
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = tan\theta$$

په دې ترتیب د $y = f(x)$ مشتق د (x_0, y_0) په اختیاري نقطه کې د ګراف له مخې دهغه مستقیم خط میلان دی چې په نوموړي نقطه کې پرمنحني باندې مماس رسم کیږي یعنې

$$f'(x_0) = \tan\theta = m$$

په بل عبارت په یوه مشتق پذیره تابع کې ګراف پر مخ په یوه نقطه کې د مماس میلان په همغه نقطه کې دهغې تابع دمشتق سره مساوي دی.

د یوې منحني په یوه نقطه کې دمماس میلان په هغه نقطه کې دهغې منحني میلان بلل کیږي



1 مثال

د $f(x)=x^3$ تابع د ګراف په $(x_1 , y_1)=(1 , 1)$ نقطه کې د مماس معادله ولیکي.

ketabton.com - The Digital Library

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(1) = 3 \Rightarrow m = 3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 2.$$

د زیاتوالي او کموالي (تزاید او تناقص) شرطونه

که د $y = f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټرول کې متمادي او په (a, b) کې مشتق پذیره وي. نو

1- که چېرې $f'(x)$ په (a,b) کې مثبت وي، د f تابع په هغې کې متزایده ده.

2- که $f'(x)$ په (a,b) کې منفي وي، د f تابع په هغه کې متنا قصه ده. کله که $f'(x)$ په (a,b) کې صفر وي، نو هغلته f یو ثابته تابع ده.

2مثال

هغه انټرولونه په لاس راوړئ چې په هغې کې $y = x^2 - 6x + 5$ تابع یوازې متزایده یا متناقصه وي.

حل

$$y' = 2x - 6 \;,\; y' = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$y' = 2x - 6$	−	0	+
$y = x^2 - 6x + 5$	متناقص		متزاید

په دې ترتیب سره د تابع د زیاتوالي انټرول $(3, \infty)$ او د کموالی انټرول $(-\infty, 3)$ دی.

3 مثال

د $y = -x^2 - 6x + 5$ تابع د زیاتوالي او کموالي انټرولونه معلوم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل: $y' = -2x + 6\ ,\ y' = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

x	$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$y' = -2x + 6$	+	0	-
$y = -x^2 - 6x + 5$	متزايد		متناقص

بناپردې دکموالي انټروال يې $(3, \infty)$ اود زياتوالي انټروال يې $(-\infty, 3)$ دی.

نهايي نقطي (اعظمي او اصغري نقطي)

1. که چېرې د تعريف د ناحيې په يو خلاص انټروال (a, b)کې دټولو قيمتونو x لپاره $f(x_0) \geq f(x)$ صدق شي، $x_0 \in (a, b)$ته $(x_0, f(x_0))$ موضعي اعظمي $(Local\ \max imum)$ نقطه او $f(x_0)$ ته په (a, b) کې د $f(x)$ تابع اعظمي وايي. يعنې

$$f(x_0) = \max_{(a,b)} f(x)$$

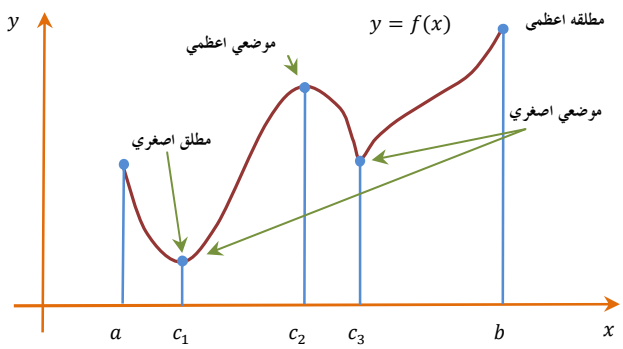
2. که چېرې د تعريف د ناحيې په يو خلاص انټروال (a, b) کې دټولو قيمتونو x لپاره $f(x_0) \leq f(x)$، شرط صدق شي نو $x \in (a, b)$ته $(x_0, f(x_0))$ موضعي اصغري نقطه او $f(x_0)$ ته په (a, b) کې د $f(x)$،تابع اصغري وايي. يعنې

$$f(x_0) = \min_{(a,b)} f(x)$$

هغه نقطه چې په هغې کې تابع په مطلوبه انټروال کې ترټولو لوی قيمت واخلي، مطلقه اعظمي $(Absolut\ \max imum)$ او که په هغې کې ترټولو کوچنی قيمت ولري، مطلقه اصغري $(Absolut\ \min imum)$ بلل کيږي.

ديوې تابع اعظمي او اصغري نقطو ته نهايي نقطي يا (اکستريم نقطي) هم وايي.

ketabton.com - The Digital Library

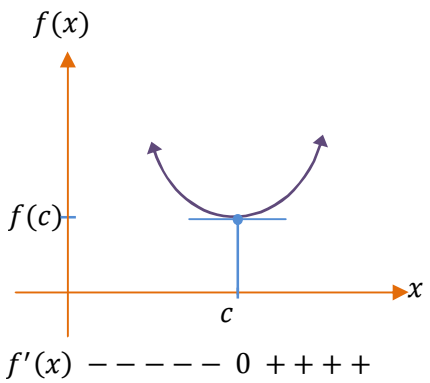


د نهايي (اکسترېم) نقطو لازمي شرط

که چېرې د $f(x)$ تابع د x_0 په نقطه کې نهايي نقطي (اعظمی اضغری) ولري نو په x_0 د تابع مشتق صفر دی او f په x_0 کې مشتق پذيره نه ده.

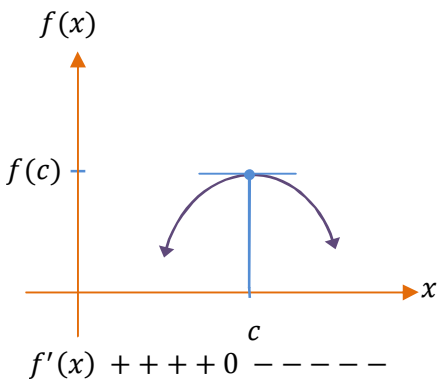
د مشتق په کارولو سره د نهايي (اکسترېم) نقطو ټاکل

1. که چېرې د $x < x_0$ لپاره $f'(x)$ مثبت او د $x > x_0$ لپاره $f'(x)$ منفي وي د $(x_0, f(x_0))$ نقطه اعظمي ده.
2. کله که د $x < x_0$ لپاره د $f'(x)$ قيمت منفي او $x > x_0$ لپاره مثبت وي د $(x_0, f(x_0))$ نقطه اصغري ده. لاندې شکلونه دې دقيق وکتل شي



$(A)\ f(c)$ is a local minimum

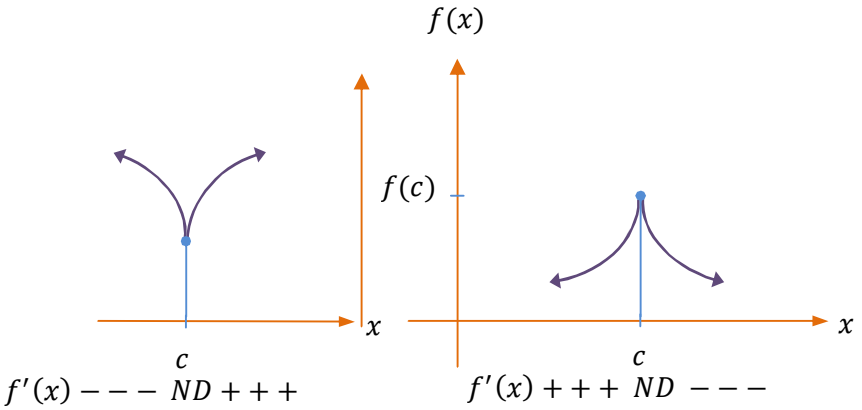
f(c) موضعي اصغري ده



$(B)\ f(c)$ is a local maximum

f(c) موضعي اعظمي ده

ketabton.com - The Digital Library



د دوهم مشتق په کارولو سره دنهايي نقطو معلومول

که چېرې د f تابع اول مشتق په x_0 کې صفر او دوهم مشتق يې په دې عدد کې صفر نه وي، نو

1. که $f''(x_0) < 0$ وي د $f''(x)$ قيمت هم د x_0 په يو مجاورت کې منفي دي. بناپر دې $f'(x)$ په دې انټرول کې متناقص دی خو څرنګه چې $f'(x_0) = 0$ دی نو f'' د x_0 چپ خواته مثبت قيمت او د هغې بنې خواته منفي قيمت لري، په دې ترتيب $f'(x)$ د x_0 چپ خواته متزايده او بنې خواته متناقص ده او x_0 اعظمي نقطه ده.

x	$x < x_0$	x_0	$x > x$
$f''(x)$	-	-	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

2. د $f''(x) > 0$ لپاره ټول شرطونه سرچپه دي.

ketabton.com - The Digital Library

x	$x < x_0$	x_0	$x > x$
$f''(x)$	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

4 مثال

د دوهم مشتق په مرسته د $y = x^2 - 4x + 3$ نهايي نقطې په ګوته کړئ.

$$y' = 2x - 4 \quad , \quad y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad y'' = 2 > 0$$

x	2
y''	+
y'	0
y	min

5 مثال

د $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$ تابع اعظمي او اصغري معلوم کړئ.

حل: لومړی او دوهم مشتقات په پام کې نیسو.

$$f'(x) = 2x^3 - 2x \quad , \quad f'(x) = 0 \implies 2x^3 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow 2x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$$

$$f''(x) = 6x^2 - 2$$

ketabton.com - The Digital Library

x	-1	0	1
$f'(x)$	0	0	0
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	min	max	min

بناپر دې تابع په $x=-1$ او $x=1$ کې موضعي اصغري ګانې او په $x=0$ کې موضعي اعظمي لري. اعظمي او اصغری قیمتونه عبارت دي له

$$\max\ f(x)=f(0)=\frac{1}{2}\times 0^4-0^2+1=1$$

$$\min\ f(x)=f(-1)=\frac{1}{2}\times(-1)^4+(-1)^2+1=\frac{1}{2}$$

$$\min\ f(x)=f(1)=\frac{1}{2}\times 1^4-1^2+1=\frac{1}{2}$$

په دې ترتیب $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ او $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ اصغري نقطې او $(0,1)$ اعظمي نقطه ده.

6 مثال

د $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع د ګراف نهایي نقطې وټاکي.

حل: د مشتق څخه په استفاده لرو چې

$$f'(x)=2ax+b\Rightarrow f'(x_0)=0\Rightarrow 2ax_0+b=0\Rightarrow x_0=-\frac{b}{2a}$$

$$y_0=f(x_0)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

بناپردې دتابع نهایي نقطه عبارت ده له $(x_0,y_0)=\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$، خود هغې ډول د a په اشاری پورې اړه پیداکوي.

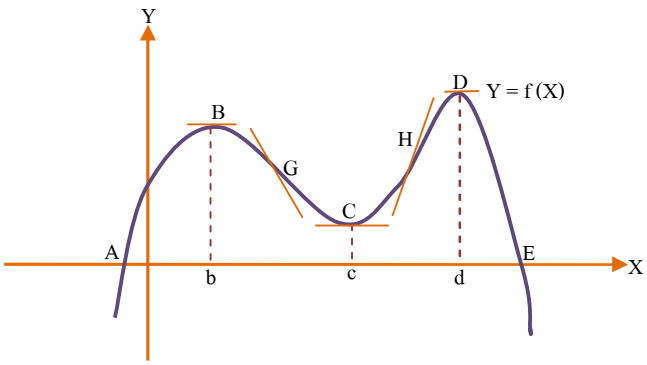
ketabton.com - The Digital Library

x	$-\frac{b}{2a}$
$f'=(x)=2ax+b$	0
$f''=(x)2a$	$2a$
$f(x)ax^2+bx+c$	$-\frac{4ac-b^2}{4a}$

څرنګه چې دوهم مشتق $f''(x)=2a$، نو د $a>0$ لپاره يې اشاره مثبت او د $a<0$ لپاره يې اشاره منفي ده. نو د $a>0$ لپاره ګراف اصغري اود $a<0$ لپاره اعظمي دی.

د يو ګراف د کوږوالي (انحنا) ډول

د $y=f(x)$ منحني په يو انټرول کې محدب بلل کيږي که چېرې په دې انټرول کې دمنحني پر هره نقطه مماس د ګراف دپاسه وي او دا منحني مقعر بلل کيږي، کله که په نقطو باندې مماسونه يې دمنحني لاندې راشي.



د انعطاف نقطه (Inflection Point)

هغه نقطه چې په ګراف کې ديو منحني تحدب (محدب والی) او تقعر (مقعر والی) سره جلا کوي د انعطاف د نقطې په نامه يادېږي.

ketabton.com - The Digital Library

د محدب والي او مقعر والي شرطونه

1. که چېرې ديوې تابع $f(x)$ دوهم مشتق ديو انټرول په ټولو نقطو کې منفي وي، نود $f(x)$ تابع منحني په دې انټرول کې محدب دی.

2. که چېرې د $f(x)$ تابع دوهم مشتق په يو انټرول کې مثبت وي، نو هغه منحني مقعردی.

7 مثال

د $y = x^2 - 5x + 4$ تابع ګراف محدب يا مقعر دی؟

حل: دوهم مشتق پې ارزيابی کوو

$$y' = 2x - 5 \Rightarrow y'' = 2 > 0$$ (دمقعروالي شرط)

8 مثال

هغه انټرولونه وټاکئ چې د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع ګراف په هغې کې محدب او يا مقعر وي.

حل

$$y' = 3x^2 + 18x - 6 \Rightarrow y'' = 6x + 18$$
$$y'' < 0 \Rightarrow 6x + 18 < 0 \Rightarrow x < -3$$
$$y'' > 0 \Rightarrow 6x + 18 > 0 \Rightarrow x > -3$$

ليدل کيږي چې د دې تابع دوهم مشتق په $(-\infty, -3)$ کې منفي اوپه $(-3, +\infty)$ کې مثبت دی نو ګراف يې په لومړي انټرول کې محدب اوپه دوهم انټرول کې مقعر دي.

x	$x < -3$	-3	$x > -3$
y''	-	0	+
ګراف	محدب	انعطاف	مقعر

ketabton.com - The Digital Library

د انعطاف شرطونه

که چېرې د $f(x)$ په یوه متمادي منحني کې د $f(x)$ دوهم مشتق په $x = x_0$ کې صفر او یا موجود نه وي او سربیره پر دې $f''(x)$ د x_0 څخه دتیریدوپه حالت کې اشاره بدله کړي، نو د $(x_0, f(x_0))$ نقطه د $f(x)$ لپاره د عطف (انعطاف) نقطه ده.

9 مثال

د $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$ تابع دګراف اعظمي او اصغري نقطې او د انقطاف نقطه پیداکړئ.

حل: په لومړي قدم کې ددې تابع اول او دوهم مشتق نیسو.

$$g'(x) = x^2 - 1 \ , \ g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$g''(x) = 2x \Rightarrow g''(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

X	-1	0	1
$g'(x)$	0	−	0
$g''(x)$	−	0	+
$g(x)$	اعظمي	انعطاف	اصغري

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\ g(x) = g(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) + 2 \approx 2.68 \\ \inf\ lection\ :\ g(0) = g = \frac{1}{3}0^3 - 0 + 2 = 2 \\ \min\ g(x) = g(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - 1 + 2 \approx 1.33 \end{cases}$$

ketabton.com - The Digital Library

10 مثال

د $y = e^{-x^2}$ تابع دګراف بحراني او د انعطاف نقطې معلومې او ګراف يې رسم کړئ.

حل

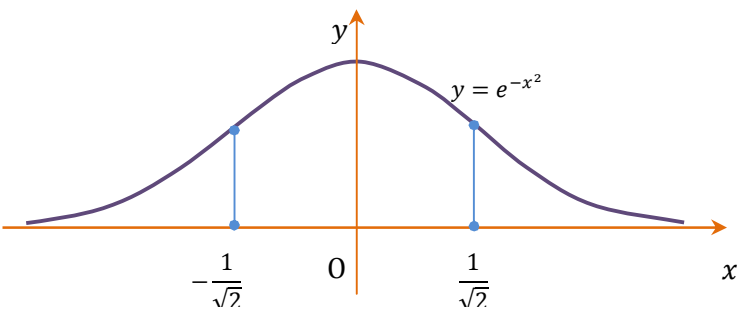
$$y' = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

لهذا

$$y' = 0 \Rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y''	+	0	−	−	−	0	+
y'	+	+	+	0	−	−	−
	مقعر	انعطاف	محدب	محدب	محدب	انعطاف	مقعر
د ګراف ډول	متزايد	متزايد	متزايد	اعظمی	متناقص	متناقص	متناقص



11 مثال

د xمتحول دکوموقیمتونولپاره د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع نهايي او انعطاف نقطې لري.

ketabton.com - The Digital Library

حل: د تابع اول او دوهم مشتق ارزیابي کوو.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ,\ f'(x)=0\Rightarrow 3ax^2+2bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$$

$$f''(x)=6ax+2b\ \ ,\ \ f''(x)=0\Rightarrow 6ax+2b=0\Rightarrow x=-\frac{b}{3a}$$

نود $f(x)$ تابع د $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ لپاره نهایي نقطې (اعظمي او اصغري) لري او د $x=-\frac{b}{3a}$ لپاره د انعطاف نقطه لري.

1. که چېرې $b^2-3ac>0$ وي، تابع اعظمي او اصغري لري چې ډول يې د a په عدد پورې تړلی دی.
2. که چېرې $b^2-3ac=0$ وي، د تابع مشتق د $x=-\frac{b}{3a}$ لپاره صفر کيږي، خو څرنګه چې دمخه وويل شول د x په دې قيمت کې د تابع ګراف انعطاف لري
3. که $b^2-3ac<0$ وي، نو تابع اعظمي او اصغري نه لري خو انعطاف لري.

12 مثال

د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$ تابع اعظمي او اصغري او د انعطاف نقطې معلومې کړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل

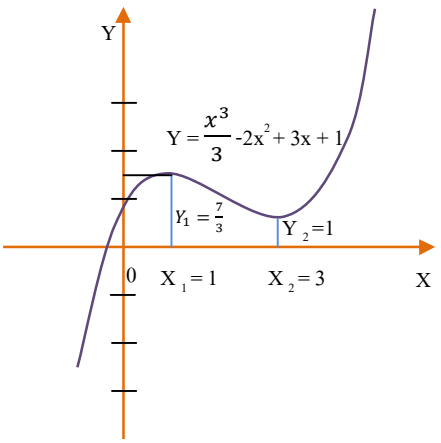
$$f'(x)=x^2-4x+3\ ,\ f'(x)=0\Rightarrow x^2-4x+3=0$$
$$\Rightarrow\quad (x-1)(x-3)=0\quad\Rightarrow\quad x_1=1\quad ,\quad x_2=3$$

ketabton.com - The Digital Library

x	$x<1$	1	$1<x<3$	3	$x>3$
$x-1$	−−−	0	+++	+	+++
$x-3$	−−−		−−−	0	+++
$f'(x)=(x-1)(x-3)$	+++	0	−−−	0	+++
$f(x)$	متزايده	اعظمي	متناقصه	اصغري	متزايده

$$f''(x)=2x-4\ ,\ f''(x)=0\Rightarrow 2x-4=0\Rightarrow x=2$$

x	$x<2$	2	$x>2$
$f''(x)$	---	0	+++
$f(x)$	محدبه	انعطاف	مقعره



13 مثال

د $g(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ اعظمي، اصغري او انعطاف نقطي معلومي او ګراف يې رسم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل

$$g(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \quad , \quad g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

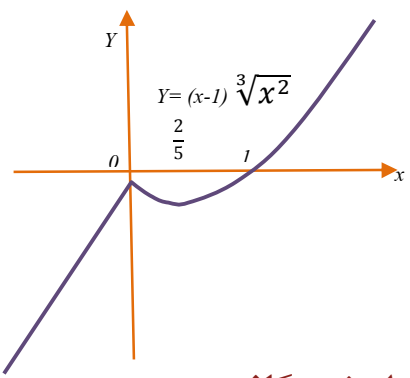
$$\Rightarrow \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

او دوهم مشتق يې عبارت دی له

$$g''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \neq 0$$

اګر چې دوهم مشتق په هیڅ حالت کې نه صفر کیږي او ګراف انعطاف لري (لاندې جدول)

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f''(x)$	---	نه ده تعریف شوی	+++
$f(x)$	محدب	انعطاف	مقعر



مطلقې اعظمي ګانې او اصغري ګانې

امکان لري یوه تابع په یو انټرول کې څو موضعي اعظمي ګانې او څو موضعی اصغري ګانې ولري. خو په معین انټرول کې تابع یوازې یو اعظمي قیمت (مطلقه اعظمي) او

ketabton.com - The Digital Library

یو اصغري قیمت (مطلقه اصغري) لري.

که چېرې دیوې تابع $f(x)$ قیمتونه په یوانترول کې تر مطالعې لاندې ونیسو. د $f(x)$ اعظمي او اصغري قیمتونه په لاندې یو حالت کې واقع کیږي.

1- په هغه نقطو کې چې د تابع مشتق صفر کیږي.
2- د انټرول په اخرنیو نقطوکې.
3- په هغو نقطوکې چې تابع په کې مشتق پذیره نه وي. (پورتنی شکل)

14 مثال

د $g(x) = x^3 - 3x + 2$ تابع مطلقې اعظمي او اصغري نقطې د $[0,2]$ په انټرول کې پیداکړئ.

حل. د تابع قیمتونه په بحراني نقطو او د $[0,2]$ انټرول په اخرنیو نقطو کې معلوم کړئ

$$g'(x) = 3x^2 - 3 \,,\; g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

لیدل کیږي چې

$$g(1) = 0 \quad , \quad g(0) = 0 \quad , \quad g(2) = 4$$

نود $g(x)$ تابع مطلقه اعظمي او مطلقه اصغري په ترتیب سره عبارت دي له

- $\max\limits_{[0,2]} g(x) = g(2) = 4 \quad , \quad \min\limits_{[0,2]} g(x) = g(0) = 0$

د اعظمي ګانو او اصغري ګانو تطبیقي مسئالې

په طبیعي علومو او ریاضي کې په یوه ناحیه کې دیوې تابع داعظمي قیمتونو او اصغري قیمتونو پیداکول، د تطبیق وړ او له مهمو مسألو څخه شمیرل کیږي.

دجیودیزي دخطونو معلومول دواریاسیون حسابونه، د بنی جوړونې *Optimisition*

ketabton.com - The Digital Library

مسالې صنعت او داسې نورومسالو کې داعظمي او اصغري مفهومونو په چاپیره طرحه کیږي. نو ځکه دا لاندې څو مسالې څیړو.

15 مثال

دوه مثبت عددونه پیداکړئ چې مجموعه یې 20 او دضرب حاصل یې ممکنه اعظمي قیمت ولري.

حل. فرض کوو چې یو مطلوب عدد x وي، نو دوهم عدد $20-x$ دی، نو ددوی دضرب حاصل دیوې تابع په توګه عبارت دی له $f(x)=x(20-x)$. دلته د x عدد د $[0,20]$ په انټرول کې تحول کوي، نو دتابع مطلقه اعظمي د $[0,20]$ په انټرول کې لټوو.

$$f(x) = 20x - x^2 \quad , \quad f'(x) = 20 - 2x$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

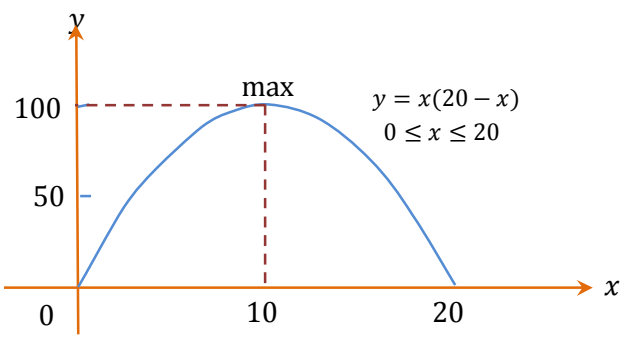
د تابع قیمتونه دانټرول په وروستیو نقطو کې

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(20) = 20 \cdot 20 - 20^2 = 0$$

او په بحراني نقطه کې دتابع قیمت

$$f(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 100$$

لیدل کیږي چې $(10,100)$ د تابع اعظمي نقطه ده او دوه مطلوب عددونه عبارت دي له $x_1 = 10,\ x_2 = 10$، چې دضرب حاصل یې 100 دی.

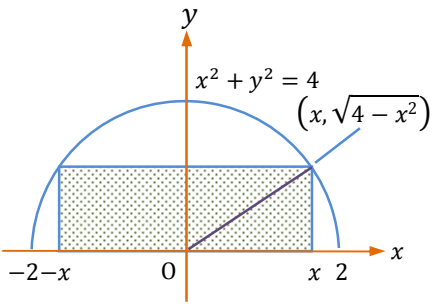


ketabton.com - The Digital Library

16مثال

د $r = 2$ په شعاع په نیمه دایره کې محاط شوی، دیو مستطیل څلور خواوې داسې معلومې کړئ چې اعظمي مساحت ولري.

حل: یو مستطیل د $2x$ په اوږدښت دیوې نیمې دایرې په داخل کې په پام کې نیسو. د دې مستطیل عرض عبارت دی، له $\sqrt{4-x^2}$ او مساحت یې $g(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$ دی، خو د x د تحول ساحه $[0,2]$ ده.



$$g'(x) = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0 \Rightarrow 8 - 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

د $-\sqrt{2}$ عدد د x دتحول په ساحه کې پروت نه دی، نو دتابع قیمتونه د $\sqrt{2},0$ او 2 په نقطو کې حسابوو

$$g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4 \quad , \quad g(2) = 2.2.\sqrt{4-4} = 0$$

$$g(0) = 2.0.\sqrt{4-0} = 0$$

بناپر دې $g(x)$ تابع په $x_0 = \sqrt{2}$ کې اعظمي لیمیټ لري، نو د مستطیل اوږدښت $2x_0 = 2\sqrt{2}$ او عرض یې $\sqrt{4-x_0^2} = \sqrt{2}$ دی.په داسې حال کې چې د مستطیل

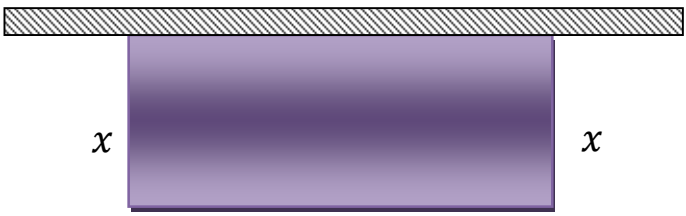
ketabton.com - The Digital Library

مساحت $s = g\left(\sqrt{2}\right) = \left(2\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 4$ اعظمي دی.

17مثال

ديوې اوسپنيزې کټارې تر ټولو کوچنی اوږدښت l معلوم کړئ کومه چې يو ديوال ته نږدې مستطيل شکله ځمکه له دريو خواو څخه احاطه کوي. داسې چې د مستطيل مساحت $50m^2$ وي.

حل. فرض کوو چې دمستطيل عرض x او اوږدوالی يې $l-2x$ دی، نو د مستطيل مساحت عبارت دی له



$$x(l-2x)=50 \Rightarrow xl-2x^2=50 \Rightarrow xl=2x^2+50 \Rightarrow l=2x+\frac{50}{x}$$

دکټارې اوږدوالی دx متحول (د مستطيل عرض) يوه تابع ده چې په لاندې ډول ورکړل شوي ده

$$l(x)=2x+\frac{50}{x} \Rightarrow l'(x)=2-\frac{50}{x^2} \quad : \quad l'(x)=0 \Rightarrow 2-\frac{50}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2-50 \;=\; 0 \;\Rightarrow\; x^2 \;=\; 25 \;\Rightarrow\; x \;=\; \pm 5$$

څرنګه چې x د مستطيل دعرض په توګه مثبت عدد دی، نو -5 په پام کې نه نيول کيږي او $x=5$ دغوښتل شوي مستطيل عرض دی يعنې

$$l(x)=2x+\frac{50}{x} \quad \Rightarrow \quad l(5)=2\cdot 5+\frac{50}{5}=10+10=20$$

ketabton.com - The Digital Library

نو د غوښتل شوي کټارې اوږدوالی $20\,m$، دمستطیل اوږدوالی $10m$ او عرض يې $5m$ بايد وي.

د هوپيتال قاعده

د تابع ګانو دلېمېټ د مبهمو شکلونو محاسبه کول، دمشتق په کارولو سره، د هوپيتال په قاعده دمعمولي طريقو څخه ګټوره او اسانه ده او دلته دا قاعده تر بحث لاندې نيول کيږي.

د هوپيتال د قاعدې کارول د $\frac{0}{0}$ په حالت کې

که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ د $x=a$ په يو مجاورت کې دمشتق نيونې وړ او $f(a)=0=g(a)$ شي، نو که $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود ولري

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

مثالــونه

18. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} \;=\; 1.$$

19. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

20. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} \;=\; 1$$

21. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2\cos 2x} \;=\; \frac{1}{2}$$

22. $$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1+\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\pi x\sin(\pi x)}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\pi \sin(\pi x) + \pi^2 x \cos(\pi x)} = -\frac{1}{\pi^2}$$

نتیجه. که چېرې د f او g تابع ګانې د x په کافی اندازه لویو قیمتونو کې دمشتق نیونې وړ او $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$ وي، نو

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

د هوپیتال د قاعدې کارونه د $\frac{\infty}{\infty}$ په حالت کې

که چېرې د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $x = a$ عدد په مجاورت کې دمشتق نیونې وړ خو $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)$ وي او $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود ولري نو

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثالونه

23. $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

24. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

25. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2}{e^x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x + 2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

26. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^x \ln 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2^x (\ln 2)^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

$$= \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{2^x (\ln 2)^n} = 0$$

27. $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \ \ldots \ = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = 0$$

نتیجه. د $p(x)$ د پولینوم لپاره لرو چې

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} \ = \ 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} \ = \ \infty$$

استثنایي حالتونه

داسې موارد شته چې په هغې کې دهوپیتال د قاعدې تطبیق یوازې په غیر مستقیم ډول ګټور وي او یا امکان لرې د دې قاعدې تطبیق هیڅ ګټور نه وي. 28 او29 مثالونو ته دې توجه وشي.

28 مثال

د $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3 \cos x}$ په محاسبه کې چې د $\frac{0}{0}$حالت لري، د هوپیتال د قاعدې مستقیم تطبیق ګټور نه دي. خو نومورې لېمېټ د دریو لېمېټونو د ضرب په توګه په پام کې نیسو او د هوپیتال قاعده پرې تطبیق کوو.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3 \cos x} = \left[\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\right]\left[\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}\right]\left[\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right]$$

$$\left[\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}\right]\left[\lim_{x\to 0} \frac{4\cos 4x}{1}\right]\left[\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)(4)(1) = 2$$

ketabton.com - The Digital Library

29 مثال

د $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ محاسبه کوو.

حل: دا لېمېټ د $\frac{\infty}{\infty}$ غیر معین شکل لري، که چېرې دهوپیتال قاعده پرې تطبیق شي لرو چې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

د وروستني رابطې دښي خوا افادې لېمېټ موجود نه دی، ځکه چې د $sinx$ او $cosx$ قیمتونه د -1 او $+1$ ترمنځ قیمتونه اخلي، نو د هوپیتال قاعده په دې مورد کې دتطبیق وړنه ده. په داسې حالت کې چې پورتني لېمېټ په اسانی سره په لاندې ډول محاسبه کیدلی شي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

30 مثال

په $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}{x}$ باندې دهوپیتال قاعده غیر موثره ده په داسې حال کې چې

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

31 مثال

دهوپیتال د قاعدې په مرسته $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ نه شو حسابولی، خو

ketabton.com - The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x}) = 1+0 = 1$$

نور مبهم شکلونه او د هوپیتال قاعده

اوه مبهم شکلونه $0^0, \infty^0, 0.\infty, \infty-\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ او 1^∞ : د لېمېټونو دحسابونې په درشل کې دپورتنیو شکلونو سره مخامخ کیږو خو ممکنه ده پنځه وروستني حالتونه په لازمو اړونو سره په یو له لومړنیو دوو حالتونو واړول شي چې بیا د هوپیتال د قاعدې له مخې حل کیږي.

د $0\cdot\infty$ حالت

کله که $\lim_{x\to a} f(x)=0$ او $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ وي، نو د

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{یا} \quad f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

په پام کې نیولو سره د $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ لېمېټ په یو له $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ شکلونو بدلیدلی شي.

32 مثال

$$\lim_{x\to\infty}[x.arc\cot x]=\lim_{x\to\infty}\frac{arc\cot x}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

د $\infty-\infty$ مبهم شکل

کله چې $\lim_{x\to a} f(x)=\infty=\lim_{x\to\infty} g(x)$ وي، نو د

ketabton.com - The Digital Library

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}=\frac{u(x)}{v(x)}$$

دلته $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$ د $\frac{0}{0}$ په شکل بدلیږي په داسې حال کې چې

$$\lim_{x\to a}u(x) \;=\; 0 \;=\; \lim_{x\to a}v(x)$$

33 مثال

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right] \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{(1+2x)\sin x+(x+x^2)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2\sin x-(x+x^2)\sin x+(2+4x)\cos x} \;=\; 1$$

د $0^0, \infty^0$ او 1^∞ مبهم شکلونه

ممکنه ده د $\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ لیمیټ پورتني یوشکل ځان ته غوره کړي. داهر یوشکل دطبیعي لوګارتم په مرسته د $0\cdot\infty$ په شکل دبدلولو وړ دی، یعنې د $\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ لیمیټ دحسابولو لپاره له

ketabton.com - The Digital Library

$$\ln\left(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\ln f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(g(x)\ln f(x)\right)$$

څخه کار اخیستل کیږي.

34 مثال

د (∞^0)حالت. د $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ پیداکول مطلب دي.

حل: د n عدد دمتحول په توګه په پام کې نیسو، لرو چې

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n^{\frac{1}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{n'}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Rightarrow\ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

35 مثال

د (1^∞) شکل. د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ عدد حساب کړئ.

حل

$$\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\frac{x+1}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1\ \Rightarrow\ \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\quad\bullet$$

ketabton.com - The Digital Library

36 مثال

د (0^0) شکل. د $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ لېمېټ پیداکړئ.

حل: د 0^0 شکل لېمېټ دپیداکولو لپاره لرو چې

$$\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1}{2x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}(\ln 1-\ln 2x)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-\ln 2x}{x} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 2x}{x} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{2x}}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

یادښت. لیدل کېږي چې دځینو طاقتنما تابع ګانو لېمېټ دلوګارتم او مشتق په مرسته په مناسب ډول حسابیدلی شي.

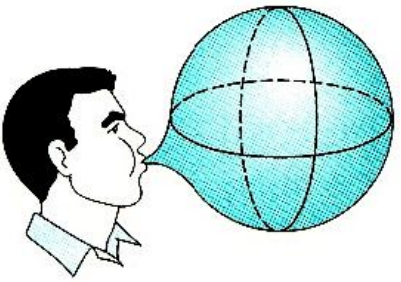
د کمیتونو د تغیر اړونده تطبیقي مسایل

زیات تطبیقي مسایل د $y=f(x)$ د تابع د تغیر دسرعت په اړوند طرحه کیږي چې په هغې کې د x او y متحولین په دریم متحول (t) وخت پورې تړلي وي. په دا ډول حالتونو کې ضمني مشتق نیونه د $\frac{dy}{dt}$ او $\frac{dx}{dt}$ د تغیراتو سرعت معلوموي او په نتیجه کې دمسالې عمومي او خصوصي حلونه په لاس راځي.

ketabton.com - The Digital Library

37 مثال

(دبالون دحجم تغیر). دیو کروي بالون حجم دهوا په وردا خلیدو سره زیاتیږي، په هغه لحظه کې چې شعاع یې $2ft$ دی، دزیاتوالي سرعت یې $\frac{1}{6}\ ft/\min$ دی، نو دبالون حجم په کوم سرعت سره زیاتیږي؟



عمومي حل: که حجم په v، شعاع په r او وخت (په دقیقه) په t سره وښیو، نو

$$V=\frac{4}{3}\pi\ r^3$$

په داسې حال کې چې r او v دوخت تابع ګڼې دي، نظر وخت ته دضمني مشتق نیونې څخه وروسته لرو چې

$$\frac{dV}{dr}=4\pi\ r^2\frac{dr}{dt}$$

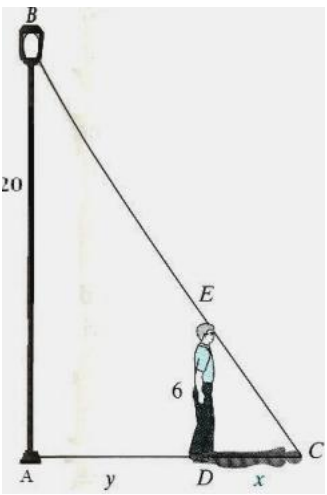
خصوصي حل: په هغه لحظه کې چې دبالون شعاع $r=2ft$ وي، دهغې دحجم د تغیر سرعت په لاندې ډول په لاس راځي

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=40\,cm}=4\pi(2)^2\frac{1}{6}=4(3.14)(4)(0.17)\approx 8.37\ ft/\min$$

ketabton.com - The Digital Library

38 مثال

(خوځنده سیوره). یوسړی چې $6ft$ قد لري، دشپې له خوا په کوڅه کې دبرق د چراغ له یوې مټې څخه چې $20ft$ ارتفاع لري، د $7\ ft/\sec$ په سرعت (چټکتیا) سره لېرې کیږي، د دی سړي سیوره به په کوم سرعت تغیر کوي؟



عمومي حل: که x دسیورې اوږدوالی په (فټ واحد) سره وي، y دسړي او چراغ دمټې ترمنځ واټن او t د هغه وخت په ثانیه سره وي. نود شکل سره سم د ΔABC او ΔDEC مثلثونه سره مشابه دي نو

$$\frac{y+x}{20}=\frac{x}{6}\Rightarrow x+y=\frac{20}{6}x\Rightarrow y=\frac{7}{3}x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{7}{3}\frac{dx}{dt}$$

خصوصي حل: څرنګه چې $\frac{dy}{dt}=7\ ft/\sec$ دی نو

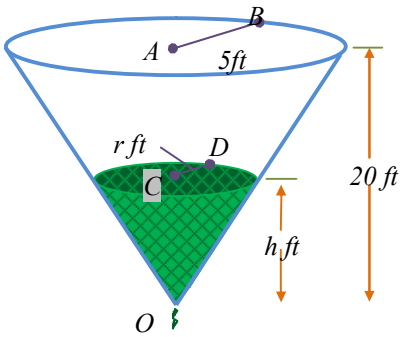
ketabton.com - The Digital Library

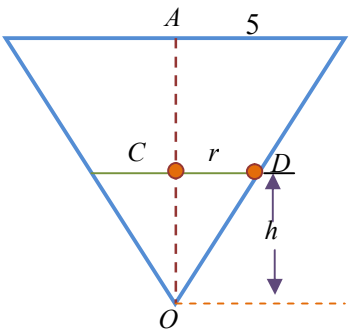
$$7 = \frac{7}{3}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3$$

په دې ترتیب د سیورې دتغیر سرعت $3\ ft/\sec$ دی.

39 مثال

د مخروطی ډوله ټانکر تشول. د اوبو یو مخروطي ټانکر چې دایروي قاعده لري، شعاع یې $5ft$ او ارتفاع یې $20ft$ دی. په معکوس (سرچپه) ډول له څنډې څخه د اوبو دخالي کولو په حالت کې په پام کې نیول شوي دی هغه لحظه چې د اوبو ارتفاع یې $8ft$ ته رسیږي، اوبه د ټانکر له راس څخه په $2\ ft^3/\min$ سرعت سره خالي کیږي. نو د اوبو د ارتفاع دتغیر سرعت په دې لحظه کې څودی؟





عمومي حل: د دې مخروطي ډوله ټانکر حجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ دی له شکل څخه لیدل کیږي چې

$$\frac{5}{20} = \frac{r}{h} \Rightarrow r = \frac{h}{4}$$

بناپر دې

ketabton.com - The Digital Library

$$V=\frac{1}{3}\pi\ r^2h=\frac{1}{3}(3.14)\left(\frac{h}{4}\right)^2=\frac{\pi}{48}h^2$$

$$\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{16}h^2\frac{dh}{dt}$$

خصوصي حل: هغه وخت چې د اوبو حجم په دقيقه کې دوه فټه تغير کوي لرو، چې

$$\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{16}h^2\frac{dh}{dt}\Rightarrow-2=\frac{\pi}{16}(8)^2\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{2\pi}\approx-0.16\,ft/\min$$

نو د اوبو دارتفاع دکموالي سرعت (چټکتيا) په هره دقيقه کې 0.16 فټه دی.

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1. د $y = -x^2 + 4x$ تابع پر منحني باندې په $x = 2$ کې دمماس معادله پیداکړئ.
2. د $y = \sqrt{x}$ تابع په ګراف باندې د $(1,1)$ په نقطه کې دعمود معادله ولیکئ.
3. د $y = \ln x$ پرمنحني باندې په $x = 2$ کې د مماس معادله پیداکړئ.
4. د $y = e^{2x} + 1$ تابع پرمنحني باندې په $x = 0$ کې دعمود معادله ولیکئ.
5. د $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ تابع پرمنحني باندې په $x = 1$ کې دمماس معادله پیداکړئ.

هغه انترولونه پیداکړئ چې درکړل شوي تابع ګانې په هغې کې متزایدې یا متناقصې وي.

6. $f(x) = 5x^2 + 10x$ ، 7. $g(x) = -4x^2 + 16x$

8. $f(x) = x^3 - x^2 - x$ ، 9. $g(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

دلاندې تابع ګانو نسبي نهایي (اکسترموم) نقطې پیداکړئ.

10. $y = x^2 + 3$ ، 11. $y = -2x^2 + 4x - 2$

12. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x$ ، 13. $y = 2x^4 - 4x^2 + 5$

14. د $f(x) = \begin{cases} 4 - (x+5)^2 & , \quad x \le -4 \\ 12 - (x+1)^2 & , \quad x > -4 \end{cases}$ تابع نسبي اصغري نقطه پیداکړئ.

دلاندې تابع ګانو په درکړل شوي انټرول کې مطلقه اعظمي او مطلقه اصغري معلوم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

15. $y = 4x^2 - 7x + 3 \quad , \quad [-2\,,2]$

16. $y = 4x^3 - 8x^2 + 1 \quad , \quad [-1\,,1]$

17. $y = \sin x + x + 3 \quad , \quad [0\,,2\pi]$

18. $y = \sin x - \cos x \quad , \quad [0\,,\pi]$

دلاندې تابع ګانو دانعطاف نقطې معلومې کړئ، هغه انترولونه وټاکی چې دا ړونده تابع ګراف په هغې کې محدب یا مقعر وي.

19. $y = 4 + 3x - x^3$, 20. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$

21. $y = x^3 - 3x^2 + 2$, 22. $y = x^2 - 4x + 3$

23. $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2$, 24. $y = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}}$

24. وښیئ چې د $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع ګراف یوازې یوه د انعطاف نقطه لري. هغه دعطف نقطه پیداکړئ.

25. د c,b,a او d قیمتونه دا ډول پیداکړئ چې د $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په $(2,3)$ نقطه کې انعطاف او په $(1,5)$ نقطه کې نسبي اعظمي ولري.

دلاندې تابع ګانو ګر افونه رسم کړئ.

26. $y = x^2 - 3x - 4$, 27. $y = x^2 + x - 30$

28. $y = \begin{cases} 3x - 2 & , \ x < 1 \\ x^2 & , \ x \geq 1 \end{cases}$, 29. $y = \begin{cases} 4 - x^2 & , \ x \leq 1 \\ 2 + x^2 & , \ x > 1 \end{cases}$

30. $y = \frac{2}{x-4}$, 31. $y = \frac{2x}{x-1}$, 32. $y = \frac{x-1}{x-2}$

ketabton.com - The Digital Library

دهوپیتال د قاعدې څخه په استفاده لاندې لېمټونه معلوم کړئ.

33. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ ، 34. $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ، 35. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x(3+x)}$

36. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$ ، 37. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\ln(x+1)-1}{x^2}$

38. $\lim_{x\to \infty}\frac{e^x}{x}$ ، 39. $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ، 40. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{(\ln x)^3}$

41. $\lim_{x\to 0+}(x^2\ln x)$ ، 42. $\lim_{x\to \infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$ ، 43. $\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{2x}$

44. $\lim_{x\to 0+}(\ln\cot x)^{\tan x}$ ، 45. $\lim_{x\to 2+}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{1}{\ln(x-1)}\right)$

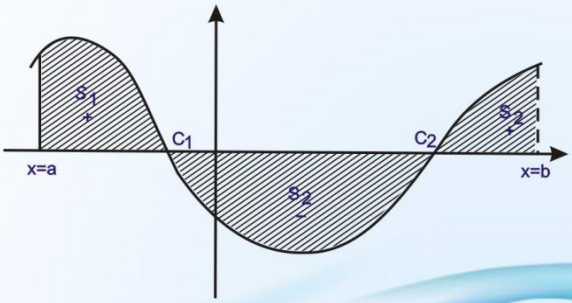
46. $\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$ ، 47. $\lim_{x\to 0+}\left[1+\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]^{\frac{1}{x}}$

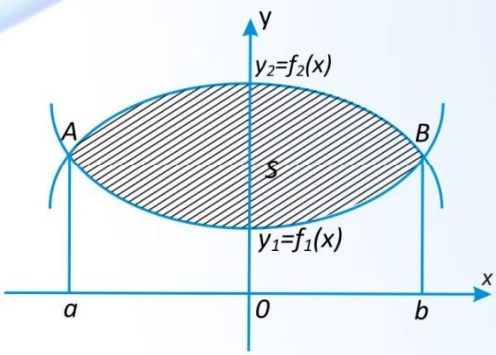
48. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ ، 49. $\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x\right)$

50. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+}(\sin x-\cos x)^{\tan x}$ ، 51. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library





شپږم څپرکی

انتګرال

ketabton.com - The Digital Library

انټګرال

انټګرالونه په ریاضي کې یوه مهمه موضوع ده چې په زیاتو حسابونو (محاسبو)کې څرګند رول لري.

دانټګرال مفهوم له دوو نقطه نظرو څخه طرح کیږي لومړی انټګرال دهغي اولیه تابع ګانو دسپټ په توګه چې مشتق یې معلوم وي (غیر معین انټګرال). دوهم انټګرال دعددی مجموعې دلپسپټ په توګه (معین انټګرال). د انټګرال دا دواړه مفهومونه دیوې سکې د دوومخونو په توګه یو له بله سره پیوستون لري. په دې فصل کې دمعینو اوغیر معینو انټګرالونو مقدمات په لنډه توګه تر بحث لاندې نیول کیږي.

اولیه تابع

$F(x)$ د $f(x)$ تابع د اولیه تابع په نامه یادیږي کله چې $\frac{dF}{dx}=f(x)$ وي. په بل عبارت د اولیه تابع $F(x)$ او اصلي تابع $f(x)$ ترمنځ لاندې رابطې موجودې دي.

$$dF(x)=f(x)\,dx$$

یا

$$F'(x)=f(x)$$

1 مثال

د $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ او $G(x)=\frac{1}{3}x^3+9$ د $f(x)=x^2$ دوې اولیه تابع ګانې دی.

$$F'(x)=x^2=f(x)$$
$$G'(x)=x^2=f(x)$$

د اولیه تابع ګانو شمېر

دا څرګنده ده چې یوه تابع کولی شي (بې نهایت زیاتې) اولیه تابع ګانې ولري، چې

ketabton.com - The Digital Library

دهرې جوړې ترمنځ توپیر یې یوازې یو ثابت عدد وي.

2 مثال

د $f(x) = x^2$ انټګرال عبارت دی له

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

غیر معین انټګرال

که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ یوه اولیه تابع وي، نود $F(x) + c$ تابع ګانو سټ په داسې حال کې چې c اختیاري ثابت عدد دی، د$f(x)$ دغیرمعین انټګرال په نامه یادیږي او لیکو چې

$$\int f(x)\,dx \quad = \quad F(x) \quad + \quad c$$

د تابع ګانو انټګرال نیونه

د بسیطو تابع ګانو انټګرال، کیدلې شي د مشتقاتو له فهرست څخه پیش بیني او معلوم شي. خو په عمومي توګه د مختلفو تابع ګانو د انټګرال دپیداکولو لپاره متفاوت او اختصاصي روشونه وجود لري.

د غیرمعینو انټګرالونولومړني خاصیتونه

دc او k ثابتو عددونو لپاره لرو چې

1. $\int 0\,dx \quad = \quad C$
2. $\int k\,dx \quad = \quad kx \quad + \quad C$
3. $\int x^n dx \quad = \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad + \quad C \quad , \quad n \neq -1$
4. $\int k\,f(x)\,dx \quad = \quad k\int f(x)\,dx$
5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

ketabton.com - The Digital Library

مثالـــونه

اوس کولی شو دځینو ساده ډول تابع ګانو انټګرالونه حساب کړو څو نمونې په لاندې ډول په پام کې نیسو.

3. $\int 5\,dx = 5x + c$

4. $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

5. $\int 5t^7 dt = 5\int t^7 dt = 5.\frac{t^8}{8} + c = \frac{5}{8}t^8 + c$

6. $\int \left(4x^3 + 2x - 1\right) dx = \int 4x^3 dx + \int 2x dx - \int dx$

$= 4\int x^3 dx + 2\int x dx - \int dx = \frac{4x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} - x + c$

$\Rightarrow \int \left(4x^3 + 2x - 1\right) dx = x^4 + x^2 - x + c$

7. $\int \frac{3dx}{x^2} = \int 3x^{-2} dx = \frac{3x^{-2+1}}{-2+1} + c = -3x^{-1} + c = -\frac{3}{x} + c$

8. $\int 5\sqrt[3]{u^2}\, du = 5\int u^{2/3} du = 5\frac{u^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = 5\frac{u^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = 3u^{\frac{5}{3}} + c$

9. $\int \frac{x^3-3}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{3}{x^2}\right) dx = \int \left(x - 3x^{-2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x^{-1} + C$

10. $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt{x}\right) dx = \int \left(2x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}}\right) dx = 2\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 6\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$= 3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{2}} + c$

معمولي انټګرالونه

د تابع ګانو د مشتقاتو له مخې، دځینو معمولو او کاري تابع ګانو دانټګرال نیونه د لومړني مرجع په توګه، تر ټولو په ساده شکلونو کې په لاندې ډول فهرست کوو.

ketabton.com - The Digital Library

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\alpha\neq-1$ ، 2. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c,x\neq0$

3. $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$ ، 4. $\int e^{x}dx=e^{x}+c$

5. $\int\cos x dx=\sin x+c$ ، 6. $\int\sin x dx=-\cos x+c$

7. $\int\frac{dx}{\cos^{2}x}=\tan x+c$ ، 8. $\int\frac{dx}{\sin^{2}x}=-\cot x+c$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+c$ ، 10. $\int\frac{dx}{1+x^{2}}=\arctan x+c$

11. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^{2}\pm1}\right|+c$ ، 12. $\int\frac{dx}{x^{2}-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

13. $\int\cosh x=\sinh x+c$ ، 14. $\int\sinh x=\cosh x+c$

15. $\int\frac{dx}{\cosh^{2}x}=\tanh x+c$ ، 16. $\int\frac{dx}{\sinh^{2}x}=-\coth x+c$

11 او 12 رابطې دمعکوسو هایپربولیکو تابع کانو دمشتق نیونې څخه لاس ته راځي.

مثالونه

11. $\int\left(2\cos x-5\sin x+e^{x}\right)dx=2\int\cos x dx-5\int\sin x dx+\int e^{x}dx$
$=2\sin x+5\cos x+e^{x}+c$

12. $\int\left(4^{x}-\frac{1}{1+x^{2}}\right)dx=\int4^{x}dx-\int\frac{dx}{1+x^{2}}=\frac{4^{x}}{\ln4}-\arctan x+c$

13. $\int\left(\sinh x+\frac{5}{x}\right)dx=\int\sinh x dx+5\int\frac{dx}{x}=\cosh x+5\ln|x|+c$

ketabton.com - The Digital Library

په تعويضي طريقه انتګرال نيونه

که چېرې د $F[g(x)]$ مرکبه تابع په پام کې ونيسو. پوهيږو چې

$$\frac{d}{dx}F[g(x)] = F'_g[g(x)]\,g'(x)$$

نو

$$\int F'_g[g(x)]\,g'(x)\,dx = F[g(x)] + C$$

وروستنۍ رابطه په تعويضي طريقه د انتګرال نيونې اساس جوړوي او که چېرې په هغه کې $g(x)=u$ او $F'=f$ وضع شي، نو څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی

لرو چې

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F[u]+C = F[g(x)]+C$$

بناپر دې

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx = F[g(x)]+C \quad , \quad F'=f$$

په دې ترتيب، په دې روش کې تر انتګرال لاندې تابع متحول ديوبل مناسب متحول له جنسه داډول عوض کيږي چې اړونده انتګرال، نظر نوي پېښېيني شوي متحول ته په لاس راشي.

د انتګرال ډيډاکولو وروسته بايد لومړنی متحول په اوليه تابع کې وضع شي.

14مثال

دا انتګرال $\int 3x^2 e^{x^3+1}dx$ پيداکړئ.

حل: که $u = x^2+1$ په نظر ونيول شي $du = 3xdx$ ده او

ketabton.com - The Digital Library

$$\int 3x^2 e^{x^3+1}dx = \int e^{x^3+1}\left(3x^2\right)dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^3+1} + C$$

15مثال

دا انټګرال $\int \sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx$ په لاس را وړئ.

حل: د $u = \cos x$ او $du = -\sin x dx$ لپاره په لاس راځي چې

$$\int \sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx = \int \sqrt{u}(-du) = -\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{\cos x}\,\sin x dx = -\frac{2}{3}\cos^{3/2} x + C$$

16مثال

$\int \frac{e^x}{\left(1+2e^x\right)^3}dx$ پیدا کړئ.

حل: د $u = 1+2e^x$ او $du = 2e^x dx$ په عوض کولوسره لرو، چې

$$\int \frac{e^x}{(1+2ex)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x dx}{(1+2ex)^3} \quad \begin{bmatrix} u = 1+2e^x \\ du = 2e^x dx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C = 1\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}\right) + C = -\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+2e^x\right)^2} + C$$

17. $\int \frac{\ln^2 x dx}{x} = \int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$

په داسې حال کې چې $u = \ln x$ او $du = \frac{dx}{x}$ عوض کیږي

18. $\int \frac{\arctan x dx}{1+x^2} = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c$

ketabton.com - The Digital Library

دلته $u=\arctan x$ او $du=\dfrac{dx}{1+x^2}$ عوض شوي دي.

19. $\int \frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C \qquad \begin{bmatrix} u=x^2+1 \\ du=2xdx \end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c$

20. $\int\frac{dx}{x(\ln x+1)}=\int\frac{1}{\ln x+1}\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln|\ln|x|+1|+c$

$\left[u=\ln|x|+1 \quad , \quad du=\frac{1}{x}\,dx\right]$

$\Rightarrow\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-e^{-x}(x+1)+c$

$=\frac{1}{2}e^{arc\sin 2x}+C \quad , \quad \left[u=arc\sin 2x \quad , \quad du=\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}\right]$

22. $\int x^2\cot x^3dx=\frac{1}{3}\int\cot x^3\left(3x^2dx\right)=\frac{1}{3}\int\cot udu=\frac{1}{3}\ln|\sin u|+C$

د غیرمعین انتګرال د د ستورونو عمومیت

د تعویضي طریقې څخه په ګټې اخیستنې سره دا لاندې عمومي فورمولونه استخراج کیدلی شي.

1. $\int[f(x)]^n f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c\ ,\ n\neq 1$
2. $\int e^{f(x)}\,f'(x)dx=e^{f(x)}+C$
3. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

ketabton.com - The Digital Library

4. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

5. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

یادښت

پنځم دستور په لاندې ډول هم ښودل کیدلی شي.

8. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\int \frac{dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

د ځینو مثلثاتي تابع ګانو انتګرال نیونه

که چېرې دغیرمنفي تاموعددونو توان لرونکو $sinx$ او $cosx$ تابع ګانو انتګرال نیونه مطلب وي یعني

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx \qquad (I)$$

دلته m او n غیرمنفي تام عددونه دي. په لومړني قدم کې دلاندې مثلثاتي مطابقتونو څخه کار اخیستل کیږي.

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad , \quad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

(1) انتګرال درې حالتونه لرلي شي.

اول: یوله دوو عددونو m یا n صفر وي.

ketabton.com - The Digital Library

دوهم: کم ترکمه یو له دوو عددونوڅخهm اوn جفت وي.

دریم: دواړه عددونه m اوn طاق وي.

د کار داسانتیا لپاره په لاندې څو نمونو اکتفا کوو.

23. $\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 6x dx\right)$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\int \cos t dt\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin t\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c\,, \begin{bmatrix} t = 6x \\ \frac{dt}{6} = dx \end{bmatrix}$

24. $\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$

25. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x)\sin x dx$

$= \int (u^4 - u^2)du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c\,, \begin{bmatrix} u = \cos x \\ du = -\sin x \end{bmatrix}$

26. $\int \cos^5 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \int (1-u^2)^2 du$

$= \int (1 - 2u^2 + u^4)du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$

$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$

27. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int [1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)]\,dx$

$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c\,, \begin{bmatrix} u = 4x \\ \frac{du}{4} = dx \end{bmatrix}.$

28. $\int \cos^4 3x\, dx = \int (\cos^2 3x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\right]^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x)\,dx = = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2}(1 + \cos 12x)\right]dx$

$= \frac{1}{4}\int (\frac{3}{2} + 2\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 12x)\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$.

ketabton.com - The Digital Library

د انقسام په طریقه انټګرال نیونه

د دوو تابع ګانو $u(x)$ او $v(x)$ د حاصل ضرب مشتق په پام کې نیسو.

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

پورتنۍ رابطه په لاندې ډول لیکو

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] - v(x)\,u'(x)$$

بناپر دې چې خواته اولیه تابع عبارت ده له

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx}$$

او دا رابطه د انقسام په طریقې د انټګرال نیونې دستور دی چې په لاندې ډول هم ارایه کیږي.

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

ددې طریقې دکارونې لپاره تر انټګرال لاندې تابع د دوو تابع ګانو u او v د ضرب د حاصل په توګه داسې په پام کې نیول کیږي چې په هغې کې $v = \int dv$ وضاحت ولري او د $\int v\,du$ انټګرال نسبت $\int u\,dv$ ته اسانه وي

29مثال

د $\int \ln x\,dx$ انټګرال حساب کړئ.

حل: لاندې طبیعي تعویض په پام کې نیسو

$$u=\ln x \quad , \quad dv=dx \;\Rightarrow\; du=\tfrac{1}{x}dx \quad , \quad v=x$$

بناپردي

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

ketabton.com - The Digital Library

30 مثال

د $\int \arcsin x\, dx$ انټګرال پیداکړئ.

حل: بیاهم یوازنی ګټور تعویض عبارت دی له

$$u = \arcsin x \quad , \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad , \quad v = x$$

له دې ځایه څخه

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

31 مثال

د $\int xe^{-x}\, dx$ انټګرال پیداکړئ.

حل: دلته ګټور امکان عبارت دی له

$$u = x \ , dv = e^{-x} dx \quad \Rightarrow \quad du = dx \ , v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + c$$

32 مثال

د $\int x^2 e^{-x}\, dx$ انټګرال پیداکړئ.

حل: دا لاندې وضع کوو

$$u = x^2 \quad , \quad dv = e^{-x} dx \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad , \quad v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1$$

خو پوهیږو چې

$$\int xe^{-x} dx = -e^{-x}\left[x + 1\right] + C_1$$

ketabton.com - The Digital Library

په نتیجه کې

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\left[-e^{-x}(x+1)\right] = -e^{-x}\left[x^2 + 2x + 2\right] + C.$$

33 مثال

د $\int x^2 e^{-x} dx$ انټګرال په لاس راوړئ.

حل: د لته دانقسام طریقه دوه ځلې کارول کیږي.

$$u = \sin 3x \ , \ dv = e^{2x} dx \quad \Rightarrow \quad du = 3\cos 3x dx \ , \ v = \tfrac{1}{2} e^{2x}$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin 3x dx = \tfrac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \tfrac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx \quad ... \quad (I)$$

اوس د (I)رابطې چپه خواباهم د انقسام په طریقه تحلیل کوو

$$u = \cos 3x \ , dv = e^{2x} dx \quad \Rightarrow \quad du = -3\sin 3x dx \ , v = \tfrac{1}{2} e^{2x}$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \cos 3x dx = \tfrac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \tfrac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx \quad ... \quad (II)$$

د (II) رابطې څخه دI په مساوات کې وضع کوو لرو چې

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin 3x dx = \tfrac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \tfrac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx\right]$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin 3x dx = \tfrac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \tfrac{3}{4} e^{2x} \cos 3x - \tfrac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin 3x dx + \tfrac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx = \tfrac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \tfrac{3}{4} e^{2x} \cos 3x + C_1$$

$$\Rightarrow \tfrac{13}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx = \tfrac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \tfrac{3}{4} e^{2x} \cos 3x + C_1$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin 3x dx = \tfrac{4}{13}\left[\tfrac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \tfrac{3}{4} e^{2x} \cos 3x + C_1\right]$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin 3x dx = \tfrac{1}{13} e^{2x} (2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

د هغو تابع ګانو انټګرال چې دوهمه درجه پولینومونه لري

د لته دهغو تابع ګانو انټګرالونه مطالعه کوو چې $ax^2 + bx + c$ ډوله افادې ولري.

په ځانګړې توګه

ketabton.com - The Digital Library

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad \text{او} \quad \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

ډوله انټګرالونه

په عمومي توګه د x^2+px+q افاده په لاندې ډول لیکلی شو.

$$x^2+px+q=\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)+\left(c-\frac{p^2}{4}\right)$$

دې ته په پاملرنې سره چې د $c-\frac{p^2}{4}$ عدد مثبت یا منفي دی او $u=x+\frac{p}{2}$ وضع کیږي. د x^2+px+q پولینوم دلاندینو دوو حالتونو څخه یو حالت لري.

$$x^2+px+q=u^2\pm k^2$$

خو د ax^2+bx+c په پولینوم کې د a ضریب فکتور نیسو نو لاندې افاده په لاس راځي

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+px+q\right]$$

د پورتنیو دوه ډوله لیکنو څخه د مطلوبه انټګرالونو په تحلیل کې ګټه اخلو.

په لاندې مثالونو اکتفاکوو

34. $$\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|ax^2+bx+c|+C$$

35. $$\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}+C$$

$$\Rightarrow \int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\frac{1}{2}\sqrt{ax^2+bx+c}+C$$

ketabton.com - The Digital Library

36. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C$

37. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{dx}{(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{1}{2})^2} = \int \frac{du}{u^2-(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2(\frac{1}{2})}\ln\left|\frac{u-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}}\right| + C$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \ln\left|\frac{(x-\frac{5}{2})-\frac{1}{2}}{(x-\frac{5}{2})+\frac{1}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+16x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25-4(x-2)^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{4}{25}(x-2)^2}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin u + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2(x-2)}{5} + C$$

په داسی حال کې چې $u = \frac{2(x-2)}{5}$ عوض کول طرحه شوي دي.

39. $\int \frac{2x+3}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x+27}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x+6+21}{9x^2+6x+5}dx$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{18x+6}{9x^2+6x+5}dx + \frac{21}{9}\int \frac{dx}{4+(3x+1)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{du}{u} + \frac{7}{9}\int \frac{3dx}{4+(3x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{du}{u} + \frac{7}{9}\int \frac{dz}{4+z^2} = \frac{1}{9}\ln|u| + \frac{7}{9}\times\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2} + C$$

دلته $\begin{bmatrix} u = 9x^2+6x+5 \\ du = (18x+6)dx \end{bmatrix}$ او $\begin{bmatrix} z = 3x+1 \\ dz = 3dx \end{bmatrix}$ په پورتنیودوو انټګرالونوکې

په پام کې نیول کیږي او د بر عکس عوض کولو څخه په لاس راځي چې

$$\int \frac{2x+3}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{9}\ln(9x^2+6x+5) + \frac{7}{18}\arctan\frac{3x+1}{2} + C.$$

ketabton.com - The Digital Library

د ناطقو تابع ګانو انتګرال نیونه

که چېرې په $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ ډوله انتګرالونو کې د صورت درجه له مخرج څخه زیاته وي، نو د صورت له تقسیم څخه پر مخرج باندې تر انتګرال لاندې تابع د یو پولینوم او یو کسر د حاصل جمع په توګه، په کوم کې چې د صورت درجه ئې له مخرج څخه کم ترکمه یوه درجه کمه وي، بدلیږي. په دې ترتیب مساله د هغې تابع انتګرال نیونې ته اوړي (راجع کیږي) په کومه کې چې د مخرج درجه له صورت څخه زیاته وي،

د ناطقو کسرونو د انقسام موضوع د I عمومي ریاضي په پنځم څپرکي کې تر بحث لاندې نیول شوي ده، د هغې پر بنا د یوې ناطقې تابع دانتګرال نیونې څخه دمخه، هغه تابع په ممکنه قسمي کسرونو باندې تجزیه کوو او انتګرال نیونه یې اسانه کیږي. بیا هم په لاندې مثالونو باندې بسنه (اکتفا) کوو.

40 مثال

د $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+2x+2}dx$ انتګرال نیونه مطلب دئ.

حل: د دې کسر دصورت له تقسیم څخه پر مخرج باندې په لاس راځي چې

$$\frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+2x+2}=x-1+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$$

بناپر دې

$$\int \frac{x3+x2+x-1}{x2+2x+2}dx=\int\left(x-1+\frac{x+1}{x2+2x+2}\right)dx$$

$$=\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+C$$

41 مثال

د $\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx$ انتګرال مطلوب دئ.

ketabton.com - The Digital Library

حل: ددې اړونده کسر دوه خطي فکتورونه لري اوپه لاندې ډول تجزیه کیږي.

$$\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$$

د وروستنۍ مساوي ښي خواته د دوو کسرونو دهم مخرج کولو او دواړو خواو له مقایسې څخه وروسته لرو چې

$$5 = A(x-2) + B(2x+1) = (A+2B)x + (-2A+B)$$

$$\Rightarrow (A+2B)x + (-2A+B) = 5 \Rightarrow \begin{cases} A+2B &= 0 \\ -2A+B &= 5 \end{cases}$$

د دې سیستم دحل څخه $A=-2$ او $B=1$ په لاس راځي نو

$$\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{-2}{2x+1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)}\,dx = -\int \frac{2\,dx}{2x+1} + \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\ln|2x+1| + \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right| + C\ .$$

42 مثال

د $\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}\,dx$ انټګرال پیداکوو.

حل: تر هر څه د مخه د کسرمخرج باید تجزیه شي.

$$x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{4x^2-3x-4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

ketabton.com - The Digital Library

د بنی خوا کسرونو هم مخرج کولو او د صورتونو له مقایسه کولو څخه وروسته په لاس راځي چې

$$4x^2-3x-4=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

$$\Rightarrow 4x^2-3x-4=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x+(-2A)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=4 \\ A+2B-C=-3 \\ -2A=-4 \end{cases} \Rightarrow A=2\,,\ B=-1\,,\ C=3$$

$$\Rightarrow \int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}\,dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx$$

$$=2\ln|x|-\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C=\ln\left|\frac{x^2(x+2)^3}{x-1}\right|+C.$$

43 مثال

د $\int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}\,dx$ انټګرال پیدا کړئ.

حل

$$\frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}=\frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

دکسرونو د تجنیس کولو او صورتونو دمقایسې څخه لرو، چې

$$5x^3-3x^2+2x-1=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2$$

$$5x^3-3x^2+2x-1=(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=5 \\ B+D=-3 \\ A=2 \\ B=-1 \end{cases} \Rightarrow A=2\,,\ B=-2\,,\ C=3\,,D=-2$$

ketabton.com - The Digital Library

$$\Rightarrow \int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3x - 2}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2 + 1} - 2\int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) - 2\arctan\ x + C.$$

معین انټګرال

اګرچې معین انټګرال دحسابونې دیونوي فن په توګه دغیرمعین انټګرال سره ګټوره او مهمه رابطه لري. خو کولی شوچې هغه په مستقله تو ګه دارونده قیمتونو له جنسه د یوې عددې سلسلې په توګه طرحه کړو.

که چېرې $f(x)$ یوه تابع د $[a, b]$ په ټرلي انټرول کې تعریف شوي او متمادي وي او

1. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \quad \ldots \quad < x_{n-1} < x_n = b$
2. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad , \quad k = 1,2,3, \quad \ldots \quad ,n$
3. $\Delta x_k \quad \to \quad 0 \quad , \quad n \quad \to \quad \infty$
4. $x_{k-1} \le c_k \le x_k \quad , \quad k = 1,2,3, \quad \ldots \quad ,n$

په دې صورت کې له a څخه تر b پورې د $f(x)$ معین انټګرال عبارت دی له

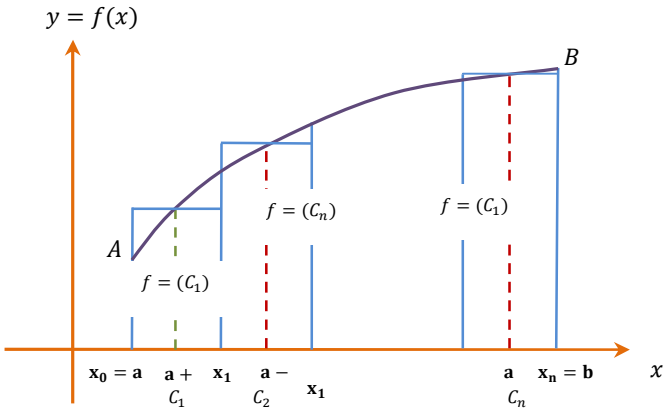
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \quad \ldots \quad + f(c_n)\Delta x_n \right]$$

د a او b عددونه په ترتیب سره د انټګرال لاندني او پورتني سرحدونه بلل کیږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ افاده د ریمن دمجموعې په نامه یادوي.

ketabton.com - The Digital Library



$$\Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} 4x\,dx = -6 \quad .$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټرول کې منفي قیمتونونه، ونه لري او متمادي وي. د هندسې له نظره د $\int_{-2}^{} 4x\,dx$ انټګرال دهغې سطحې دمساحت سره مساوي دی چې د $y=f(x)$ تابع منحني، دx او $x=a$ او $x=b$ خطونو ترمنځ بندوي.

44 مثال

د $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ معین انټګرال حساب کړئ.

حل: تر انټګرال لاندې تابع $f(x)=4x$ او اړونده انټرول $[-2,1]$دي. دلته

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n} \quad , \quad c_k = -2 + k\Delta x = -2 + k\left(\frac{3}{n}\right)$$

په پام کې نیسو او د مجموعې څخه په استفاده لرو چې

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k)\Delta x] = \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} 4c_k \Delta x\right] = \lim_{k\to\infty} \left[4\Delta x \sum_{k=1}^{n} c_k\right]$$

ketabton.com - The Digital Library

$$= \lim_{n\to\infty}\left[4\Delta x\sum_{k=1}^{n}(-2+k\Delta x)\right]= \lim_{n\to\infty}\left[4\times\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-2+k\times\frac{3}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{12}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(-2)+\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}k\right)\right]= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{12}{n}\left(-2n+\frac{3}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

د معین انتګرال خاصیتونه

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, 2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, $k = const.$

4. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

6. $m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

اساسي قضيه

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترڅ کې انټرول کې متمادي او $F(x)$ د $f(x)$ یوه اولیه تابع وي.نو

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),\ F'(x)=f(x)$$

دا قضیه معین او غیر معین انتګرالونه یوله بل سره تړي چې دمعین انتګرال حسابول ساده کوي.

45 مثال

د $\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx$ معین انتګرال حسابوو.

ketabton.com - The Digital Library

حل: د اساسي قضيې څخه په استفاده لرو چې

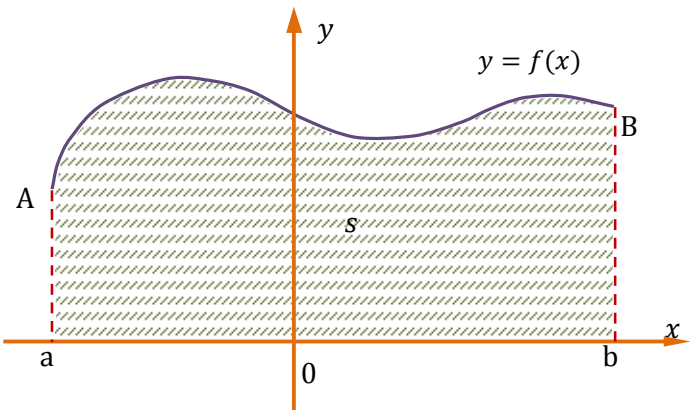
$$\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx = 2\int_1^2 x\,dx+3\int_1^2 e^x dx-4\int_1^2 \tfrac{1}{x}dx$$

$$=x^2\Big|_1^2+3e^x\Big|_1^2-4\ln|x|\Big|_1^2=\left(2^2-1^2\right)+\left(3e^2-3e^1\right)-\left(4\ln 2-4\ln 1\right)$$

$$=3+3e^2-3e-4\ln 2\approx 14{,}24$$

د مساحتونو په حسابولو کې د معين انټګرال کارول

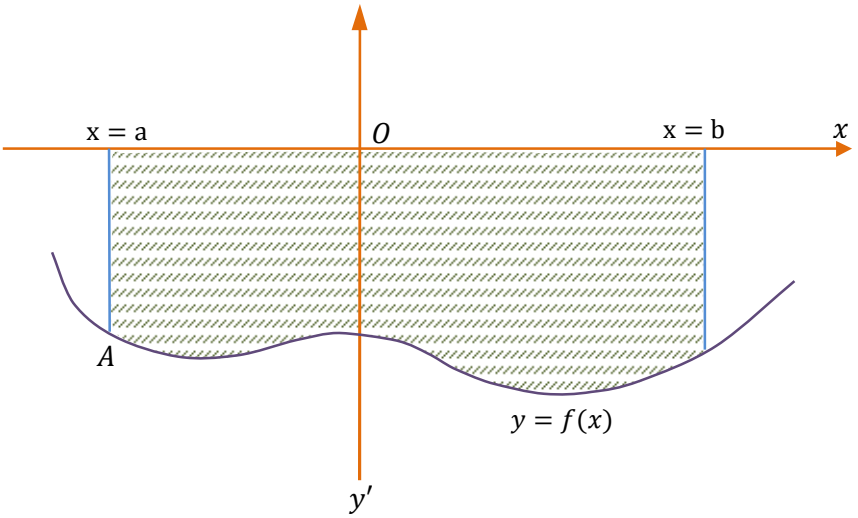
لکه څرنګه چې دمعين انټګرال په پيژندنه کې څرګند شول چې که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټرول کې منفي قيمتونه ونه لري (لاندې شکل)، نو د $y=f(x)$ منحني او افقي محور تر منځ سطح دپورتني انټرول په اړدو عبارت دی له



کله که $f(x)$ په اړونده انټرول کې مثبت قيمتونه ونه لري، نو دهغې مساحت لاندې شکل لري

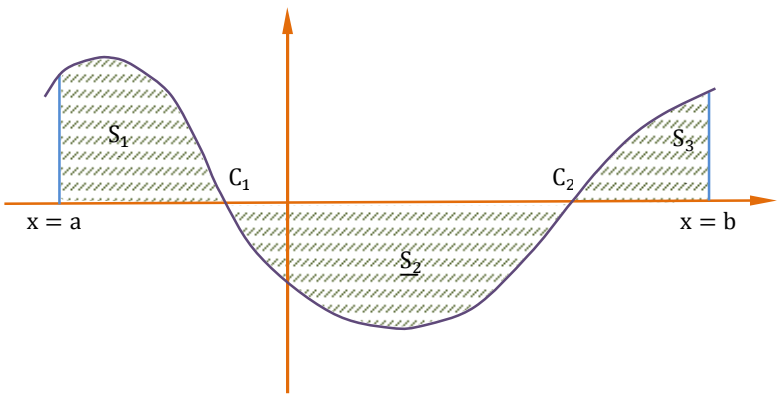
$$S=-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

ketabton.com - The Digital Library



که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټرول کې په محدود تعداد سره تناوب ولري منفي برخې د منفي علامې سره په پام کې نیسو او مساحت یې پیداکوو. دمثال په توګه دلاندې شکل سره سم لرو، چې.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^{c_1} f(x)dx - \int_{e_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{e_2}^{d} f(x)dx$$



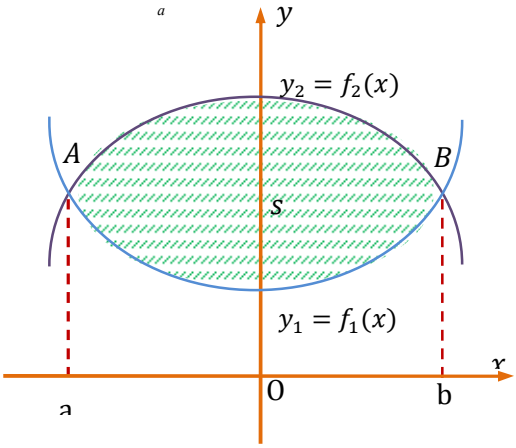
نوپه عمومي توګه

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ketabton.com - The Digital Library

او که چېرې د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ تابع ګانو لپاره د $[a,b]$ په انټرول کې د $f_2(x) > f_1(x)$ شرط صدق شي (لاندې شکل)، نو د $[a,b]$ په انټرول کې د $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$ منحني ترمنځ دېرتې سطحې مساحت عبارت دی له

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$

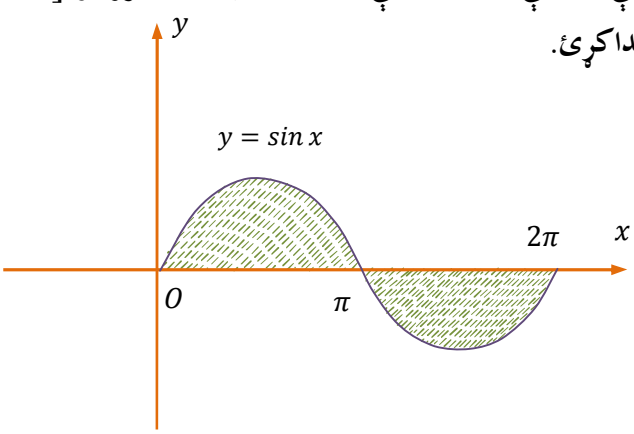


اما په عمومي حالت کې د هغې سطحې مساحت چې په $[a,b]$ انټرول کې د $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$ منحني ګانو ترمنځ محاط وي عبارت دی له

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_1(x)|\,dx$$

46 مثال

د هغې سطحې مساحت چې د $y=\sin x$، د xمحور او $[0,2\pi]$ انټرول ترمنځ پرته ده، پیدا کړئ.



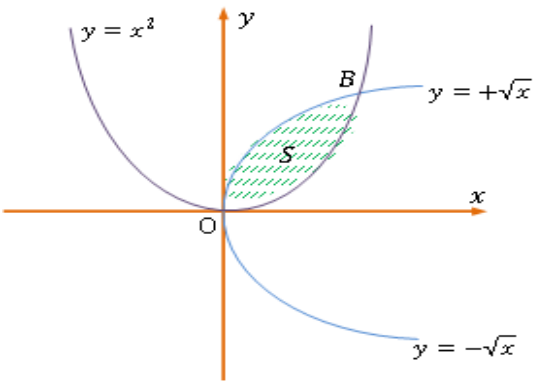
ketabton.com - The Digital Library

حل: خرګنده ده چې اړونده منحني له $x=0$ څخه تر $x=\pi$ په فاصله د افقي محور دپاسه او د $x=\pi$ او $x=2\pi$ په فاصله کې دنو موړي محور لاندې پرته ده. نو مطلوبه سطح عبارت دی له

$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$=-(\cos\pi-\cos 0)+(\cos 2\pi-\cos\pi)=-(-1-1)+(1+1)=4$$

47 مثال

د $y=\sqrt{x}$ او $y=x^2$ منحني ګانو ترمنځ بندشوي سطح پیداکړئ.



حل: د منحني ګانو د تقاطع نقطو دمعلومولوڅخه وروسته.

$$y=\sqrt{x}\ ,\ y=x^2\Rightarrow x^2=\sqrt{x}\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

مطلوب مساحت عبارت دی له

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{x}-x^2\right]dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

ketabton.com - The Digital Library

پوښتنې

1. $\int (3x^2 + 2x + 1)\,dx$ ، 2. $\int \left(\frac{3}{x^2} + 2x^{\frac{3}{2}} - 1\right) dx$

3. $\int \left(\frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} - \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}\right) dx$ ، 4. $\int \left(2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

5. $\int \frac{1}{(x - 10)^7}\,dx$ ، 6. $\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{7x^2}\,dx$

7. $\int (5\cos 10x - 10\sin 5x)\,dx$ ، 8. $\int \frac{1}{(3z + 10)^7}\,dx$

9. $\int \frac{3}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$ ، 10. $\int (x+5)^8\,dx$ ، 11. $\int (4 - 3x)^7\,dx$

12. $\int \sin(6x+3)\,dx$ ، 13. $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$ ، 14. $\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

15. $\int \frac{x^2 dx}{(x^3+5)^4}$ ، 16. $\int \cos^3 x \sin x\,dx$ ، 17. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{2t^2+1}}$ ، 20. $\int y^2\sqrt[3]{2-4y^3}\,dy$ ، 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

21. $\int x\,e^{2x}\,dx$ ، 22. $\int x\cos 3x\,dx$ ، 23. $\int (\ln t)^2\,dt$

24. $\int x^2 \arctan x\,dx$ ، 25. $\int t^2 \sin t\,dt$ ، 26. $\int x \ln x\,dx$

27. $\int \sin^2\theta\,d\theta$ ، 28. $\int \ln(1+x^2)\,dx$ ، 29. $\int x^2 \sinh x\,dx$

30. $\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$ ، 31. $\int \frac{dx}{x^3+4x}$ ، 32. $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$

33. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$ ، 34. $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$ ، 35. $\int \frac{x^2 dx}{x^4-1}$

36. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ ، 37. $\int \frac{x^3 dx}{x^2+x-6}$ ، 38. $\int \frac{2x-4}{x^2-x}\,dx$

39. $\int_0^1 (1-x^2)^3\,dx$ ، 40. $\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$ ، 41. $\int_0^2 x^2\sqrt{9-x^3}\,dx$

ketabton.com - The Digital Library

ماخذونه

1- آپوستل، ت. م1372انالیز ریاضی ترجمه عالم زاده، ع.ا. مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتجچی شریف، چاپخانه دانشگاه صنعتی شریف. چاپ سوم، تهران، صفحات 486 – 569.

2- پورکاظمی، م.ح. 1370، ریاضیات عمومی، جلددوم، چاپ نشرنی، تهران، صفحات 11 – 108، 306 – 321، 433 – 519.

3- عدالتی، ت. و فرخی ح. اصول ومبانی جغرافیای ریاضی، چاپ موسسه آستان قدس رضوی ، مشهد 1380، ص ص 397 – 425.

4- قرآن نویس،م. وجوادی،ح. فزیک پیش دانشگاهی،انتشارات ققنوس، ایران،تهران 1383، ص ص 10 – 15.

5- فرزان م. و دیبایی م.ت. روش تدریس ریاضی دوره رهنمایی تحصیلی، چاپ گلشن تهران،1380 ص ص 107 – 140.

6- ملا فرجزاده، س. 1377فرهنگ ریاضیات، چاپ ونشرانتشارات احرار، تبریز . صفحات 255 – 290.

7- منصورفر، ک 1378 , ریاضیات پایه برای علوم اجتماعي، چاپ ونشر سازمان مطالعه وتدوین کتب علوم انسانی (سمت)، تهران، صفحات159 –207.

8- نیکوکار، م. و فرزام، گ. 1381، ریاضیات پیش دانشگاهی، نشر گسترش علوم پایه، تهران، صفحات 227 – 247.

9- Agarwal ,P.K.(2004) AIEEE Mathematics , Branch Office ,Delhi , pp.266-343.

10- Ayres ,F. J.R. (1964), Calculus, Schoum Publishing Co. New York,. pp. 129 -158 , 162 – 180. 283 -330.

ketabton.com - The Digital Library

11- Ayres ,F. J.R. (1962), First Year College Mathematics, Schoum Publishing Co., New York, pp. 417 – 427.

12- Barnett , R.A. , Ziegler M.R. and Byleen K.E. (1999) ,College Algebra , Sixth Edition , Adivision of The McGraw-Hill Companies , boston ,USA , pp. 488-540

13- Bermant, A. I. and Aramanovich I.G. (1979), Mathematical Analysis, Mir Publishing, Moscow,, pp. 258 – 343 , 365 – 568.

14- Cohen, D. (1990), Precalculus, California ,Los Angeles, ,pp. 411 -449.

15- Demidovich, B.; (1981), Problems Mathematical Analysis, Mir Pub. Moscow, , pp. 180 – 318.

16- Demidovich, B.P. and Maron I.A. , (1981), Computational Mathematics, Mir Publishers, Moscow, pp.127 -135 , 229 - 269.

17- Karl, J.S. (1998), Trigonometry For College Students , Brook/Col Publishing Co.Washington. p. 125.

18- Kindle , H.J. (1964), Analytic Geometry , Schoum Publishing Co., New York , pp. 258 – 272 , 278 , 279 , 283 – 330....

ketabton.com - The Digital Library

19- . Maqsood, A. Mathemahics7(2004),New Star Book Depot , Lahor,p p.21 – 65.

20- Maqsood, A. Mathemahics8(2004),New Star Book Depot , Lahor, , p p.1 – 87.

21- . Mira J.A. (1968), Arithmetic Clear and Simple , Booksellers ,New York , ,pp.1-158.

22- .Palmer C.I. and Bibb S.F. (1946)PracticalMathematics, MeGraw – Hill , Book Company ,New York,pp.1- 161

23- Piskunov, S.M. (1981), Differential and Integral Calculus , 1 vols. Mir Pub. Moscow.pp. 158 – 211 , 216 – 247 , 253 – 319.

24- Robert, B. (1997), Intermediate Algebra for College Student Second Edition , Prentice Hall , Upper Saddle River, New Jersey.p. 819 , 843 , 858 .

25- Spiegel, M.R. (1961), Statistics , ,Schaum,s Outline Series , New York ,.pp.45 -64.

26- Thomos ,G.B.and Finny ,R.L. (1996) , Calculus and Analytic Geometry , Addison – Wessley ,New York , USA , PP.1001 - 1134.

27- Stein E.I., (1961), Refresher Arithmetic , USA,Allyn and Bacon ,INC, pp. 109 -200 , 220,333.

Thank you for reading

Find more e-books and articles on Ketabton - your multilingual digital library.

www.ketabton.com

Ketabton - Pashto, Farsi, Arabic & English